سلسلة التمارين الثانية

التمرين الأول:

نعرف المتتالية التالية $(f_n)_n$ بـ:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[; \\ 0 & : \quad x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right), \end{cases}$$

1. هل المتتالية متقاربة ببساطة؟
2. أثبت أن $(f_n)_n$ تتقارب في $D'(\mathbb{R})$ نحو توزيع ديراك δ، و أن مربع المتتالية متتالية غير متقاربة في $D'(\mathbb{R})$.
3. أثبت أن المتتالية $f_n - n\delta$ تقاربة في $D'(\mathbb{R})$، و احسب نهايتها.

التمرين الثاني:

نعرف المتتالية $(f_n)_n$ بـــ: $f_n = \sqrt{n}e^{-nx^2}$.
أثبت أن $(f_n)_n$ تتقارب في $D'(\mathbb{R})$ ، و عين نهايتها (نذكّر أن $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$).

التمرين الثالث:

أثبت أن $(f_n)_n$ المعرفة بـ $f_n = \sin(nx)$ متقاربة في $D'(\mathbb{R})$ نحو الصفر، لكن المتتالية $(g_n)_n$ المعرفة بـ $g_n(x) = (\sin(nx))^2$ ليست متقاربة نحو الصفر في $D'(\mathbb{R})$.
لاحظ أن هذا يثبت بأن جداء التوزيعات تطبيق غير مستمر.

التمرين الرابع:

1) عين التوزيع مقتصر توزيع ديراك $\delta \mid_{\mathbb{R}^*}$.

2) نفرض أن هناك $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

أثبت أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^*$. و استنتج أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$. هل هناك تناقض؟

التمرين الخامس:

نعتبر المتتالية $(f_n)_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-n^2|x|^2}} & : \quad |x| < \frac{1}{n}; \\ 0 & : \quad |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1) تأكد من أن $f_n \in D(\mathbb{R})$, و أن: $|f_n(x)| \leq f_n(0) \leq \frac{1}{e}$

2) نفرض وجود دالة $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle \delta, f_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) f_n(x) = \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} f(x) f_n(x) dx.$$

أثبت انطلاقا من العلاقة التالية (تأكد منها) أن هناك تناقض.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{e} = \langle \delta, f_n \rangle \leq \frac{1}{e} \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} |f(x)| \, dx$$

التمرين السادس:

احسب مشتق الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x > 0; \\ 0 & : \quad x \leq 0. \end{cases}$$

التمرين السابع:

احسب المشتقين الأول و الثاني للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & : \quad x > 0; \\ e^{x} & : \quad x \leq 0. \end{cases}$$

ثم عين $f'' - 3f' + 2f$.

التمرين الثامن:

نعتبر الدالة $H_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $H_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = H(x_1)H(x_2)\cdots H(x_n)$، حيث يرمز H لدالة هيفيسايد،
أثبت أن $D^\alpha H_n = \delta$ حيث α دليل متعدد يساوي $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$ و δ تابع ديراك.

التمرين التاسع:

احسب المشتق الأول و الثاني للدالة $ln\,|x|$ في $D'(\mathbb{R})$.

التمرين العاشر:

ليكن التوزيع T المعرف بـ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, -x) dx.$$

- أثبت أن T توزيع منتهي الرتبة و عيّن رتبته.
- عين حامل T.
- احسب العبارة $\partial_x T - \partial_y T$.

التمرين الحادي عشر:

حل في $D'(\mathbb{R})$ المعادلة التفاضلية $xT' + T = 0$.