سلسلة التمارين الأولى

التمرين الأول:

- تأكد من أن التابع $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـــ:

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & : \quad t > 0; \\ 0 & : \quad t \leq 0 \end{cases}$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$.

- استنتج أن $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ المعرف بـــ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & : \quad \|x\| < 1; \\ 0 & : \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ينتمي إلى $D(\mathbb{R}^N)$ حيث يرمز $\|\cdot\|$ للنظيم الأقليدي، و كذلك عناصر المتتالية $\varphi_j(x) = j\dfrac{\varphi(jx)}{\varphi(0)}$.
من أجل $N = 1$ ارسم بيانات بعض مثل هذه التوابع.

التمرين الثاني:

لتكن الدالة φ المعرفة بـــ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : \quad |x| < 1; \\ 0 & : \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

هل المتتاليتان $(g_n)_n, (f_n)_n$ المواليتان متقاربتان في $D(\mathbb{R})$:

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}), \qquad f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n}$$

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية $(\varphi_n)_n$ المعرفة بـ $\varphi_n = e^{-n}\varphi(nx)$ حيث $\varphi \in D(\mathbb{R})$

- أثبت أن هذه المتتالية متقاربة في $D(\mathbb{R})$ $\varphi \in$.
- ادرس التقارب في $D(\mathbb{R})$ $\varphi \in$ للمتتالية $(\psi_n)_n$ المعرف بـ

$$\psi_n(x) = (n+1)^{-k}\varphi(nx), \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

التمرين الرابع:

لتكن الدالة المعرفة بـــ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : \quad x>0;\\ 0 & : \quad x\leq 0.\end{cases}$$

وضح كيف أن العلاقة:

$$\varphi\in D(\mathbb{R}),\qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

لا تعرف توزيعا على $\mathbb{R}$ بينما العلاقة:

$$\varphi\in D(\mathbb{R}^+),\qquad \int_{0}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

تعرف توزيعا على $\mathbb{R}^+$.

التمرين الخامس:

عين من بين التطبيقات $T\ :\ D(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ التالية تلك التي تعرف توزيعا:

- $\langle T,\varphi\rangle=|\varphi(0)|$
- $\langle T,\varphi\rangle=(\varphi(0))^2$
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx$
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(j)}(x)dx$ حيث j عدد طبيعي مثبت
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{1}{k})-n\varphi(0)-\varphi'(0)\ln(n)\right\}$
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi^{(k)}(0)$
- $\langle T,\varphi\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi^{(k)}(k)$

التمرين السادس:

نعتبر المتتالية $(\varphi_n)_n$ المعرفة بـ:

$$\varphi_n(x)=\varphi(n+x),\qquad \varphi\in D(\mathbb{R})$$

أدرس التقارب البسيط لهذه المتتالية، ثم تقاربها في $D(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})$ و $D'(\mathbb{R})$.