Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2021/2022

Analyse fonctionnelle 2 — Mastrer 1 - Mathématiques appliquées

FEUILLE DE TD (Dualité et convergence faible)

Exercice 1 (dual de c_0) *On désigne par c_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, et par c_{00} l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On munit c_0 de la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|\,, \quad \text{pour } x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0.$$

On rappelle que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1. *Montrer que c_{00} est dense dans c_0.*
2. *On note ℓ^1 l'espace des suites réelles sommables, muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$.*

   (a) *On fixe $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$ et on note T_x l'application définie sur c_0 par*

   $$T_x(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \quad \text{pour } y = (y_n)_{n\geq 1} \in c_0.$$

   Montrer que T_x est une forme linéaire continue sur c_0, de norme égale à $\|x\|_1$.

   Indication. Pour le calcul de la norme de T_x, on pourra considérer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $y^k = (y_n^k)_{n\geq 1}$ définie par

   $$y_n^k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_n) & \text{si } n \leq k, \\ 0 & \text{si } n > k, \end{cases}$$

   où

   $$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{|s|}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ 0 & \text{si } s \neq 0. \end{cases}$$

   (b) *Montrer que l'application $T : x \mapsto T_x$ est un isomorphisme isométrique de ℓ^1 sur $(c_0)'$. Autrement dit, le dual de c_0 est ℓ^1.*

Exercice 2 *Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ et $A : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour tout $f \in F'$, l'application $f \circ A : E \to \mathbb{K}$ est continue. Montrer, en utilisant le théorème du graphe fermé*, que A est continue.

Exercice 3 (Un critère de convergence faible) *Montrer qu'une suite* $(x_n)_n$ *dans un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *converge faiblement si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $(\|x_n\|)_n$ *est bornée ;*

ii) *il existe un* $x \in E$ *et un sous-ensemble* G <u>dense</u> *dans* E' *tels que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \qquad \forall f \in G.$$

Exercice 4 *On note* $L^2(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des (classes de) fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mesurables et de carré intégrable (au sens de Lebesgue).*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit la fonction* f_n *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \sqrt{n}\ \chi_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]}(x),$$

où $\chi_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]}$ *désigne la fonction indicatrice de l'intervalle* $\left[n, n+\frac{1}{n}\right]$.

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *appartient à* $L^2(\mathbb{R})$ *et calculer* $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

2. *Soit* $g \in C_c(\mathbb{R})$ *(l'ensemble des fonctions continues à support compact). Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x) dx = 0.$$

3. *En déduire que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge faiblement vers* 0 *dans* $L^2(\mathbb{R})$*, mais ne converge pas fortement vers* 0 *dans* $L^2(\mathbb{R})$.

4. *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge fortement vers* 0 *dans* $L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $p \in [1, 2[$.

Exercice 5 *Pour tout* $n \geq 1$*, on définit sur* $]0,1[$ *la fonction* f_n *par* $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{1+nx}$.

1. *Montrer que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge presque partout vers la fonction nulle.*

2. *Calculer* $\|f_n\|_{L^2(]0,1[)}$ *en fonction de* n*. En déduire que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *ne converge pas fortement dans* $L^2(]0,1[)$.
   <u>Indication</u>. *Pour la seconde partie de cette question, on utilisera le résultat suivant (réciproque partielle du TCDL) : Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Soient* $(f_n)_n$ *une suite de* L^p *et* $f \in L^p$*, tels que* $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. *Alors, il existe une sous-suite extraite* $(f_{n_k})_k$ *telle que* $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p.*

3. *Soit* $g \in C_c^1(]0,1[)$ *une fonction de classe* C^1 *à support compact dans* $]0,1[$. *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)dx = 0.$$

4. *Déduire de la question précédente que* $(f_n)_{n\geq1}$ *converge faiblement dans* $L^2(]0,1[)$ *vers la fonction nulle.*

Exercice 6 *Montrer que dans un espace normé de dimension finie, les notions de convergence forte et convergence faible coïncident, i.e.,*

$$x_n \rightharpoonup x \iff x_n \to x.$$

Exercice 7 *Supposons que* $x_n \rightharpoonup x$ *dans un espace normé* E. *Montrer que*

$$x \in \overline{\mathrm{Vect}\{x_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}},$$

autrement dit, il existe une suite de combinaisons linéaires de points x_k *qui converge fortement vers* x.

Indication. On pourra utiliser un corollaire du théorème de Hahn-Banach.