Dualité dans les espaces normés et convergence faible

Prof. MERAZGA NABIL

21 mars 2022

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1 Dual d'un espace normé, exemples fondamentaux

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Rappelons qu'une forme (ou fonctionnelle) linéaire est une application linéaire définie sur E (ou sur un sous-espace vectoriel de E) à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires définies sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé <u>dual algébrique</u> de E et est noté $E^* = L(E, \mathbb{K})$.
Lorsque E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (ou plus généralement un espace vectoriel topologique), on appelle <u>dual topologique</u> de E (ou tout simplement <u>dual</u> de E) et on note E' l'espace des formes linéaires continues sur E.

Muni de la norme duale

$$\|f\|_* = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \,, \tag{1}$$

E' est un espace de Banach.
Lorsque $f \in E'$, la valeur de f sur le vecteur $x \in E$ sera notée

$$f(x) = \langle f, x \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet dans la dualité entre E' et E. Notons que l'on a :

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_* \|x\| \,, \qquad \forall f \in E',\, \forall x \in E, \tag{2}$$

qui est une inégalité de type Cauchy-Schwarz.

Remarque 1.1 La structure d'un espace vectoriel normé et celle de son dual sont très liées. L'étude des relations entre ces deux structures conduit à *la théorie de la dualité* des espaces vectoriels normés (et plus généralement des espaces vectoriels topologiques localement convexes), théorie qui joue un rôle important en analyse fonctionnelle. Observons que de nombreux objets mathématiques sont des formes linéaires continues sur des espaces de fonctions appropriés. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions de Schwartz sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$; espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Identifions les duaux de quelques espaces vectoriels normés classiques.

Proposition 1.1 (Dual de $\mathbb{K}^d$) *Pour tous $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{K}^d$ ($d \geq 1$), on pose $T_x(y) = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$. Alors on a :*

1. *T_x est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^d$ et l'application*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{K}^d & \to & (\mathbb{K}^d)' \\ & x & \mapsto & T_x \end{array}$$

   est un isomorhisme d'espaces vectoriels. Autrement dit, T est linéaire bijective.

2. *Le dual de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$.*
3. *Le dual de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_1)$.*
4. *Soient $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Le dual de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_q)$.*

Proposition 1.2 (Dual de ℓ^1) *On a les propriétés suivantes :*

1. *Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$ fixé. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} T_x : & \ell^1 & \to & \mathbb{K} \\ & y = (y_n)_{n\geq 1} & \mapsto & T_x(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^1, de norme égale à $\|x\|_\infty$.

2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} T : & \ell^\infty & \to & (\ell^1)' \\ & x & \mapsto & T_x \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique de ℓ^∞ sur $(\ell^1)'$. Autrement dit, ***le dual de ℓ^1 est ℓ^∞****.*

Preuve.

1. Pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| = \sum_{n=1}^N |x_n|\,|y_n| \leq \sum_{n=1}^N \|x\|_\infty |y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty.$$

En conséquence, la série $\sum_{n\geq 1} x_n y_n$ est absolument convergente, donc convergente, et T_x est donc bien définie en tant qu'application de ℓ^1 dans $\mathbb{K}$. De plus, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$, d'où $|T_x(y)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$.
Soient $y = (y_n)_{n\geq 1}, z = (z_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En vertu des propriétés des opérations sur les séries convergentes, on a

$$\begin{aligned} T_x(y + \lambda z) &= \sum_{n=1}^\infty x_n(y_n + \lambda z_n) = \sum_{n=1}^\infty (x_n y_n + \lambda x_n z_n) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n + \lambda \sum_{n=1}^\infty x_n z_n \\ &= T_x(y) + \lambda T_x(z). \end{aligned}$$

Donc T_x est linéaire. Par conséquent, T_x est bornée, i.e. $T_x \in (\ell^1)'$, et on a $\|T_x\|_* \leq \|x\|_\infty$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, soit $\mathbf{e}_n$ la suite scalaire dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n lequel vaut 1. On a $\|\mathbf{e}_n\|_1 = 1$ et $T_x(\mathbf{e}_n) = x_n$, d'où $\|T_x\|_* = \sup\limits_{\|y\|_1 \leq 1} |T_x(y)| \geq |T_x(\mathbf{e}_n)| = |x_n|$. Donc $\|T_x\|_* \geq \|x\|_\infty$. Par conséquent, on a $\|T_x\|_* = \|x\|_\infty$.

2. D'après ce qui précède, T est bien définie de ℓ^∞ dans $(\ell^1)'$. La linéarité de T est évidente. On a montré ci-dessus que T est aussi isométrique, donc il reste à montrer que T est surjective, i.e.,

$$\forall f \in (\ell^1)',\ \exists x \in \ell^\infty \quad \text{t.q.} \quad f = T_x.$$

Autrement dit, pour tout $f \in (\ell^1)'$, il existe $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$ t.q.

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \qquad \forall y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^1.$$

Soit f une forme linéaire bornée sur ℓ^1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = f(\mathbf{e}_n)$. Alors, $|x_n| = |f(\mathbf{e}_n)| \leq \|f\|_* \|\mathbf{e}_n\|_1 = \|f\|_*$, donc $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$.
Pour tout $n \geq 1$, on a $T_x(\mathbf{e}_n) = x_n = f(\mathbf{e}_n)$, donc $T_x = f$ sur $\mathrm{c}_{00} = \mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_n \, ; \, n \geq 1\}$. Comme c_{00} est dense dans ℓ^1, on en déduit que $T_x = f$. Par conséquent, T est surjective.

■

Proposition 1.3 (Dual de ℓ^p) *Soient $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1. *Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^q$ fixé. L'application*

$$\begin{array}{cccc} T_x : & \ell^p & \to & \mathbb{K} \\ & y = (y_n)_{n\geq 1} & \mapsto & T_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{array}$$

   est une forme linéaire continue sur ℓ^p, de norme égale à $\|x\|_q$.

2. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} T : & \ell^q & \to & (\ell^p)' \\ & x & \mapsto & T_x \end{array}$$

   est un isomorphisme isométrique de ℓ^q sur $(\ell^p)'$. Autrement dit, ***le dual de ℓ^p est ℓ^q****.*

Remarque 1.2 Ce résultat n'est pas vrai pour $p = \infty$.

Théorème 1.1 (de représentation de Riesz, version L^p) *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in (L^p)'$. Alors, il existe $v \in L^q$ (q étant l'exposant conjugué de p) unique tel que*

$$f(u) = \int uv \, dx, \qquad \forall u \in L^p.$$

De plus, on a

$$\|v\|_{L^q} = \|f\|_{(L^p)'}.$$

Ce théorème est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 \leq p < \infty$ se représente (de manière unique) à l'aide d'une fonction de L^q.
Notons $\Phi : (L^p)' \to L^q$ l'application $f \mapsto v$. Alors, Φ est une isométrie linéaire. Par ailleurs, pour tout $v \in L^q$, l'application $f_v : L^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_v(u) = \int uv \, dx, \qquad u \in L^p$$

est une forme linéaire continue sur L^p ($|f_v(u)| \leq \|v\|_{L^q} \|u\|_{L^p}$), i.e. $f_v \in (L^p)'$ et l'on a $\Phi(f_v) = v$. Ceci signifie que Φ est surjective.
Ainsi, l'application $\Phi : (L^p)' \to L^q$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^q. Dans la suite on fera systématiquement l'identification

$$(L^p)' = L^q.$$

Remarque 1.3 A noter que le résultat ci-dessus n'est pas vrai pour $p = \infty$, i.e. $(L^\infty)' \neq L^1$ (Le dual de L^∞ contient strictement L^1). Pour $p = 2$, L^2 est le dual de lui-même.

Examinons **le cas des espaces de Hilbert**. Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$. Pour $y \in H$, on définit la forme linéaire $f_y : H \to \mathbb{K}$ en posant

$$f_y(x) = (x, y)_H \qquad \forall x \in H. \tag{3}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|f_y(x)\right| \leq \|y\| \|x\|$ vaut pour tout $x \in H$. Par conséquent, $f_y \in H'$ et $\left\|f_y\right\|_* \leq \|y\|$. Par ailleurs, pour $x = y \neq 0$, on obtient $\left|f_y(y)\right| = \|y\|^2$, d'où il vient

$$\left\|f_y\right\|_* = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{\left|f_y(x)\right|}{\|x\|} \geq \frac{\left|f_y(y)\right|}{\|y\|} = \|y\|,$$

par conséquent,

$$\left\|f_y\right\|_* = \|y\|.$$

Le cas $y = 0$ est trivial.
Notons $j : H \to H'$ l'application $y \mapsto f_y$. Alors j est une isométrie, linéaire dans le cas réel et anti-linéaire dans le cas complexe :

$$j(\alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} j(y) + \bar{\beta} j(z), \qquad \forall y, z \in H,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pour voir que j est surjective, on a besoin du théorème suivant qui permet de représenter explicitement les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert à l'aide du produit scalaire.

Théorème 1.2 (de représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert, H' son dual. On note $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H. Pour toute forme $f \in H'$, il existe un vecteur $y \in H$ unique tel que*

$$f(x) = (x, y)_H \qquad \forall x \in H. \tag{4}$$

De plus, on a

$$\|f\|_* = \|y\|.$$

Preuve. Voir [1], page 81. ■

Ainsi,

$$\forall f \in H', \ \exists! y \in H \text{ t.q.} \quad f(x) = f_y(x) \ \ \forall x \in H,$$

i.e.

$$\forall f \in H', \ \exists! y \in H \text{ t.q.} \quad f = f_y = j(y).$$

Ceci prouve que $j : H \to H'$ est surjective. Ainsi, j est un (*anti-*) *isomorphisme isométrique*, grâce auquel on peut identifier H' avec H. On dit que tout espace de Hilbert est *auto-dual*.

2 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

La forme analytique du théorème de Hahn-Banach est un théorème permettant de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espaces vectoriel, en gardant un contrôle sur le prolongement quand il y en a un sur la forme de départ ; en particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la même norme.

Définition 2.1 Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application $p : E \to \mathbb{R}$ est sous-linéaire si elle vérifie les conditions suivantes :
- $p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E, \ \forall \lambda \geq 0$ [p positivement homogène]
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in E,$ [p sous-additive].

Exemple 2.1 Les semi-normes et les formes linéaires réelles sont des applications sous-linéaires.

Théorème 2.1 (de Hahn-Banach, forme analytique, cas réel) *Soit E un espace vectoriel réel, G un sev de E et $p : E \to \mathbb{R}$ une application sous-linéaire.*
Alors, pour toute forme linéaire g sur G telle que

$$g(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in G,$$

il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E.$$

Preuve. Voir [1], pages 1-3. ■

Remarque 2.1 Il faut noter que dans cette version, l'inégalité concerne $f(x)$ et non pas sa valeur absolue. Toutefois, lorsque p n'est pas seulement une application sous-linéaire mais une semi-norme sur E, on a $p(-x) = p(x)$; donc si l'on a

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E,$$

on a en fait

$$|f(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in E.$$

Théorème 2.2 (de Hahn-Banach, forme analytique, cas complexe) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, G un sev de E et p une semi-norme sur E.*
Alors, pour toute forme linéaire g sur G telle que

$$|g(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in G,$$

il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que

$$|f(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in E.$$

Le résultat présenté dans le théorème de Hahn-Banach est purement algébrique, et ne fait appel à aucune topologie sur l'espace vectoriel E.

Nous allons donner une version topologique du théorème de Hahn-Banach suivie d'une série de conséquences, toutes très importantes.

Rappelons qu'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace G dense dans E admet un prolongement à l'espace E tout entier et ayant la même norme ([1]). Le théorème de Hahn-Banach affirme que ce résultat demeure vrai même si G n'est pas dense (mais il faut alors noter que le prolongement peut ne pas être unique).

Corollaire 2.1 (Prolongement des formes linéaires continues) *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et G un sev de E.*
Alors, pour toute $g \in G'$, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$ où

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|, \qquad \|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)|.$$

Autrement dit, toute forme linéaire continue définie sur un sous-espace se laisse prolonger à l'espace tout entier sans que la norme soit modifiée.

[1]) Voir chapitre : Théorie des opérateurs linéaires, Proposition 13.

Preuve. On a toujours $|g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|$ pour tout $x \in G$, et l'application $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$ est définie sur E et est une semi-norme (c'est une norme si $g \neq 0$). Donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g et telle que $|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$ pour tout $x \in E$ (pour le cas réel, voir remarque 2.1). Ceci montre que f est continue avec $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. D'autre part, comme f prolonge g, on a également $\|g\|_{G'} \leq \|f\|_{E'}$, ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.2 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.*

a) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $f \in E'$ telle que

$$f(x) = \|x\| \quad \text{et} \quad \|f\|_* = 1.$$

b) Si x et y sont deux vecteurs distincts de E, alors il existe $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Autrement dit, E' sépare les points de E.

Preuve.

a) Sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}x = \{\lambda x \,;\, \lambda \in \mathbb{K}\}$, l'application $g : \lambda x \mapsto \lambda \|x\|$ est une forme linéaire continue de norme 1 ($|g(\lambda x)| = \|\lambda x\|$) avec $g(x) = \|x\|$, qu'il suffit de prolonger à E d'après le corollaire précédent.

b) Résulte de a), en considérant $x - y \in E \setminus \{0\}$ au lieu de x. Dans ce cas, on a $f(x) - f(y) = f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$.

■

Corollaire 2.3 *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$, on a*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |f(x)|. \tag{5}$$

Par conséquent, si $f(x) = 0$ pour toute $f \in E'$, alors $x = 0$.

Preuve. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Pour toute $f \in E'$ avec $\|f\|_* \leq 1$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_* \|x\| \leq \|x\|$$

ce qui entraîne

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|.$$

D'autre part, d'après le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ de norme 1 telle que $|f_0(x)| = \|x\|$, par conséquent, $\max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |f(x)| = \|x\|$.

Pour $x = 0$, la formule (5) est trivialement vérifiée. ■

Remarque 2.2 Il convient de distinguer la formule (1) qui est une définition et la formule (5) qui est un résultat. En général, le "sup" qui apparaît dans (1) n'est pas un "max" i.e. il n'est pas atteint.

Corollaire 2.4 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et F un sev de E. Soit $x_0 \in E$ tel que* $\operatorname{dist}(x_0, F) = \delta > 0$. *Alors, il existe $f \in E'$ telle que*

1. *f est nulle sur F, i.e. $f(x) = 0 \quad \forall x \in F$;*
2. *$f(x_0) = \delta$;*
3. *$\|f\|_* = 1$.*

Preuve. Comme $x_0 \notin F$, la somme $G := F + \mathbb{K}x_0$ est directe, i.e. tout $y \in F + \mathbb{K}x_0$ s'écrit de manière unique $y = x + \lambda x_0$ avec $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{rll} g: & F + \mathbb{K}x_0 & \to \mathbb{K} \\ & x + \lambda x_0 & \mapsto \lambda\delta \end{array}$$

est bien définie.
Visiblement, g est linéaire, nulle sur F puisque $g(x) = g(x + 0x_0) = 0$ pour tout $x \in F$, et $g(x_0) = g(0 + 1x_0) = \delta$.
Par ailleurs, comme pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \neq 0$, on a

$$\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \left\| x_0 + \frac{x}{\lambda} \right\| = |\lambda| \left\| x_0 - \underbrace{\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}_{\in F} \right\| \geq |\lambda| \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| = |\lambda| \operatorname{dist}(x_0, F) = |\lambda|\, \delta,$$

d'où, il vient

$$|g(x + \lambda x_0)| = |\lambda|\, \delta \leq \|x + \lambda x_0\|, \qquad \forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

i.e.,

$$|g(y)| \leq \|y\|, \qquad \forall y \in G,$$

d'où l'on déduit que la forme linéaire g est continue sur $F + \mathbb{K}x_0$ et $\|g\|_{G'} \leq 1$. Montrons qu'en fait $\|g\|_{G'} = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. En choisissant $x_\varepsilon \in F$ tel que $\|x_\varepsilon - x_0\| < \delta + \varepsilon$ (un tel x_ε existe par définition de la borne inférieure) on aura (en observant que $g(x_\varepsilon) = 0$)

$$\delta = |g(x_\varepsilon) - g(x_0)| = |g(x_\varepsilon - x_0)| \leq \|g\|_{G'} \|x_\varepsilon - x_0\| < \|g\|_{G'} (\delta + \varepsilon)$$

d'où,

$$\frac{\delta}{\delta + \varepsilon} < \|g\|_{G'},$$

ce qui montre que nécessairement $\|g\|_{G'} \geq 1$.

D'après le corollaire 2.1, il existe $f \in E'$ prolongeant g, donc telle que $f(x_0) = \delta$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$, avec $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1$. ∎

Une conséquence immédiate du corollaire ci-dessus est le résultat suivant qui permet de caractériser l'adhérence d'un sev.

Corollaire 2.5 *Soit F un sev d'un espace normé E. Alors,*

1. *Un point x de E est adhérent à F ssi toute forme linéaire $f \in E'$ nulle sur F, s'annule en x.*
2. *F est dense dans E ssi toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur F est identiquement nulle.*

Preuve.

1. Supposons que $x \in \overline{F}$. Si $f \in E'$ est nulle sur F, alors par continuité f est aussi nulle sur $\overline{F}$ et donc en x. Ainsi, la condition est nécessaire.
   Réciproquement, supposons que $x \notin \overline{F}$. Alors, d'après le corollaire précédent, il existe $f \in E'$ nulle sur F et valant $\delta = \operatorname{dist}(x, F) > 0$ en x. La condition est donc suffisante.
2. Conséquence immédiate du premier point.

∎

Il en résulte qu'un sev F n'est pas dense dans E si et seulement s'il existe une forme linéaire continue $f \neq 0$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$.

Remarque 2.3 En particulier, ce corollaire fournit une caractérisation des familles totales :

> *"Pour qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ soit totale dans E (i.e. $\overline{Vect\{x_i;\ i \in I\}} = E$), il faut et il suffit que toute forme linéaire $f \in E'$ qui s'annule sur tous les x_i, soit identiquement nulle".*

Corollaire 2.6 *Soit E un espace vectoriel normé ; si le dual E' est séparable, alors E est séparable.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans E'. Comme

$$\|f_n\|_* = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f_n(x)|, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, il existe (par définition du sup) un vecteur $x_n \in E$ tel que :

$$\|x_n\| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_*.$$

On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E, on conclut alors avec la proposition 51 du chapitre (Espaces de Banach).
Soit $f \in E'$ telle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; montrons que $f = 0$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_{n_\varepsilon}\|_* < \varepsilon$ (par densité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E'). Alors,

$$\frac{1}{2}\|f_{n_\varepsilon}\|_* \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| = |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| = |(f_{n_\varepsilon} - f)(x_{n_\varepsilon})| \leq \|f_{n_\varepsilon} - f\|_* \|x_{n_\varepsilon}\| < \varepsilon,$$

d'où, $\|f_{n_\varepsilon}\|_* < 2\varepsilon$. Enfin,

$$\|f\|_* = \|f - f_{n_\varepsilon} + f_{n_\varepsilon}\|_* \leq \|f - f_{n_\varepsilon}\|_* + \|f_{n_\varepsilon}\|_* < 3\varepsilon,$$

par conséquent, $f = 0$. D'après la remarque 2.3, ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.4 La réciproque est fausse. Il existe des espaces de Banach E séparables tels que E' ne soit pas séparable ; par exemple $E = \ell^1$ est séparable mais $E' = \ell^\infty$ ne l'est pas. De même, $E = L^1$ est séparable mais son dual $E' = L^\infty$ ne l'est pas.

3 Bidual - Espaces réflexifs

3.1 Bidual

Etant un espace de Banach, le dual E' d'un espace normé E admet à son tour un dual qui est un espace de Banach appelé le *bidual* de E et noté E''.
En général, il n'est pas possible d'identifier E avec E''. Nous allons maintenant étudier la relation entre E et E''.

Soit x un élément quelconque fixé de E. On peut lui associer la forme linéaire

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{6}$$

appelée application évaluatrice en x. Cette forme est continue car

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \, \|f\|_*, \qquad \forall f \in E'.$$

J_x est donc un élément du dual E'' de E' et l'on a $\|J_x\|_{**} \leq \|x\|$.
Ainsi, à chaque $x \in E$, correspond un élément $J_x \in E''$. Ceci définit une application $J : E \to E''$, $x \mapsto J_x$.

Proposition 3.1 *Soit E un espace normé. L'application*

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_x \end{aligned} \tag{7}$$

est une isométrie linéaire. On l'appelle l'injection canonique de E dans E''.

Preuve. Il est aisé de voir que J est linéaire. En effet, soit $x, y \in E$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout $f \in E'$, on a :

$$\begin{aligned} J_{x+y}(f) &= f(x+y) = f(x) + f(y) = J_x(f) + J_y(f), \\ J_{\alpha x}(f) &= f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha J_x(f). \end{aligned}$$

Par ailleurs, soit $x \in E$ arbitraire. D'après le corollaire 2.3 de Hahn-Banach

$$\|J_x\|_{**} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |J_x(f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_* \leq 1}} |f(x)| = \|x\| .$$

■

3.2 Réflexivité

D'après la proposition ci-dessus, il est possible d'identifier E avec le sous-espace $J(E)$ de E''. En général, J n'est pas surjective de sorte que $J(E)$ est un sous-espace propre de E''.

Définition 3.1 *Un espace normé E est dit réflexif si l'on a $J(E) = E''$, c'est-à-dire si l'injection canonique $J : E \longrightarrow E''$ est surjective.*
Autrement dit, E est réflexif s'il est isométrique à son bidual E'' via l'injection canonique J. On identifie alors E et E'', ce qu'on écrit $E \underset{J}{=} E''$.

Notons que $J(E) = E''$ signifie que

$$\forall \varphi \in E'', \exists\, x \in E \quad \text{t.q.} \quad \varphi = J_x,$$

soit

$$\forall \varphi \in E'', \exists\, x \in E \quad \text{t.q.} \quad \varphi(f) = f(x), \quad \forall f \in E'.$$

Remarque 3.1 Il résulte immédiatement de la définition ci-dessus qu'*un espace normé non complet n'est jamais réflexif* car E'' est toujours complet.

Voici quelques exemples fondamentaux d'espaces réflexifs.

Proposition 3.2 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.*

Preuve. Soit E un espace normé de dimension finie n. L'injection canonique $J : E \to E''$ est un isomorphisme de E sur $J(E)$, par conséquent $\dim J(E) = \dim E = n$. D'autre part, on a ([2]) $\dim E^{**} = \dim E^{*} = \dim E = n$, d'où sachant que $E' = E^{*}$ et $E'' = E^{**}$ ([3]), il s'ensuit que $\dim E'' = \dim E' = \dim E = n$. Ainsi, $J(E)$ est un sev de E'' et $\dim J(E) = \dim E''$, ce qui implique que $J(E) = E''$. ∎

Proposition 3.3 *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$, et soit $\varphi \in H''$. Pour tout $y \in H$ soit $f_y \in H'$ la forme linéaire sur H, $x \mapsto (x,y)_H$.

L'application $g : y \mapsto \overline{\varphi(f_y)}$ est une forme linéaire continue sur H. En effet, observons d'abord que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et tous $y, z \in H$, on a :

$$\forall x \in H : \quad \begin{aligned} f_{\alpha y+\beta z}(x) &= (x, \alpha y + \beta z)_H = \overline{\alpha}\,(x,y)_H + \overline{\beta}\,(x,z)_H = \overline{\alpha} f_y(x) + \overline{\beta} f_z(x) \\ &= \left(\overline{\alpha} f_y + \overline{\beta} f_z\right)(x), \end{aligned}$$

ce qui signifie que $f_{\alpha y+\beta z} = \overline{\alpha} f_y + \overline{\beta} f_z$. Par suite,

$$g(\alpha y + \beta z) = \overline{\varphi(f_{\alpha y+\beta z})} = \overline{\varphi(\overline{\alpha} f_y + \overline{\beta} f_z)} = \overline{\overline{\alpha}\varphi(f_y)} + \overline{\overline{\beta}\varphi(f_z)} = \alpha g(y) + \beta g(z),$$

d'où la linéarité de g. La continuité résulte de ce que

$$|g(y)| = \left|\overline{\varphi(f_y)}\right| = \left|\varphi(f_y)\right| \leq \|\varphi\|_{**} \left\|f_y\right\|_{*} = \|\varphi\|_{**} \|y\|, \qquad \forall y \in H.$$

Par le lemme de Riesz, il existe $x = x_g \in H$ tel qu'on ait

$$g(y) = (y, x)_H, \qquad \forall y \in H.$$

Soit maintenant $f \in H'$ arbitraire. D'après le lemme de Riesz, f est de la forme $f = f_y$ pour un certain $y \in H$, donc on a

$$\varphi(f) = \varphi(f_y) = \overline{g(y)} = (x,y)_H = f_y(x) = f(x),$$

ce qui signifie $\varphi = J_x$ et $J : H \to H''$ est donc surjective. ∎

Notons encore la

Proposition 3.4 *Pour tout $1 < p < \infty$, les espaces ℓ^p et L^p sont réflexifs.*

Remarque 3.2 On montre que les espaces suivants ne sont pas réflexifs :

[2] Voir Théorème 4 du chapitre : Théorie des opérateurs linéaires.
[3] Voir Corollaire 3 du chapitre : Théorie des opérateurs linéaires.

– L^1, L^∞, $C(K)$, (K *compact*),
– ℓ^1, ℓ^∞, le sous-espace c_0 et c de ℓ^∞...

Parfois la non séparabilité peut jouer un rôle dans la démonstration de la non réflexivité de certains espaces. Le point clef est le corollaire 2.6 du théorème de Hahn-Banach qui affirme que la séparabilité de E' implique la séparabilité de E. Par conséquent, si un espace normé E est réflexif, E'' est isomorphe à E via l'application J, de sorte que dans ce cas, la séparabilité de E implique la séparabilité de E'' et par suite celle de E'. En résumé,

$$E \textit{ séparable et réflexif } \Longrightarrow E' \textit{ séparable.}$$

De là, on a le résultat :

Proposition 3.5 *Un espace normé séparable E dont le dual E' n'est pas séparable ne peut être réflexif.*

Ceci est le cas, par exemple, de l'espace ℓ^1 lequel est séparable mais dont le dual $(\ell^1)' = \ell^\infty$ ne l'est pas. Idem pour L^1.

Citons quelques autres résultats relatifs aux espaces réflexifs.

Proposition 3.6 *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si son dual E' est réflexif.*

Ceci permet de voir que ℓ^∞ et L^∞ ne sont pas réflexifs du moment que ℓ^1 et L^1 ne le sont pas.

Proposition 3.7 *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach réflexif est encore réflexif.*

4 Convergences faible et faible-étoile

4.1 Convergence faible

Soit E un espace normé, E' son dual.

Définition 4.1 *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E est faiblement convergente s'il existe $x \in E$ tel que*

$$f(x_n) \to f(x), \qquad \forall f \in E',$$

i.e.

$$f(x_n - x) \to 0, \qquad \forall f \in E'.$$

Dans ce cas, on dit que x est la limite faible de $(x_n)_n$ et on note

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \text{ou} \qquad x_n \xrightarrow{w} x \quad (w \text{ pour weakly}) \qquad \text{ou} \qquad x_n \to x \text{ faiblement.}$$

Remarque 4.1 Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, la convergence au sens de la norme $\|x_n - x\| \to 0$ est appelée *convergence forte* que l'on note $x_n \to x$ (sans qualificatif).

Remarque 4.2 *Si la limite faible d'une suite $(x_n)_n$ existe, elle est nécessairement unique* :

$$(x_n \rightharpoonup x \quad \text{et} \quad x_n \rightharpoonup y) \implies x = y.$$

En effet, supposons que $x \neq y$. Alors, par le corollaire 2.2 du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Mais ceci conduit à une contradiction, parce que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y).$$

Exemple 4.1 (Convergence faible dans L^p)

– Le dual de L^1 étant L^∞, on a

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^1 \quad &\iff \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle\,, \qquad && \forall f \in (L^1)' \\ &\iff \int u_n v\,dx \to \int uv\,dx, && \forall v \in L^\infty. \end{aligned}$$

– Le dual de L^p, $1 < p < \infty$, étant L^q où q est l'exposant conjugué de p, on a

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^p \quad &\iff \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle\,, \qquad && \forall f \in (L^p)' \\ &\iff \int u_n v\,dx \to \int uv\,dx, && \forall v \in L^q. \end{aligned}$$

– $u_n \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^\infty \iff \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle\,, \qquad \forall f \in (L^\infty)'.$

La proposition suivante donne quelques propriétés de la convergence faible.

Proposition 4.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a :*

i) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$.

ii) $x_n \rightharpoonup x \implies (x_n)_n$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

iii) $(x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \to f$ *dans* $E') \implies f_n(x_n) \to f(x)$. [Résultat de convergence fort-faible].

Preuve. i) Résulte de ce que

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_* \|x_n - x\| \to 0, \qquad \forall f \in E'.$$

ii) Pour tout n, on définit $A_n \in E''$ par $A_n = J_{x_n}$ où J est l'injection canonique de E dans E'', et l'on note que $\|A_n\|_{**} = \|J_{x_n}\|_{**} = \|x_n\|$ (J est une isométrie linéaire).

Comme $(x_n)_n$ est faiblement convergente, alors pour tout $f \in E'$, la suite numérique $(f(x_n))_n$ i.e. $(A_n(f))_n$ est convergente vers $f(x) = J_x(f)$. Par conséquent, on déduit grâce au corollaire 6 (du théorème de Banach-Steinhaus) que

$$\sup_n \|A_n\|_{**} < \infty \qquad \text{et} \qquad \|J_x\|_{**} \leq \liminf \|A_n\|_{**},$$

d'où l'on déduit que $\|x_n\| = \|A_n\|_{**}$ est uniformément bornée par rapport à n et que

$$\|x\| = \|J_x\|_{**} \leq \liminf \|A_n\|_{**} = \liminf \|x_n\|$$

iii) Pour le résultat de convergence fort-faible, on a compte tenu du fait que $(\|x_n\|)_n$ est bornée :

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \\
&= |(f_n - f)(x_n) + f(x_n - x)| \\
&\leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \\
&\leq \|f_n - f\|_* \|x_n\| + |f(x_n - x)| \\
&\leq C \|f_n - f\|_* + |f(x_n - x)| \to 0.
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.2 *Si E est de dimension finie, les notions de convergence forte et convergence faible coïncident, i.e.,*

$$x_n \rightharpoonup x \iff x_n \to x.$$

Preuve. Laissée à titre d'exercice. ■

Remarque 4.3 Lorsque E est de dimension infinie, il existe en général des suites qui convergent faiblement mais qui ne convergent pas fortement. Vérifions-le sur un exemple.

Considérons dans $L^2(0,1)$, la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(t) = \sqrt{2}\sin(n\pi t), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a :

$$\|u_n\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 2\sin^2(n\pi t)dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 [1 - \cos(2n\pi t)]\, dt\right)^{1/2} = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(0,1)$, i.e.

$$\int_0^1 v(t)u_n(t)dt \to 0 \qquad \forall v \in L^2(0,1), \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{8}$$

Soit d'abord $v \in \mathcal{D}(0,1) = C_c^\infty(0,1)$, en faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 v(t)u_n(t)dt\right| &= \sqrt{2}\left|\int_0^1 v(t)\sin(n\pi t)dt\right| \\
&= \sqrt{2}\left|\underbrace{\left[-v(t)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 v'(t)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}dt\right| \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\int_0^1 \left|v'(t)\right| \left|\cos(n\pi t)\right| dt \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\int_0^1 \left\|v'\right\|_\infty dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\,\|v'\|_\infty}{n\pi} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

On en déduit (8) pour $v \in L^2(0,1)$ par densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $L^2(0,1)$. En effet, étant donné $v \in L^2(0,1)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(0,1)$ tel que $\|v - v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon/2$. D'où,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 v(t)u_n(t)dt\right| &= \left|\int_0^1 \left[v(t) - v_\varepsilon(t)\right] u_n(t)dt + \int_0^1 v_\varepsilon(t)u_n(t)dt\right| \\
&\leq \|v - v_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \|u_n\|_{L^2(0,1)} + \left|\int_0^1 v_\varepsilon(t)u_n(t)dt\right| \\
&\leq \varepsilon/2 + \left|\int_0^1 v_\varepsilon(t)u_n(t)dt\right|.
\end{aligned}$$

Or, $\left|\int_0^1 v_\varepsilon(t)u_n(t)dt\right| \to 0$ quand $n \to \infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\left|\int_0^1 v_\varepsilon(t)u_n(t)dt\right| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : \qquad \left|\int_0^1 v(t)u_n(t)dt\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v(t)u_n(t)dt = 0$.
Ainsi, $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(0,1)$, par conséquent si (u_n) converge fortement dans $L^2(0,1)$, sa limite forte ne peut être que la fonction nulle, or $\|u_n - 0\|_{L^2(0,1)} = \|u_n\|_{L^2(0,1)} = 1 \nrightarrow 0$, ce qui montre que $u_n \nrightarrow 0$.

Donnons un critère utile pour la convergence faible.

Proposition 4.3 *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace normé E converge faiblement si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(\|x_n\|)_n$ *est bornée ;*

(ii) *il existe un $x \in E$ et un sous-ensemble G <u>dense</u> dans E' tels que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \qquad \forall f \in G.$$

Preuve. Laissée à titre d'exercice. ■

Dans **les espaces de Hilbert**, on peut caractériser la convergence faible comme suit :

Proposition 4.4 *Dans un espace de Hilbert H de produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$, une suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers un point x si et seulement si*

$$(x_n, y)_H \to (x, y)_H \qquad \forall y \in H,$$

i.e.,

$$(x_n - x, y)_H \to 0 \qquad \forall y \in H.$$

Ce résultat est une conséquence directe du théorème 1.2 de représentation de Riesz qui permet de représenter les formes linéaires continues sur les espaces de Hilbert.

On montre alors aisément que :

Corollaire 4.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace de Hilbert H telle que :*

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x, \\ \|x_n\| \to \|x\|. \end{cases} \tag{9}$$

Alors,

$$x_n \to x.$$

Preuve. Observons que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= (x_n - x, x_n - x)_H = (x_n - x, x_n)_H - (x_n - x, x)_H \\ &= \|x_n\|^2 - (x, x_n)_H - (x_n - x, x)_H. \end{aligned}$$

Par hypothèses, $(x, x_n)_H \to \|x\|^2$, $(x_n - x, x)_H \to 0$ et $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$. Par conséquent,

$$\|x_n - x\|_H \to 0,$$

i.e. $x_n \to x$. ■

En association à la convergence faible, il y a un concept naturel de compacité séquentielle faible.

Définition 4.2 *Soit S un sous-ensemble d'un espace normé E.*

- *S est dit **faiblement séquentiellement compact** si, toute suite dans S admet une sous-suite faiblement convergente dans S.*
- *S est dit **relativement faiblement séquentiellement compact** si toute suite dans S admet une sous-suite faiblement convergente.*

Le théorème suivant exprime un résultat de compacité séquentielle faible.

Théorème 4.1 *Dans un espace de Banach réflexif, les boules fermées sont faiblement séquentiellement compactes. Autrement dit, si $(x_n)_n$ est une suite bornée dans un espace de Banach réflexif E, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ faiblement convergente vers un élément $x \in E$.*

Ceci s'applique en particulier aux espaces de Hilbert ainsi qu'aux espaces ℓ^p et L^p pour $1 < p < \infty$, lesquels sont des espaces de Banach réflexifs.

La réciproque du théorème ci-dessus est aussi vraie. Plus précisément, on a le

Théorème 4.2 (Eberlein-Šmulian) *Si E est un espace de Banach tel que toute suite bornée possède une sous-suite faiblement convergente, alors E est réflexif.*

Ainsi, si E est un espace de Banach, on a l'équivalence :

E réflexif $\iff$ Toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.

4.2 Convergence faible$-*$

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual. Sur l'espace E' sont déjà définies deux notions de convergence :

- la convergence forte (i.e. en norme) :

$$f_n \to f \iff \|f_n - f\|_* \to 0,$$

- la convergence faible :

$$f_n \rightharpoonup f \iff \varphi(f_n) \to \varphi(f), \qquad \forall \varphi \in E''.$$

On va définir maintenant une troisième notion de convergence dans E' : *la convergence faible$-*$*.

Définition 4.3 *On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de E' converge vers $f \in E'$ faible$-*$ si*

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \forall x \in E.$$

On note cette convergence :

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad \text{ou} \qquad f_n \to f \quad \text{faible} - *$$

Remarque 4.4 En assimilant les éléments de E' à des opérateurs linéaires bornés de E dans $\mathbb{K}$, la convergence $f_n \to f$ correspond à la convergence uniforme des opérateurs et la convergence faible$-*$ $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ à la convergence forte des opérateurs. On comprend donc que la terminologie proposée est conventionnelle.

Remarque 4.5 Par définition, on a

$$\begin{aligned} f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad &\Longleftrightarrow \; J_x(f_n) \to J_x(f), \qquad \forall x \in E \\ &\Longleftrightarrow \; \varphi(f_n) \to \varphi(f), \qquad \forall \varphi \in J(E). \end{aligned}$$

La convergence faible$-*$ sur E' ne se distingue donc de la convergence faible que lorsque E n'est pas réflexif. Si E est réflexif, les notions de convergence faible et faible$-*$ coïncident.

Remarque 4.6 La limite faible$-*$ d'une suite de E', si elle existe, est unique.

Exemple 4.2 Soit $E = L^p$ $(1 < p < \infty)$, $E' = L^q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.
La convergence faible dans E' coïncide avec la convergence faible$-*$ puisque E est réflexif.

$$\begin{aligned} u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } E' = L^q \quad &\Longleftrightarrow \; u_n \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^q \\ &\Longleftrightarrow \; \int u_n v dx \to \int u v dx, \qquad \forall v \in E = L^p. \end{aligned}$$

Exemple 4.3 Le dual de L^1 est L^∞, mais $(L^\infty)'$ ne coïncide pas avec L^1 et ce dernier n'est pas réflexif. Ainsi, on distingue les notions de convergence faible et faible$-*$ dans L^∞ :
Pour chaque $u \in L^\infty$, on note f_u l'élément de $(L^1)'$ défini par $f_u(v) = \int u v dx$ pour tout $v \in L^1$. Alors

$$\begin{aligned} u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } L^\infty \quad &\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \; f_{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f_u \quad \text{dans } (L^1)' \\ &\Longleftrightarrow \; f_{u_n}(v) \to f_u(v), \quad \forall v \in L^1, \end{aligned}$$

i.e.

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } L^\infty \; \Longleftrightarrow \; \int u_n v dx \to \int u v dx, \quad \forall v \in L^1,$$

alors que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^\infty \; \Longleftrightarrow \; \varphi(u_n) \to \varphi(u), \quad \forall \varphi \in (L^\infty)'.$$

Les résultats suivants sont des résultats duaux de ceux formulés dans les propositions 4.1, 4.3 et le théorème 4.1.

Proposition 4.5 *Soit $(f_n)_n$ une suite de E'. On a :*

1. $f_n \to f \implies f_n \rightharpoonup f \implies f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
2. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \implies (f_n)_n$ *est bornée et* $\|f\|_* \leq \liminf \|f_n\|_*$.
3. $\left(f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ et } x_n \to x \text{ dans } E\right) \implies f_n(x_n) \to f(x)$.

Proposition 4.6 *Une suite $(f_n)_n$ dans le dual E' d'un espace normé E converge faible$-*$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(\|f_n\|_*)_n$ *est bornée ;*

(ii) *il existe un $f \in E'$ et un sous-ensemble S dense dans E tels que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in S.$$

Théorème 4.3 (Banach-Alaoglu) *Si E est un espace normé séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_n$ de E' admet une sous-suite faible$-*$ convergente.*

Exemple 4.4 Comme L^1 est séparable, toute suite bornée de $L^\infty = \left(L^1\right)'$ admet une sous-suite faible$-*$ convergente.

Références

[1] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications*, Masson , Paris, 1983.