تمهيد:

بعد تطرقنا في الفصل السابق إلى المتغير العشوائي المنفصل والمستمر ومميزاتهما العددية، سينصب اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة عدد من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام في التطبيقات الإحصائية المتعددة الأغراض، وعلى معرفة كيفية استعمال قوانين التوزيع الاحتمالية لعدد من الظواهر التي تتميز بسلوك مماثلة، ولو أنها مختلفة بمميزاتها العددية (التوقع الرياضي، الانحراف المعياري،...) للوصول إلى نتائج بطرقة أسرع على أساس الخصائص التي تتميز بها هذه القوانين.

بما أن هذه التوزيعات تتبع نوع المتغير فهناك نوعان من التوزيعات الخاصة؛ توزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا متقطعا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المتقطعة وتوزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا مستمرا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المستمرة.

أولا– قوانين التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

من بين أبرز التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الآتي:

I التوزيع الاحتمالي لبرنولي: Distribution de Bernoulli $x \to B(1,p)$

يسمى هذا التوزيع باسم مكتشفه جيمس برنولي في نهاية القرن 17 للميلاد، ويعد توزيعه الأساس لبناء التوزيع الثنائي، وتعرف تجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها أما نجاح وتحدث باحتمال (P) أو الفشل وتحدث باحتمال (q=1−p). أي أن توزيع برنولي يستعمل في التجارب التي تحتمل نتيجتين ممكنتين فقط وهما متنافيتان، مثل نتائج إلقاء قطعة نقد فأن النتيجة قد تكون وجه (F) أو رقم (P)، أو تجربة اختيار مريض من بين الأشخاص الذين كانت عملياتهم ناجحة أو فاشلة.

ويكون المتغير العشوائي (x) يمثل نجاح التجربة أو فشلها، بحيث يأخذ (x=0) إذا فشلت هذه التجربة و(x=1) إذا نجحت. ويمكن وصف هذا التوزيع على الشكل الآتي:

x_i	0	1
p_i	q	p

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا متقطعا يتبع توزيع برنولي، يكون تابع كثافته الاحتمالية معطى بالشكل التالي:

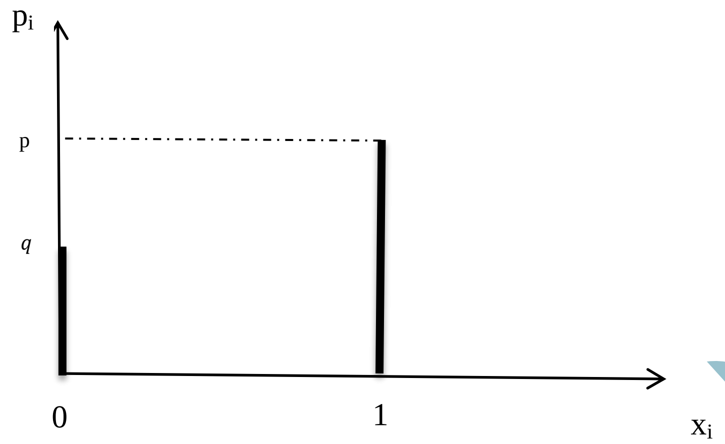
$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} p^X q^{1-X} & , x = 0,1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك}, \end{cases}$$

حيث: p+q=1.

ويتوفر في هذا القانون الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{1} P_i = \sum_{i=0}^{1} p^X q^{1-X} = p + q = 1 \end{cases}$$

ويمثل بيانيا كما يلي:



2. تابع التوزيع: تابع التوزيع لمتغير عشوائي (x) يتبع توزيع برنولي يعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3. المميزات العددية:

أ. التوقع الرياضي: تعطى الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع توزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i . \mathrm{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i . p^X q^{1-X} = \sum_{i=1}^{n} 0\ p^0 q^{1-0} + 1 . p^1 q^{1-1} = P$$

ب. التباين: تعطى الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع توزيع برنولي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) \ - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X) = p$$

و:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i . {\mathrm{x}_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\mathrm{x}_i}^2 . p^X q^{1-X} = \sum_{i=1}^{n} 0^2\ p^0 q^{1-0} + 1^2\ p^1 q^{1-1} = P$$

إذن:

$$V(X) = \ \mathrm{p} - \mathrm{p}^2 = pq$$

مثال 1: أوجد قانون الاحتمالي للتجربة التالية مع تحديد ماذا يمثل (x)، ثم أحسب كل من التوقع الرياضي والتباين، حيث التجربة تقول: احتمال أن يتخرج طالب من جامعة أم البواقي هو 0,6.

الحل: بما أن للطالب حالتين هما إما النجاح أو الفشل، فالمتغير العشوائي (x) يمكن أن يأخذ قيمتين (x=1) وهي تمثل نجاح الطالب (تخرجه) وإما (x=0) وهي فشل الطالب (رسوبه)، ومن هذه المعطيات يمكن تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي وهو الموافق لهذه التجربة كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} (0{,}6)^X (0{,}4)^{1-X} & , x = 0, 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

ويمكن حساب التوقع الرياضي والتباين انطلاقا من العلاقات السابقة، حيث:

$$E(X) = p = 0{,}6$$
$$V(X) = pq = (0{,}6)(0{,}4) = 0{,}24$$

ملاحظة: قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي يعبر على دراسة إحصائية تتم على عينة مشكلة من وحدة واحدة أي: (n=1)، وعليه فإن هذا القانون غير صالح تطبيقيا لأن العينة المشكلة من وحدة واحدة لا تمثل المجتمع فتكون الاستنتاجات خاطئة، ولكن أهمية قانون برنولي هي أهمية نظرية إذ يعتبر هو أساس كل القوانين الاحتمالية الأخرى.

II توزيع ثنائي الحدين: Distribution Binomiale $x \rightarrow B(n,p)$

يمكن تعريف التوزيع الثنائي بأنه عبارة عن جمع لعدد (n) من متغيرات برنولي المستقلة لها نفس فرص التحقق (p متساوية). وهو بذلك يستعمل أساسا في التجربة العشوائية التي لها الخواص التالية:

- تتضمن التجربة (n) من المحاولات؛
- كل محاولة لها نتيجتان متنافيتان هما الفشل أو النجاح؛
- احتمال النجاح (p) ثابت من محاولة لأخرى، وعليه فإن احتمال الفشل هو (q=1−p)؛
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتائج المحاولات الأخرى.

ومن الأمثلة عن هذه التجارب:

- إلقاء قطعة نقد مرات عديدة (n) مرة والمتغير العشوائي يمثل عدد الأوجه أو الصور (F) أو عدد الأرقام (P) الممكن الحصول عليها؛
- اختيار عدد (n) من عناصر (مع الإرجاع) في صندوق به (m_1) عنصر تالف و(m_2) عنصر سليم مع (x) يمثل عدد العناصر السليمة المستخرجة؛
- اختبار الجودة (موافق أو غير موافق للمواصفات)؛
- نتيجة الامتحان نجاح أو رسوب.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: عمليا توزيع ثنائي الحدين يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة، ...) بشرط أن يتم سحب العينة مع الإرجاع.

إن احتمال عدد ما (x) من النجاحات من بين n تجربة برنولية مستقلة يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} & , x \in n, n \neq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك}, \end{cases}$$

حيث: q=1−p.

ويتوفر في هذا التوزيع الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

حيث:

- الشرط الأول محقق لأن:

$$C_n^X \geq 0 \quad et \quad p^X \geq 0 \rightarrow C_n^X \, p^X \, q^{n-X} \geq 0$$

- الشرط الثاني:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, p^X \, q^{n-X}$$

وفق منشور نيوتن الذي يكتب وفق الصيغة التالية:

$$(a+b)^n = C_n^0 \, a^0 \, b^n + C_n^1 \, a^1 \, b^{n-1} + \cdots \ldots \ldots \ldots + C_n^n \, a^n \, b^0$$

$$(a+b)^n = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, a^X \, b^{n-X}$$

وبالتالي فإن تطبيق هذا المنشور على قانون التوزيع الثنائي ليصبح كما يلي:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} = (p+q)^n$$

بما أن: (q+p=1) وبالتالي يصبح الشرط الثاني محقق، أي:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = (p + q)^n = (1)^n = 1$$

2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الثنائي يعرف كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} C_n^X \, p^X \, q^{n-X}$$

حيث: $0 \leq X \leq n$.

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{X=0}^{n-1} C_n^X \, p^X \, q^{n-X} & 0 \leq x \leq n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

3.المميزات العددية: على أساس أن القانون الثنائي هو عبارة عن جمع عدد (n) من متغيرات برنولي يمكن حساب كل من التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathrm{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p} = np$$

ب. التباين: المتغيرات مستقلة وبالتالي:

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(\mathrm{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{pq} = npq$$

مثال 2: صندوق به 5 تفاحات فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة 0,4. **المطلوب:**

- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد التفاح التالف.
- مثل بيانيا تابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع.
- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل: هنا (n=5)، (p=0,4).

بفرض أن (x) متغير عشوائي يمثل عدد التفاح التالف، فإنه يتبع توزيع ثنائي الحدين بمعالم (n=5)، (p=0,4)، أي أن: $X \to B(5,\ 0{,}4)$.

– التوزيع الاحتمالي لعدد التفاح التالف:

إن تابع الكثافة الاحتمالية لعدد التفاح التالف هي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} C_5^X\ 0{,}4^X\ 0{,}6^{n-X} & , x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} , \end{cases}$$

وتابع التوزيع يكون كما يلي:

$$F(x_i) = \sum_{X=0}^{X} C_5^X\ 0{,}4^X\ 0{,}6^{n-X}$$

حيث: $0 \leq X \leq n$.

ويمكن كتابة تابع التوزيع كما يلي:

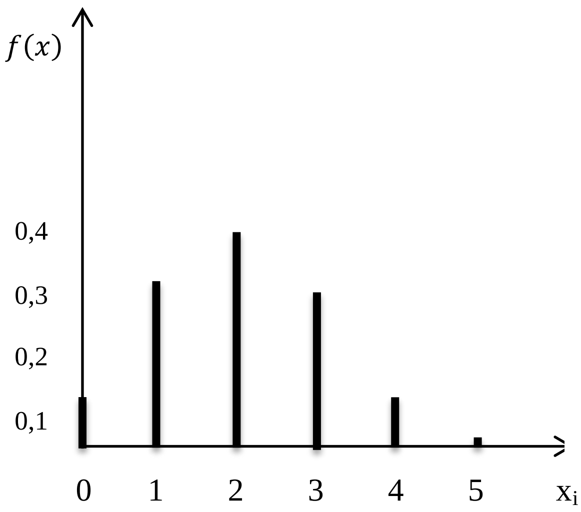
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{X=0}^{n-1} C_5^X\ 0{,}4^X\ 0{,}6^{n-X} & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

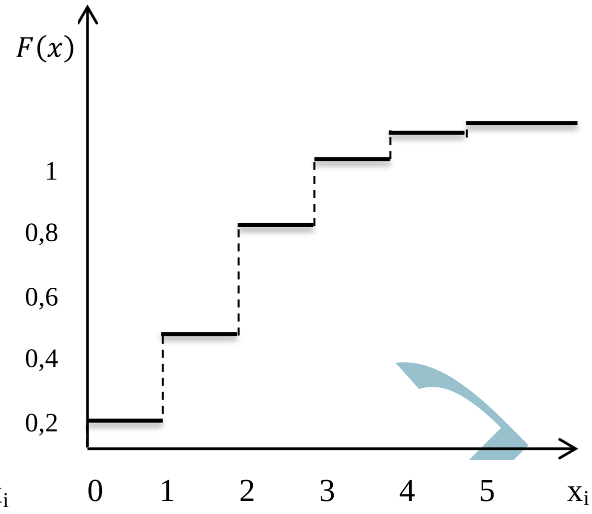
وعلى ذلك فإن:

$f(x)$	$F(x)$
$f(0) = 0{,}0778$ $f(1) = 0{,}25920$ $f(2) = 0{,}34560$ $f(3) = 0{,}23040$ $f(4) = 0{,}07680$ $f(5) = 0{,}0102$	$F(0) = 0{,}0778$ $F(1) = 0{,}3370$ $F(2) = 0{,}6826$ $F(3) = 0{,}9130$ $F(4) = 0{,}9898$ $F(5) = 1$

ملاحظة: يمكن استخراج قيم F(x) عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين.

–التمثيل البياني لتابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع:





- **حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:**

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = np = 5(0,4) = 2$$

- **التباين:**

$$V(X) = npq = 5(0,4)(0,6) = 1,2$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,2} = 1,0954$$

III التوزيع الاحتمالي لبواسون: Distribution de Poisson $x \rightarrow P(\lambda)$

إذا كان التوزيع الثنائي يستعمل لإيجاد احتمال عدد معين من (النجاحات) من بين عدد (n) من المحاولات، فإن توزيع بواسون يستعمل لإيجاد نفس الاحتمال ولكن في فترة زمنية معينة أو في منطقة معينة. إن الوحدة الزمنية قد تكون ثانية أو دقيقة أو ساعة أو أسبوع أو... الخ، أما المكان قد يكون في صفحة من كتاب أو قسم من الأقسام على سبيل المثال.

يسمى هذا القانون باسم مكتشفه عالم الرياضيات الفرنسي سيمون دينيس، ويدعى بتوزيع الحوادث النادرة أو قانون بواسون للأعداد الصغيرة، لذا يمكن استعماله عندما يكون احتمال تحقق حدث ما صغيرا $(P \leq 0,1)$ وخاصة إذا أعيدت التجربة عدد كبير من المرات. وهي الحالة التي يؤول فيها جداء n و p إلى عدد ثابت (λ).

$$\lim_{n\to\infty} np = \lambda$$

إن شروط تطبيق التوزيع الثنائي تبقى سارية المفعول عند استعمال توزيع بواسون:

- تؤول كل محاولة إلى نتيجة واحدة من نتيجتين متنافيتين؛
- إذا افترضنا وجود عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض، فإن حدوث النجاحات في أي فترة مستقلة عن حدوث النجاحات في فترة أخرى؛
- عدد النجاحات في وحدة من الزمن يبقى ثابتا؛
- معدل النجاحات (λ) التي تحدث في فترة زمنية معينة معلوم.

من الأمثلة عن الحالات التي يستخدم فيها توزيع بواسون ما يلي:

- عدد الكوارث أو الوفيات الناجمة عن أمراض نادرة خلال فترة زمنية معينة؛
- عدد السلع التالفة التي ينتجها مصنع ما في فترة معينة؛
- عدد حوادث المرور في طريق معين خلال يوم أو أسبوع؛
- عدد الأخطاء في صفحة من كتاب معين؛
- عدد المكالمات الهاتفية خلال وحدة من الزمن.

1. تابع الكثافة الاحتمالية: إن تابع الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون بمعلمة (λ) يعطى وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{X!} & , x = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots \infty \\ 0 & \text{, ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث: ($\lambda > 0$).

$e=2,718$.

إن المتغير العشوائي (X) يتبع توزيع بواسون $P(\lambda)$ ويتوفر فيه الشرطان الضروريان لكل القوانين الاحتمالية:

$$\begin{cases} P(X = x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

حيث:

-الشرط الأول محقق لأن:

$$\forall\, X \in \aleph, \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{X!} \geq 0$$

-الشرط الثاني:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{X=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{X!} = e^{-\lambda} \sum_{X=0}^{n} \frac{\lambda^{X}}{X!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$$

علما أنه حسب تايلر فإن $\frac{\lambda^{X}}{X!}$ $\sum_{X=0}^{n}$ يمثل مجموع حدود سلسلة لا نهائية تتقارب من e^{λ}:

$$\sum_{X=0}^{n} \frac{\lambda^{X}}{X!} = e^{\lambda}$$

2. تابع التوزيع: تابع التوزيع لتوزيع بواسون يعرف كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} f(X)$$

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=0}^{X} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{X!}$$

حيث: $x \geq 0$.

لا يمكن صياغة هذه الدالة بشكل آخر غير الشكل الموضح أعلاه، والتعامل مع هذه الدالة بهذا الشكل يبدو معقدا بعض الشيء وخصوصا عند حساب $(F(x))$ لقيم كبيرة إلى (x)، غير أنه يمكن الاستعانة بجداول خاصة بهذا التوزيع (أنظر الملحق رقم 2).

3. المميزات العددية: إن الخاصية المميزة لتوزيع بواسون عن بقية التوزيعات الأخرى هي أن التوقع الرياضي له مساو لتباينه ويكون مساويا لقيمة المعلمة (λ) كما سنوضحه في الآتي:

أ. التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{X=0}^{\infty} X \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{X!} = \lambda \sum_{X=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X-1}}{(X-1)!}$$

وحيث أن:

$$\sum_{X=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X-1}}{(X-1)!} = \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{Y}}{Y\,!} = 1 \quad ; \; Y = X - 1$$

فإن:

$$E(X) = \lambda$$

ب.التباين: للحصول على تباين توزيع بواسون نجد أولا التوقع الرياضي لـ:

$$E[X(X-1)] = \sum_{X=0}^{\infty} X\frac{(X-1)e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \lambda^2\sum_{X=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{X-2}}{(X-2)!} = \lambda^2$$

أي أن:

$$E(X^2) - E(X) = \lambda^2$$
$$\rightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

وبذلك نحصل على التباين كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

مثال 3: يتلقى مركز الحجز في شركة الخطوط الجوية الجزائرية في المتوسط 300 مكالمة هاتفية خلال ساعة. **المطلوب:**

- أي قانون احتمالي سيتبعه المتغير العشوائي (x) الذي يعبر عن عدد المكالمات ولماذا؟
- ما هو احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ما يلي:
  - ثلاث مكالمات؛
  - على الأكثر مكالمتين.

<u>**الحل:**</u> من خلال المعطيات المتوفرة (عدد المكالمات خلال ساعة) فإننا سنعتمد على توزيع بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر في الفترات الزمنية المحددة.

ويكتب قانونه كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} & , x = 0,1,2,3 \ldots\ldots\ldots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

(λ=300) خلال فترة ساعة.

-حساب احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ثلاث مكالمات:

$$300 \quad \rightarrow \quad 60\ \text{min}$$
$$\lambda \quad \rightarrow \quad 02\ \text{min}$$
$$\lambda = \frac{600}{60} = 10$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{e^{-10}\,10^3}{3!} = 0,0076$$

كما يمكن حساب قيمة الاحتمال باستعمال جدول خاص بتوزيع بواسون كما يبين الجدول التالي:

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579

القيم المعطاة في الجدول تبين قيم تابع التوزيع F(x)، وعليه:

$$f(3) = P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0,0103 - 0,0028 = 0,0076$$

-حساب احتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين على الأكثر مكالمتين:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \le 2) = \frac{e^{-10}\,10^0}{0!} + \frac{e^{-10}\,10^1}{1!} + \frac{e^{-10}\,10^2}{2!} = 0,0028$$

كما يمكن حساب قيمة الاحتمال باستعمال الجدول الخاص بتوزيع بواسون المبين سابقا، حيث:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \le 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$P(X \le 2) = F(0) + F(1) - F(0) + F(2) - F(1) = F(2) = 0,0028$$

مثال 4: يمثل المتغير العشوائي (x) عدد الإصابات بمرض مهني نادر (P=0,5%) في مجتمع مؤلف من 3000 شخص. **المطلوب:**

- ما احتمال أن يصاب 10 أشخاص بهذا المرض؟.

الحل: من خلال المعطيات المتوفرة (مرض نادر في مجتمع معين) فإننا سنعتمد على توزيع بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر النادرة في فترات زمنية أو أماكن محددة. يكتب قانونه كما يلي:

$$f(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{X!} & , x = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك ,} \end{cases}$$

حيث:

$$\lambda = np = 3000(0,005) = 15$$

-احتمال أن يصاب 10 أشخاص بهذا المرض:

$$f(10) = P(X = 10) = \frac{e^{-15}\,15^{10}}{10!} = 0,0486$$

ثانيا - التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

ا. التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس: D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية كون معظم الظواهر تتبع هذا القانون أو تؤول إليه إذا توفرت شروط معينة. يوجد هذا التوزيع تحت صيغتين مختلفتين:

1. التوزيع الطبيعي العام: $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

1.1. تابع الكثافة الاحتمالية: إذا كان (x) متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ) وانحراف معياري (σ) فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي (x) تعطى بالعلاقة :

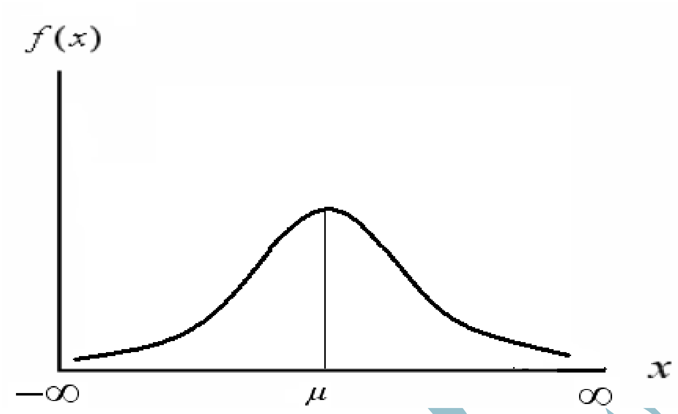
$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad X \in \mathrm{R}$$

حيث: μ و σ ثابتان.

π هو مقدار ثابت $(\pi = 3,1416)$.

2.1. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري: كما نلاحظ من خلال الشكل أدناه منحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي للتوزيع، ويأخذ الشكل الجرسي وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقي شيئا فشيئا دون أن يتماسا مع هذا المحور. وإذا أسقطنا عمودا من قمة المنحنى على المحور الأفقي فإن هذا العمود يعتبر محورا للتماثل لأنه يقسم المساحة تحتي المنحنى إلى قسمين متساويين تماما وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة

كل قسم تساوى 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية.



3.1. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الطبيعي العام تأخذ الشكل التالي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

حيث: f(x) يأخذ الصيغة السابقة.

لحساب F(x) يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x_i)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لتابع الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة تابع الكثافة الاحتمالية.

4.1. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي:** الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (x) يتبع التوزيع الطبيعي العام هي:

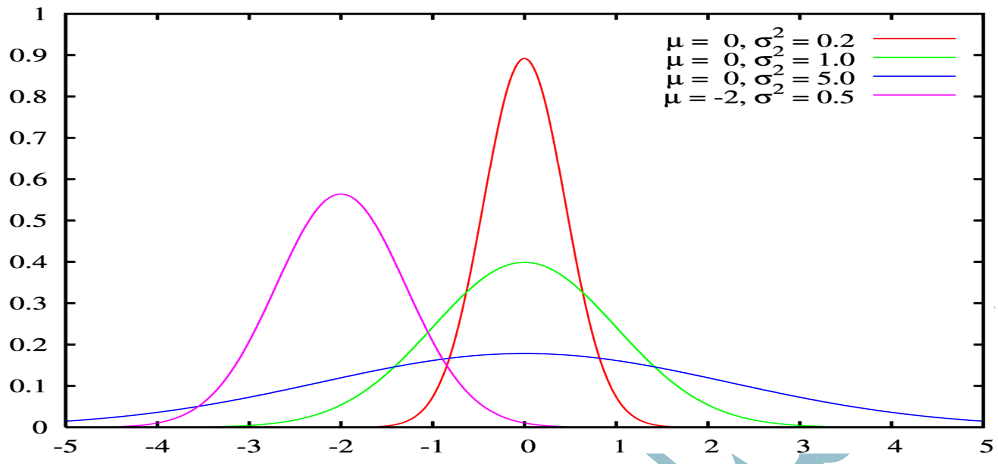
$$E(X) = \mu$$

ب. **التباين:** الصيغة الرياضية للتباين لمتغير (x) يتبع التوزيع الطبيعي العام هي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$V(X) = \sigma^2$$

ملاحظة: التوزيع الطبيعي ليس توزيعاً وحيدا ولكنه يمثل عائلة من التوزيعات الطبيعية، وكل توزيع من هذه العائلة يمكن تحديده وتعريفه بدقة متى عرفت معالمه وهى المتوسط ويرمز له بالرمز μ، والانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ، حيث تحدد قيمتي هاتين المعلمتين شكل منحنى التوزيع، حيث تحدد قيمة

المتوسط μ موقع التوزيع على المحور الأفقي من نقطة الأصل، كما تحدد قيمة الانحراف المعياري مدى تشتت التوزيع فكلما كانت σ كبيرة كلما زاد تشتت القيم وبالتالي اتساع المنحنى.



وبالتالي لا يمكن إعداد جداول لكل قيم σ وμ (عدد غير منتهي من الجداول). ولتجاوز هذه المشكلة تم استعمال تحويل بسيط للمتغير العشوائي بحيث نحصل على $(\mu = 0)$ و $(\sigma = 1)$ ويعتبر هذا التوزيع $\mathcal{N}(0,1)$ كمعيار يسمح باستعمال جدول موحد كما نوضح في ما يلي.

2. التوزيع الطبيعي المعياري: $Z \to \mathcal{N}(0,1)$

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ) وانحراف معياري (σ)فإن (Z) تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

وتسمى (Z) بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهى تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري (أنظر الملحق رقم 3).

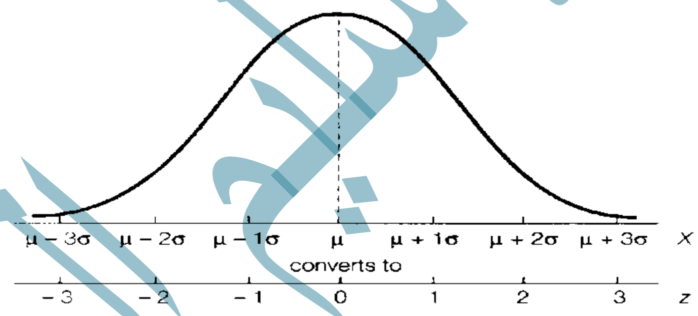
1.2. تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري: دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي (Z) تأخذ الشكل التالي:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}Z^2} , \qquad Z \in \mathrm{R}$$

2.2. خصائص المنحنى الطبيعي المعياري:

- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودي الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوى 0,5.
- منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه، والتوائه يساوى 0 وتفرطحه يساوى 3.
- المساحة المحصورة بين ±1 درجة معيارية تساوى 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. والمساحة المحصورة بين 2 ± درجة معيارية تساوى 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. أما المساحة المحصورة بين 3 ± درجات معيارية تساوى 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كما يلي:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}6826$$
$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 0{,}9544$$
$$P(-3 \leq Z < \leq) = 0{,}9974$$

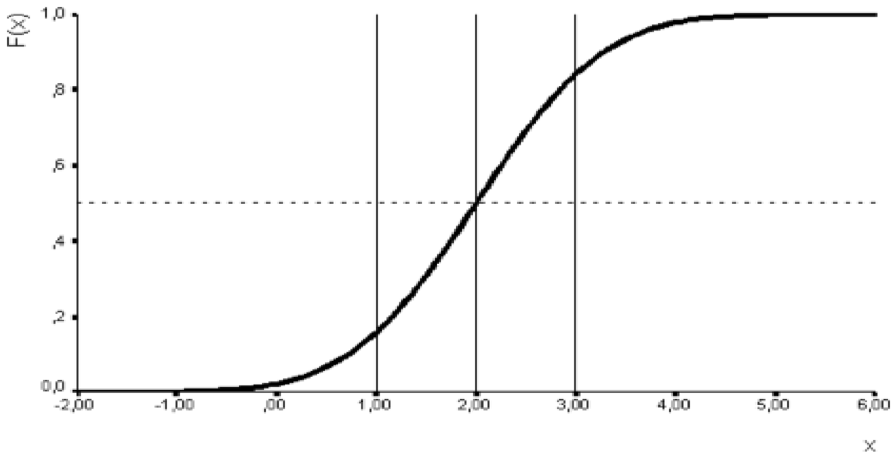


3.2. تابع التوزيع: تابع التوزيع للتوزيع الطبيعي المعياري تأخذ الشكل التالي:

$$F(z_i) = P(Z \leq z_i) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

حيث: f(z) يأخذ الصيغة السابقة.

ويمثل تابع التوزيع بيانيا كما يلي:



4.2. المميزات العددية:

أ. **التوقع الرياضي:** تستخرج الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$E(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(x)-\mu] = 0$$

ب. **التباين:** تستخرج الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$V(Z) = \mathrm{V}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(x-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}[V(x)] = \frac{1}{\sigma^2}[\sigma^2] = 1$$

مثال 5: إذا علمت أن فترة حياة جهاز آلي يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط $(\mu = 10)$ سنوات وانحراف معياري $(\sigma = 2)$ سنوات. **المطلوب:**

- ما احتمال أن يصل عمر الجهاز 15 سنة؟
- ما احتمال ان تكون مدة حياة هذا الجهاز ما بين 12 و15 سنة؟
- ما احتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز ما بين 5 و8 سنوات؟

<u>**الحل:**</u>

- **احتمال أن يصل عمر الجهاز 15 سنة:**

$$P(X \le 15) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{15-10}{2}\right)$$

$$P(X \le 15) = P(Z \le 2{,}5)$$

بعدها نقوم باستخراج قيمة الاحتمال المناظر لـ $(Z \le 2{,}5)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وفق ما يبينه الجدول التالي:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964

إذن:

$$P(X \leq 15) = P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

- **احتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 12 و15 سنة:**

$$P(12 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{12-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{12-10}{2} \leq Z \leq \frac{15-10}{2}\right)$$
$$P(12 \leq X \leq 15) = P(1 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq 1)$$

$$P(12 \leq X \leq 15) = 0{,}9938 - 0{,}8413 = 0{,}1525$$

- **احتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 5 و8 سنوات:**

$$P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5-10}{2} \leq Z \leq \frac{8-10}{2}\right)$$
$$P(5 \leq X \leq 8) = P(-2{,}5 \leq Z \leq -1) = [1 - P(Z \leq 1)] - [1 - P(Z \leq 2{,}5)]$$
$$P(12 \leq X \leq 15) = [1 - 0{,}8413] - [1 - 0{,}9938] = 0{,}1587 - 0{,}0062$$
$$= 0{,}1525$$

ملاحظة: في حالة كون قيمة (z) سالبة فإنها تحسب بواسطة علاقة التناظر، أي بواسطة احتمالات القيم الموجبة. ولفهم أكثر لكيفية استعمال الجدول في كل الحالات الممكنة نستعين بالعلاقات الرياضية التالية:

$$P(Z = z) = 0$$
$$P(Z \leq z) = P(Z < z)$$
$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$
$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$
$$P(Z > -z) = 1 - P(Z < -z) = (Z < z)$$