الفصل الثاني

الاحتمالات

أولا – فضاء العينة والحوادث

1. فضاء العينة: في الكثير من الأحيان نصادف أو نقوم بالعديد من التجارب في حياتنا اليومية ونحصل على ملاحظات أو نتائج. فكل تجربة يمكن معرفة نتائجها مسبقا من خلال القوانين أو المسلمات كما في العلوم التقنية تسمى بالتجربة النظامية، أما التجربة التي يمكن معرفة جميع نتائجها الممكنة ولكن من غير ممكن معرفة ترتيب حدوث هذه النتائج مسبقا فتسمى بالتجربة العشوائية، هذه النتائج المحتملة للتجربة تعرف بفضاء العينة ويرمز لها بالرمز Ω.

مثال1: إن رمي زهرة نرد تسمى بتجربة عشوائية، لأن جميع نتائجها هي ظهور أحد الأوجه الستة التي تحمل الأرقام 1،2،3،4،5،6 ولا يمكن لأحد أن يعرف قبل رمي زهرة النرد أي الأوجه سيظهر.

عند رمي حجرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال 2: فضاء المعاينة لرمي قطعة نقود هو: $\Omega=\{P,F\}$.

حيث: P= تمثل ظهور القيمة.

F= تمثل ظهور الشعار (الصورة).

مثال3: أوجد فضاء المعاينة وعدد عناصره عند رمي زهرتي نرد متاليتين؟

يمكن الحصول على فضاء المعاينة على الشكل التالي:

الرمية الثانية						
6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
	1	2	3	4	5	6

الرمية الأولى

ويكون فضاء المعاينة هو:

$$\Omega=\{(1.1),(1.2),(1.3),(1.4).....(2.1),(2.2)....(6.3),(6.4),(6.5),(6.6)\}$$

أما عدد عناصر هذا الفضاء فهو: n=36.

2. **الحدث:** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة يتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة ونرمز له بالحروف اللاتينية ....A, B, C، وينقسم إلى عدة أنواع:

1.2 الحادث البسيط: يسمى أيضا بالحادث الأولي أو الحادث الابتدائي، وهو الحدث غير قابل للتجزئة؛ أي هو بمثابة مجموعة جزئية من فراغ إمكانيات التجربة ذات أمكانية وحيدة، مثلا نقول أن حدث ظهور العدد 3 على وجه حجرة النرد هو بمثابة حدث بسيط، إذ أنه غير قابل للتجزئة إلى حوادث أبسط.

2.2 الحادث المركب: هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث حوادث بسيطة، مثلا نقول أن حدث ظهور رقم فردي عند رمي حجرة نرد هو حدث مركب لأنه يتكون من عدة حوادث بسيطة، حيث:

إذا كان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي فإن :

$$A = \{1, 3, 5\}$$

نقول أن A هو حدث مركب يحتوي على ثلاث عناصر من فضاء المعاينة.

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

3.2 الحادث الأكيد: نقول عن الحادث A أنه حادث أكيد إذا كان تحققه مؤكدا نتيجة التجربة، وبالتالي فهو حادث يحتوي جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة. مثلا نقول أن A حدث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي حجرة نرد هو حدث أكيد، حيث:

$$A=\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

4.2 الحادث المستحيل: نقول عن حادث ما أنه حادث مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق مهما أعدنا التجربة. فمثلا الحادث A الذي يمثل الحصول على رقم فردي وزجي في آن واحد عند رمي حجرة نرد هو حادث مستحيل، ونرمز له بالرمز $A=\emptyset$.

5.2 الحوادث غير المتنافية والمتنافية

1.5.2 الحوادث المتنافية: هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر، أي أن تقاطع الحادثين المتنافيين A وB هو مجموعة خالية $A\cap B=\emptyset$.

2.5.2 الحوادث غير المتنافية: هي الحوادث التي يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها لا ينفي وقوع الآخر، أي أن تقاطع الحادثين غير المتنافيين A وB ليس مجموعة خالية $A\cap B\neq\emptyset$.

مثال 4: عند رمي حجرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

نفترض أن الحادث A يمثل ظهور رقم زوجي، وأن الحادث B يمثل ظهور رقم فردي، الحادث C يمثل ظهور رقم أولي.

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5\} \qquad C = \{2, 3, 5\}$$

الحدثين A وC هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي في نفس الوقت وبالتالي يكون: A∩C={2}.

الحدثين A وB هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد زوجي وفردي في نفس الوقت وبالتالي يكون: A∩B={Ø}.

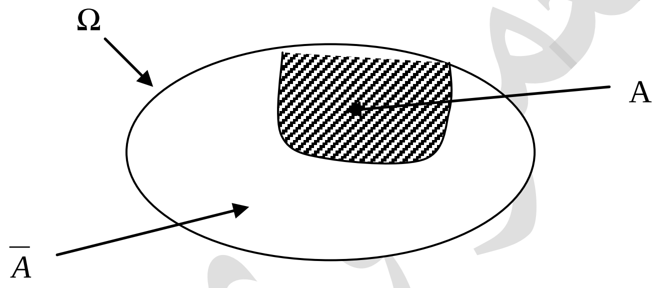
6.2 الحوادث المستقلة وغير المستقلة والشرطية

1.6.2 الحوادث المستقلة: تكون الحوادث مستقلة عندما يكون وقوع أحدها لا يؤثر ويتأثر بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة.

2.6.2 الحوادث غير المستقلة: إذا كان وقوع حادث ما يؤثر في وقوع حادث آخر فنكون بصدد حوادث غير مستقلة. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة به n كرة، هي حوادث غير مستقلة لأن السحبة الأولى أو الثانية تؤثر على السحبات الموالية لها.

3.6.2 الحوادث الشرطية: إذا كان حدث ما مرتبط بتحقق أو عدم تحقق حدوث حادث آخر، نقول عن هذا الأخير أنه حادث شرطي.

7.2 الحادث المتمم: إذا كان الحدث A ينتمي إلى فضاء المعاينة (Ω) فإن الحدث المكمل له ويرمز بالرمز $\overline{A}$ يتكون من عناصر فضاء المعاينة (Ω) غير الموجودة في الحادث A كما يظهر في الشكل التالي:



مثال 5: عند رمي زهرة النرد وكان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي $A = \{1.3.5\}$.

إن $\overline{A}$ (الحادث المتمم) يمثل ظهور رقم زوجي:

$$\overline{A} = \{2.4.6\}$$

ومنه:

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$A \cap \overline{A} = \Phi$$

8.2 الحوادث الملائمة والممكنة

عند قيامنا بتجربة ما فإننا نرجو حدوث حادث معين، وهذا الأخير (الحادث المرغوب) يسمى بالحادث الملائم. ففي حالة رمي قطعة نقود فإن ظهور الصورة يعتبر حالة ملائمة إذا كان اهتمامنا هو

ظهور الصورة، وفي حالة رمي حجرة نرد فإن ظهور الأوجه التي تحمل الأرقام 2 أو 4 أو 6 تعتبر حالات ملائمة إذا كان اهتمامنا بحادثة ظهور رقم زوجي عند إلقاء حجرة النرد.

ثانيا – الاحتمال ومداخله

1. معنى كلمة احتمال

كثيرا ما نستخدم كلمة احتمال في حياتنا اليومية وذلك إما:

- بصورة صريحة؛ كأن نقول "من المحتمل جدا أن يسقط المطر هذا اليوم".
- بصورة ضمنية: كأن نقول "إن إمكانية فوز الفريق X بالبطولة ضعيفة جدا".

إلا أن هذا الكلام لا يتعدى تقديرات عامة وشاملة وغير دقيقة إذا كانت نظرتنا للأمور نظرة علمية فيما يخص تحقق حادث ما. وهذا ما جعل الإحصائيين لا يرضون بالإكتفاء بالتعبير عن الاحتمال بالعبارة كبير أو صغير، بل يرون ضرورة قياسه رقميا بقيمة عددية لإضفاء طابع الدقة عليه من جهة والوقوف على أهميته من حيث الكبر أو الصغر من جهة أخرى.

يقاس الاحتمال بقياس نهايته الصغرى هي الصفر والتي تعكس الاستحالة المطلقة لتحقيق الحادث ونهايته العليا هي الواحد والتي تعكس الحقيقة المطلقة لتحقيق الحادث، وبالتالي فإن القيمة العددية للاحتمال هي عبارة عن كسر يقع بين الصفر والواحد.

2. مداخل تعريف الاحتمال

من أجل تعريف الاحتمال يتم اعتماد مدخل محدد من المداخل المعروفة في هذه النظرية ومنها:

2.2 المدخل التقليدي: وفق هذا المدخل يمكن تقدير مقدار الاحتمال بصفة مؤكدة من طبيعة أو اعتبارات الحادثة دون الحاجة إلى إجراء التجربة.

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة (متساوية الفرصة) في الظهور، وكان فضاء المعاينة لها Ω يحتوي على عدد من العناصر N وكان لدينا حادث A تحتوي على n من العناصر المتماثلة، فإن الاحتمال الكلاسيكي للحادث A ويرمز له بالرمز P(A) يحسب كالتالي:

$$\text{احتمال } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \qquad P(A) = \frac{n}{N}$$

وإذا اعتمدنا مفهوم أصلي المجموعات فإن احتمال تحقق الحادث A هو عبارة عن ناتج قسمة عدد عناصر المجموعة الجزئية A على المجموعة الكلية Ω، ويعبر عن ذلك بما يلي:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

مثال 6: إذا رميت حجرة نرد عشوائيا، أحسب احتمال ظهور رقم فردي واحتمال ظهور رقم زوجي؟.

<u>الحل:</u>

فراغ المعاينة $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$N = 6$

فإذا كانت A تشير إلى حدوث ظهور رقم فردي وB تشير إلى حادث ظهور رقم زوجي فإن:

$$A = \{1,3,5\}, n(A) = 3$$
$$B = \{2,4,6\}, n(B) = 3$$

وبالتالي:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$
$$P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$$

1.2.2 خواص الاحتمال التقليدي: تتمثل خواص الاحتمال في:

-الاحتمال قيمة عددية موجبة دوما، أي: $P(A) \geq 0$.

-قيمة احتمال الحادث A محصورة في المجال: $0 \leq P(A) \leq 1$.

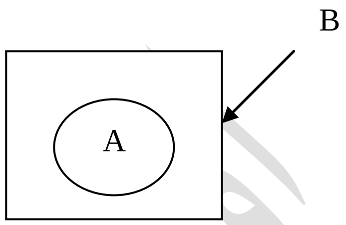
-احتمال الحادث والحادث المتمم هو احتمال الحادث الأكيد، أي:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

ومنه:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

- إذا كان الحادث A ينتمي إلى الحدث B، أي أن: $(A \subset B)$.



فإن:

$$P(A) < P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(B)$$

2.2.2 حدود وقصور المدخل التقليدي: من أجل اعتماد المدخل التقليدي لتعريف الاحتمال يجب أن يتوفر الشرطين الآتيين:

- أن يكون عدد الإمكانيات منته؛
- يجب أن تكون الحوادث متكافئة الاحتمال (لها نفس الفرصة) من حيث الحدوث.

3.2 المدخل الإحصائي: عيب التعريف التقليدي للاحتمال أنه مبني على تساوي الفرص في الظهور لكل نتيجة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ذات عدد الإمكانيات المنتهي. لذا فالاحتمال وفق

المدخل الإحصائي أو المدخل التجريبي (التاريخي، التكراري) يعتمد على إجراء التجارب وتسجيل المشاهدات عن الظواهر محل الدراسة ومن ثم استنتاج الاحتمال المقابل لذلك.

احتمال حدوث حادثة ما وفق هذا المدخل يسمى بالاحتمال التجريبي (النسبي) وهو مبني على فكرة التكرار النسبي، فإذا ما كررنا تجربة عشوائية (N) من المرات وكان عدد كرات ظهور الحادثة A هو n فإن الاحتمال P(A) يعطي بالعلاقة:

$$P(A) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{n}{\mathrm{N}}$$

هذا المدخل له نفس الخواص التي تم إيجادها عند المدخل التقليدي شريطة تحقق الشرطين الرئيسيين التاليين:

- إجراء التجارب في نفس الظروف (من حيث الزمان و/ أو المكان)؛
- إجراء عدد كبير من التجارب؛ فالتجارب القليلة قد تتعرض لاضطرابات ناتجة عن الصدفة.

مثال 7: إذا رميت قطعة عملة عشوائيا 10000 مرة، وكانت الأحداث F و P تشير إلى ظهور الصورة والكتابة على الترتيب، وكانت نتيجة القذف 5601 مرة ظهور الصورة و 4399 مرة ظهور الكتابة، أوجد احتمال ظهور الصورة P(F) واحتمال ظهور الكتابة P(P)؟

<u>الحل:</u>

احتمال ظهور الصورة = $P(F) = \frac{5601}{10000} = 0.5601$

احتمال ظهور الكتابة = $P(P) = \frac{4399}{10000} = 0.4399$

مثال 8: إذا بلغ عدد طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتسيير في سنة 2006، 4500 طالب مقسمين إلى 3000 طالب في قسم التسيير و 1500 طالب في قسم الاقتصاد، وطلب منا اختيار طالب واحد عشوائيا لتمثيل طلبة الكلية في إحدى المسابقات، ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب من قسم الاقتصاد وما هو احتمال أن يكون من قسم التسيير؟

<u>الحل:</u>

احتمال أن يكون الطالب من قسم الاقتصاد = $P(E) = \frac{1500}{4500} = \frac{1}{3}$

احتمال أن يكون الطالب من قسم التسيير = $P(G) = \frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}$

1.3.2 حدود وقصور المدخل الإحصائي: إن التردد النسبي الذي بني عليه التعريف الإحصائي للاحتمالات يعطي في الحقيقة قيمة تقريبية للاحتمال وذلك للأسباب التالية:

- لا يمكننا إحصائيا أن نصل إلى نهاية النسبة $\frac{n}{N}$، وذلك عندما تسعى N إلى اللانهاية، إذ أن الرقم الذي يمثل اللانهاية غير محدد رياضيا.
- في بعض الظواهر لا يمكن تحقيق عدد كبير من التجارب نظرا لطبيعة الظاهرة محل الدراسة لعدة أسباب، منها:
  - إجراء التجارب يؤدي إلى إتلاف الوحدة؛
  - إجراء التجربة مكلف ويتطلب وقتا كبيرا للحصول على النتيجة؛
  - الظاهرة خاضعة للمشاهدة لا التجربة مثل (الزلازل، حوادث السيارات، التسرب المدرسي).
- لا يوجد ما يضمن توفر نفس الشروط عند إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات.

3.2 المدخل الذاتي: في بعض الأحيان لا يمكننا إطلاقا اعتماد المدخل التقليدي ولا المدخل الإحصائي لإعطاء احتمال حول ظاهرة ما، وذلك إما لكون نتائج التجربة غير متساوية وإما لعدم توفر بيانات التكرار النسبي، وعندها لا يبق لنا إلا التقدير الذاتي الذي يرتكز على ثلاث عناصر أساسية ترتبط بالإنسان ذاته (الاعتقاد الشخصي، التجربة الشخصية، الحدس الشخصي).

ثالثا – قواعد حساب الاحتمالات

تنقسم العمليات على الاحتمالات إلى عمليات أو قواعد الجمع التي تكون في الحوادث المتنافية وغير المتنافية، وعمليات الضرب التي تستخدم في الحوادث المستقلة وغير المستقلة والمتمثلة في:

1. قاعدة جمع الحوادث المتنافية

نقول أن الحدثين A وB متنافيين إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية: نقول أن الحدثين A وB غير متنافيين إذا كان وقوع الحادث A لا يمنع وقوع الحادث B والعكس صحيح. وبالتالي يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نقوم بطرح الاحتمال $P(A \cap B)$ لكي نتجنب حسابه مرتين، لأنه في الأصل ضمن الاحتمال P(A) و P(B).

مثال 9: خلال دراسة لمدى انتشار ظاهرة التدخين في وسط التلاميذ وانعكاسها السلبية على نتائجهم الدراسية تم تسجيل الجدول المزدوج التالي، والذي يوضح تقسيم 100 تلميذا في إحدى المدن بين مراحل التعليم الثلاث (ابتدائي، متوسط، ثانوي) وظاهرة التدخين (يدخن، لا يدخن).

مرحلة التعليم / التدخين	ابتدائي	متوسط	ثانوي	المجموع
يدخن	2	25	43	70
لا يدخن	8	15	7	30
المجموع	10	40	50	100

المطلوب:

1) ما هو احتمال وجود تلميذ في المرحلتين الابتدائية أو المتوسطة؟.

2) ما هو احتمال أن نختار تلميذا من المرحلة المتوسطة أو ليس مدخنا؟.

الحل:

1) احتمال وجود تلميذ في المرحلة الابتدائية أو المتوسطة تمثل احتمال حدثين متنافيين وبالتالي إذا كان:

A_1 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة الابتدائية.

A_2 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة المتوسطة. فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{10}{100} + \frac{40}{100} = \frac{50}{100} = 0.5$$

2) احتمال أن يكون التلميذ من المرحلة المتوسطة أو ليس مدخنا يمثل احتمال حدثين غير متنافيين، فإذا كان:

A_2 يمثل حدث انتماء تلميذ للمرحلة المتوسطة.

B_2 يمثل حدث أن التلميذ ليس مدخنا. فإن:

$$P(A_2 \cup B_2) = P(A_2) + P(B_2) - P(A_2 \cap B_2) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

3. قاعدة ضرب الحوادث المستقلة

نقول أن الحدثين A و B مستقلين إذا كان وقوع الحادث A لا يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A غير مرتبط بوقوع الحادث B. وبالتالي يكون:

$$P(A,B) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال 10: نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة، لأن نتائج رمي قطعة النقود في المرة الأولى لا تؤثر على نتائج الرمية الثانية. فإذا رمزنا لحادث ظهور صورة النقود الأولى بـ A وصورة النقود الثانية بـ B فإن احتمال ظهور الصورة في الرمية الأولى والثانية هو:

$$P(A,B) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

4. قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة

نقول أن الحدثين A وB غير مستقلين إذا كان وقوع الحادث A يؤثر على وقوع الحادث B أو وقوع الحادث A مرتبط بوقوع الحادث B. وبالتالي يكون:

$$P(A,B) = P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

تقرأ: احتمال وقوع الحدثين A وB يساوي احتمال وقوع الحادث A مضروب في احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق.

ومنه يمكن استنتاج قانون الاحتمال الشرطي الذي يرمز له بالرمز $P(B/A)$ كما يلي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال 11: لدينا صندوق به 5 كرات بيضاء و3 كرات سوداء. المطلوب:

1) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى؟.

2) ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى.

<u>الحل:</u>

نفترض أن: الحدث A يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الأولى.

الحدث B يمثل سحب كرة بيضاء في المرة الثانية.

ومنه فإن احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الأولى.

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية إذا لم نقم برد الكرة المسحوبة في المرة الأولى هو:

$$P(B/A) = \frac{4}{7}$$

وعليه فإن احتمال سحب كرتين بيضاويتين في سحبتين متتاليين هو:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

رابعا – الاحتمال الكلي

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما A مرتبط بتجربة ما، لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية: B1, B2, B3,…Bn، والتي تشكل تجزيئا لمجموعة كلية Ω. وهذه الأخيرة تتحقق إذا تحققت الشروط الآتية:

الشرط الأول: لا يمكن أن يكون الاحتمال سالبا:

$$\forall i\,;P(Bi) \geq 0$$

الشرط الثاني: الحوادث Bi متنافية مثنى مثنى:

$$\forall i,j\ /i \neq j\,;(Bi \cap Bj) = \emptyset$$

الشرط الثالث: إتحاد الحوادث Bi يعطينا المجموعة الكلية:

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

تحقق هذه الشروط مجتمعة يعطينا ما يسمى بالمنظومة التامة للحوادث. ويعبر عن الاحتمال الكلي بالصيغة الآتية:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$

خامسا – دستور بايز bayes

في القرن الثامن عشر توصل عالم الرياضيات البريطاني توماس بايز Thomas Bayes إلى صياغة جديدة للاحتمال الشرطي، وتعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة وتعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية ومرافقة لحادث A.

لنفترض أنه لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية: B1, B2, B3,…Bn والتي تشكل تجزيئا لمجوعة كليةΩ و A حادث ما يمكن أن يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث:B1, B2, B3,…Bn ونريد حساب الاحتمالات الشرطية: P(Bi/A) لكل من تلك الحوادث، علما بأن الاحتمالات P(Bi) معلومة.

لدينا حسب قانون احتمال تقاطع الحوادث غير المستقلة:

$$P(A \cap Bi) = P(A).P(Bi/A) = P(Bi).P(A/Bi)$$

أي:

$$P(A).P(Bi/A) = P(Bi).P(A/Bi)$$

ولنقسم طرفي المعادلة على P(A)، علما أن (P(A)>0) فنجد:

$$P(Bi/A) = \frac{P(Bi).P(A/Bi)}{P(A)}$$

وبما أن الحوادث B1, B2, B3,…Bn تحقق شروط الاحتمال الكلي (تشكل منظومة تامة للحوادث)، و A حادث غير مستحيل الحدوث فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$

وبعويض قيمة P(A) بما يقابلها في صيغة الاحتمال الكلي نجد أن:

$$\boxed{P(Bi / A) = \frac{P(Bi).P(A/Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)}}$$

وتدعى هذه الأخيرة الناتجة بنظرية أو دستور بايز.

مثال 12: في مصنع لإنتاج نوع معين من المصبرات نجد أن:

- الآلة الأولى تنتج 40% من المنتج مع العلم أن 1.5% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثانية تنتج 25% من المنتج مع العلم أن 1.2% من إنتاجها معيب.
- الآلة الثالثة تنتج 35% من المنتج مع العلم أن 2% من إنتاجها معيب.

فإذا اخترنا وحدة من الإنتاج اليومي بشكل عشوائي أحسب الاحتمالات التالية:

1) احتمال أن تكون الوحدة معيبة؟

2) إذا كانت الوحدة المسحوبة معيبة فما هو احتمال:

أ) أن تكون من إنتاج الآلة الأولى (B_1).

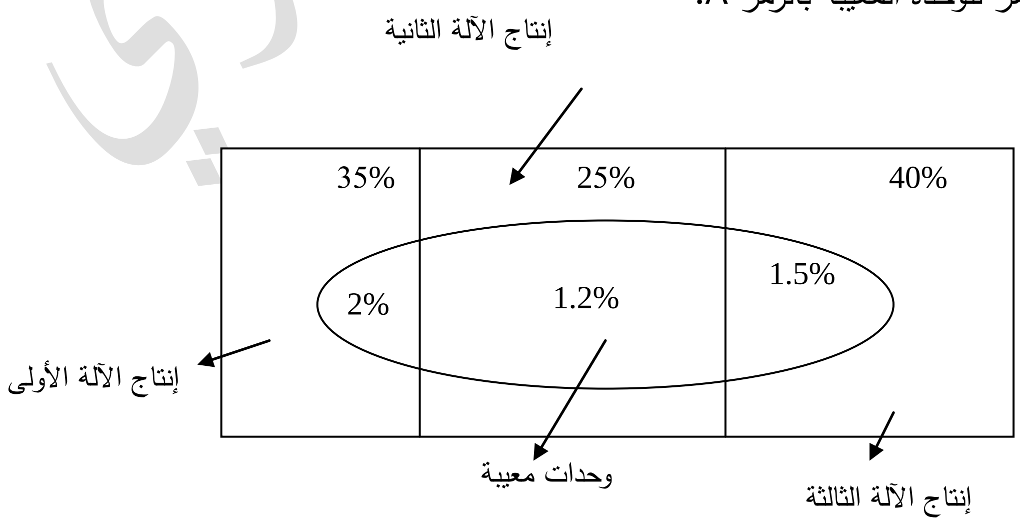
ب) أن تكون من إنتاج الآلة الثانية (B_2).

ج) أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة (B_3).

<u>الحل:</u>

- احتمال أن تكون الوحدة معيبة يمثل وقوع حادث لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية B1, B2, B3، والتي تشكل تجزيئا لمجموعة كلية Ω.

نرمز للوحدة المعيبة بالرمز A.



$$P(B_1) = 0.4$$
$$P(B_2) = 0.25$$
$$P(B_3) = 0.35$$
$$P(A/B_1) = 0.015$$
$$P(A/B_2) = 0.012$$
$$P(A/B_3) = 0.02$$
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$
$$= 0.4\times 0.015 + 0.25\times 0.012 + 0.35\times 0.02 = 0.016$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الأولى بشرط أن تكون معيبة $P(B_1/A)$.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0.4\times 0.015}{0.016} = 0.375$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثانية بشرط تكون معيبة $P(B_2/A)$.

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2).P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.25\times 0.012}{0.016} = 0.1875$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثالثة بشرط تكون معيبة $P(B_3/A)$.

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3).P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{0.35\times 0.02}{0.016} = 0.4375$$

قائمة المراجع المعتمدة:

1. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات –التحليل التوافقي والمبادئ الاحتمالية، ج 3، دار البعث، دون سنة نشر.
2. موساوي عبد النور، يوسف بركان، الإحصاء 2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010.
3. بوبلوطة بلال، مطبوعة بعنوان: نظريات وتمارين محلولة في الاحتمالات، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
4. سيمون ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر 2003.
5. موسي عبد الناصر، مطبوعة بعنوان: دروس في الإحصاء الوصفي، جامعة بسكرة، الجزائر، 2007/2006.
6. ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مطبوعة بعنوان: ملخص الإحصاء 2، جامعة سطيف 1، الجزائر، 2015/2014.