Notation :

Dans le but de simplifier l'écriture des équations, nous désignons les éléments de réduction au point G, du torseur des efforts de cohésion dans la poutre exercés par le tronçon (E_2) sur le tronçon (E_1), par $\vec{R}$ et $\vec{m}_G$.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix}_G = -\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E_1) \\ \\ \vec{m}_G(\overline{E} \to E_1) \end{Bmatrix}_G \qquad (1)$$

Remarque

- Les éléments de réduction en G du torseur $\{\mathcal{T}_{coh}\}$ sont des fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de la section (S).
- Comme la poutre (E) est en équilibre par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, alors $\{\mathcal{T}(\overline{E} \to E)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} = \{\vec{0}\}$

  Par conséquent, les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion pourront être également exprimés comme suit :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix}_G = +\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E_2) \\ \\ \vec{m}_G(\overline{E} \to E_2) \end{Bmatrix}_G \qquad (2)$$

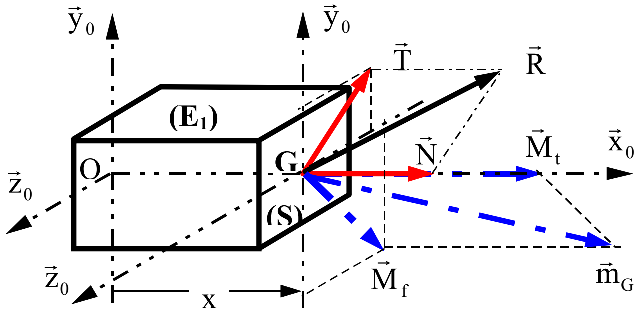
  Pour effectuer les calculs pratiques de $\vec{R}$ et $\vec{m}_G$ on pourra utiliser, soit la relation donnée par (1), soit la relation donnée par (2). Le choix dépendra uniquement de la difficulté de leur expression.

IV.2. Composantes des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion

IV.2.1. Définition du repère local lié à la section droite (S)

On considère le tronçon (E) de la poutre (E) en équilibre, par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

On désigne par $R_G(G,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ le repère local orthonormé direct, lié à la section (S) d'abscisse x ($\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0$), tel que $(G,\vec{x}_0)$ soit confondu avec la normale extérieure en (G) à (S) (dirigée vers l'extérieur de la matière).



IV.2.2. Composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion dans le repère local

Supposons que les éléments de réduction au point G du torseur des efforts de cohésion sont connus : $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \\ \vec{m}_G \end{Bmatrix}_G$.

En projection sur les axes du repère $R_G(G,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, les composantes des vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{m}_G$ se notent conventionnellement comme suit :

- La projection de $\vec{R}$ sur la normale extérieure $(G,\vec{x}_0)$ est notée par N, appelée effort normal.
- La projection de $\vec{R}$ sur l'axe $(G,\vec{y}_0)$ est notée par T_y, appelée effort tranchant suivant $(G,\vec{y}_0)$.
- La projection de $\vec{R}$ sur l'axe $(G,\vec{z}_0)$ est notée par T_z, appelée effort tranchant suivant $(G,\vec{z}_0)$.
- La projection de $\vec{m}_G$ sur la normale extérieure $(G,\vec{x}_0)$ est notée par M_t, appelée moment de torsion.
- La projection de $\vec{m}_G$ sur l'axe $(G,\vec{y}_0)$ est notée par M_{fy}, appelée moment de flexion suivant $(G,\vec{y}_0)$.
- La projection de $\vec{m}_G$ sur l'axe $(G,\vec{z}_0)$ est notée par M_{fz}, appelée moment de flexion suivant $(G,\vec{z}_0)$.

Par conséquent : $\begin{cases} \vec{R} = N\vec{x}_0 + T_y\vec{y}_0 + T_z\vec{z}_0 \\ \vec{m}_G = M_t\vec{x}_0 + M_{fy}\vec{y}_0 + M_{fz}\vec{z}_0 \end{cases}$

On pose : $\vec{T} = T_y\vec{y}_0 + T_z\vec{z}_0$; appelé effort tranchant.

$\vec{M}_f = M_{fy}\ \vec{y}_0 + M_{fz}\ \vec{z}_0$; appelé moment de flexion.

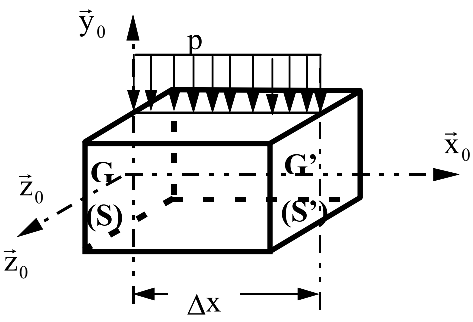
Nous rappelons que les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion sont des fonctions de l'abscisse x du centre de gravité de la section (S).

Ainsi : $\{\tau_{coh}\}_G = {}_G\begin{Bmatrix} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$;

La représentation graphique de ces fonctions donne les diagrammes de composantes algébriques des éléments de réduction. Ces graphes sont appelés diagrammes de l'état de sollicitation de la poutre.

IV.3. Relation entre effort tranchant et moment de flexion

On considère la répartition de charge, d'équation p(x) sur une poutre (E) ou sur un tronçon de la poutre. Afin de simplifier le calcul, nous supposons que la charge est uniformément répartie définie par sa densité linéique p parallèle à la direction du vecteur $\vec{y}_0$.



On considère un élément de la poutre de longueur Δx, délimité par les sections droites (S) et (S') de centre de gravité respectivement G et G'.

On suppose qu'entre (S) et (S') aucune charge concentrée n'est appliquée (voir fig.)

Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité de la section (S) d'abscisse x sont :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}(x) \\ \vec{m}_G(x) \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad ;$$

soient $\vec{T}(x) = T_y(x)\,\vec{y}_0 + T_z(x)\,\vec{z}_0$ et $\vec{M}_f(x) = M_{fy}(x)\,\vec{y}_0 + M_{fz}(x)\,\vec{z}_0$ respectivement l'effort tranchant et le moment de flexion en G.

Les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au centre de gravité G' de la section (S') d'abscisse $x+\Delta x$ sont :

$$\{\tau_{coh}\}_{G'} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(x+\Delta x) \\ \vec{m}_{G'}(x+\Delta x) \end{Bmatrix} = {}_{G'}\begin{Bmatrix} N(x+\Delta x) & M_t(x+\Delta x) \\ T_y(x+\Delta x) & M_{fy}(x+\Delta x) \\ T_z(x+\Delta x) & M_{fz}(x+\Delta x) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad ;$$

soient $\vec{T}(x+\Delta x) = T_y(x+\Delta x)\,\vec{y}_0 + T_z(x+\Delta x)\,\vec{z}_0$ et

$\vec{M}_f(x+\Delta x) = M_{fy}(x+\Delta x)\,\vec{y}_0 + M_{fz}(x+\Delta x)\,\vec{z}_0$ respectivement l'effort tranchant et le moment de flexion en G'.

Évaluons les éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion au point G' :

$$\vec{R}(x+\Delta x) = \vec{R}(x) + \Delta\vec{R} \quad \text{avec} \quad \Delta\vec{R} = -p\,\Delta x\,\vec{y}_0$$

$$\vec{m}_{G'}(x+\Delta x) = \vec{m}_G(x) + \vec{R}(x) \wedge \overrightarrow{GG'} + p\frac{(\Delta x)^2}{2}\vec{z}_0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{GG'} = \Delta x\,\vec{x}_0$$

On pose :

$$\Delta\vec{R} = -p\,\Delta x\,\vec{y}_0$$

$$\Delta\vec{m} = \vec{m}_{G'}(x+\Delta x) - \vec{m}_G(x) = \vec{R}(x) \wedge \overrightarrow{GG'} + p\,\frac{(\Delta x)^2}{2}\,\vec{z}_0$$

En remplaçant les vecteurs par leur expression respective et en faisant la projection sur les trois axes du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, les relations deviennent :

$$\Delta T_y = T_y(x+\Delta x) - T_y(x) = -p\ \Delta x \qquad \Rightarrow \frac{\Delta T_y}{\Delta x} = -p$$

$$\Delta M_{fy} = M_{fy}(x+\Delta x) - M_{fy}(x) = T_z\ \Delta x \qquad \Rightarrow \frac{\Delta M_{fy}}{\Delta x} = T_z$$

$$\Delta M_{fz} = M_{fz}(x+\Delta x) - M_{fz}(x) = -T_y\ \Delta x + p\frac{(\Delta x)^2}{2} \qquad \Rightarrow \frac{\Delta M_{fz}}{\Delta x} = -T_y + p\frac{\Delta x}{2}$$

Au passage à la limite (en remplace Δ par d), et en faisant tendre Δx vers zéro, nous obtenons :

$$\frac{dT_y}{dx} = -p\ ; \qquad \frac{dM_{fy}}{dx} = T_z\ ;\ \text{et}\ \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y$$

Ces relations restent valable même lorsque p n'est pas constante.

Nous démontrons que, pour une répartition de charge donnée, la relation suivante :

$\frac{dM_f}{dx} = -T$, où T désigne la valeur algébrique de l'effort tranchant et M_f la valeur algébrique du moment de flexion.

IV.4. Définition des sollicitations simples

Une sollicitation est dite simple lorsque toutes les composantes du torseur des efforts de cohésion sont nulles sauf une.

Torseur ${}_G\{\tau_{coh}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Désignation	Torseur ${}_G\{\tau_{coh}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Désignation
${}_G\begin{Bmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Traction (N>0) Compression (N<0)	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	Flexion plane simple
${}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	Cisaillement	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Torsion
${}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	Flexion pure		

V. Notions sur les contraintes

Considérons une poutre (E) en équilibre sous l'effet de l'action des forces extérieures par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

Imaginons un plan (π) qui décompose la poutre en deux tronçons (E_1) et (E_2). On désigne par (S) la section commune à (E_1) et (E_2).

Nous admettons que l'action exercée par le tronçon (E_2) sur le tronçons (E_1) est la suivante :

Sur chaque élément de surface ds de la section (S), (E_2) exerce sur (E_1) une force dite élastique $\vec{f} = \vec{C}\,ds$ appliquée au centre de l'élément ds.

Par définition, $\vec{C}$ est le vecteur contrainte relatif à l'élément de surface ds. Le vecteur $\vec{C}$ dont la direction est quelconque dans l'espace peut être décomposé en :

- Une projection normale à l'élément ds suivant $\vec{n}$. C'est la contrainte normale ou pression $\vec{C}_n$ ou $\vec{\sigma}$; Elle peut être une compression ou une traction suivant le sens de $\vec{C}$ par rapport à la normale extérieure. (S'ils sont de même sens « traction », s'ils sont de sens contraire « compression »).
- Une projection sur le plan tangent à l'élément ds. C'est la contrainte tangentielle $\vec{C}_t$ ou $\vec{\tau}$.

La dimension d'une contrainte est celle d'une force par unité de surface (1MPa = $1N/mm^2$).

L'ensemble des forces $\vec{f}$ appliquées à la surface (S) forme un système équivalent aux système de forces extérieures directement appliquées au tronçon (E_1) ou au tronçon (E_2).

$$\vec{R}_{E_2\to E_1} = \int_{P\in S} \vec{C}\,ds \quad \text{et} \quad \vec{m}(G)_{E_2\to E_1} = \int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\wedge\vec{C}\,ds$$

La statique élémentaire ne permet pas de déterminer les contraintes en tout point. Il faut faire appel pour cela à d'autres hypothèses résultant de l'étude expérimentale permettant l'étude de la déformation des corps sous l'action des forces extérieures.