Table des matières

Chapitre 1

Les matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. C'est pourquoi ce cours commence avec une étude de calcul matriciel et on traite en détail des formules classiques concernant les changements de base.

1.1 Calcul matriciel

1.1.1 Addition de matrices

Définition 1.1.1 *Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 1.1.1 *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, *alors*

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Par contre, si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, *alors $A + B'$ n'est pas définie.*

Définition 1.1.2 *Le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha.A$ (ou simplement αA).*

Exemple 1.1.2 *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$, *alors*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1).A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Proposition 1.1.1 *Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.*

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. *Chaque matrice A a une matrice inverse $-A$.*
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
7. $(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$.
8. $1.A = A$.

Donc, on conclut que $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé l'espace vectoriel des matrices.

1.1.2 Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 1.1.3 *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} + ... + a_{ip}b_{pj}.$$

C-à-d on calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne $(a_{i1}b_{1j})$, *que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne* $(a_{i2}b_{2j})$, *que l'on ajoute au produit du troisième. . .*

Exemple 1.1.3 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *alors*

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times (-1) = 1, \\ c_{21} &= 3 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 2, \\ c_{12} &= 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 0 \times 2 = -1, \\ c_{22} &= 3 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.*

Exemple 1.1.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *alors*

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

mais

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1.2 ***1.*** $A(BC) = (AB)C$ *: associativité du produit,*

2. $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(B + C)A = BA + CA$ *: distributivité du produit par rapport à la somme,*

3. $A.0 = 0$ *et* $0.A = 0$.

4. Si A *est une matrice* $n \times p$*, alors* $I_n \times A = A$ *et* $A \times I_p = A$*, où* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(s'appelle la matrice identité).*

1.2 Matrice inversible

Définition 1.2.1 *Soit* A *une matrice carrée de taille* $n \times n$*. S'il existe une matrice carrée* B *de taille* $n \times n$ *telle que*

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n,$$

on dit que A *est inversible. On appelle* B *l'inverse de* A *et on la note* A^{-1}*.*

- *L'ensemble des matrices inversibles de* $M_n(\mathbb{K})$ *est noté* $GL_n(\mathbb{K})$*.*

Exemple 1.2.1 *1) Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^{-1} *s'il est possible.*

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *l'inverse de* A*, donc on a*

$$AB = I_2 \text{ et } BA = I_2.$$

$$\begin{aligned} AB &= I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = 1 \\ 3c = 0 \\ b+2d = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{2}{3} \\ c = 0 \\ d = \dfrac{1}{3} \end{cases},$$

donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix},$$

d'autre part, par un simple calcul, on peut montrer que B vérifie $BA = I_2$. Alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2) *Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} s'il est possible.*

soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité, donc A n'est pas inversible.

Proposition 1.2.1 • *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve. **1)** Supposons qu'il existe deux matrices inverses B_1 et B_2, donc on a $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$.

D'une part, on a

$$B_2(AB_1) = B_2I_n = B_2.$$

D'autre part, comme le produit des matrices est associatif, on a

$$B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1.$$

Donc

$$B_1 = B_2.$$

2) Clair.

3) On a

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B \\ &= B^{-1}I_nB \\ &= B^{-1}B \\ &= I_n.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n.\end{aligned}$$

Donc $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

Cette méthode consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de tableau (A/I) jusqu'à obtenir le tableau (I/B), où B c'est la matrice A^{-1}. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple.

Exemple 1.2.2 *Calculons l'inverse de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On a

$$(A/I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & / & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -8 & -5 & / & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & / & -4 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 4 & 3 & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{8} & / & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & / & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \frac{1}{2} & & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & / & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & / & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & / & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc, on a obtenu :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.2 • *Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille $n \times p$. On appelle matrice transposée de A la matrice $A^t = (b_{ij})$ de taille $p \times n$ définie par :*

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

C-à-d, la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^t (et réciproquement la j-ème colonne de A^t est la j-ème ligne de A).

- *Si $A^t = A$, on dit que A est une matrice symétrique.*
- *Si $A^t = -A$, on dit que A est une matrice antisymétrique.*

Exemple 1.2.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ *est une matrice symetrique, la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice antisymetrique.*

Théorème 1.2.1 *1.* $(A+B)^t = A^t + B^t$.

2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

3. $(A^t)^t = A$.

4. $(AB)^t = B^t A^t$.

5. Si A *est inversible, alors* A^t *l'est aussi et on a* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Définition 1.2.3 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$*, La trace de la matrice* A *est la somme des éléments diagonaux de* A*. Autrement dit,*

$$trA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Exemple 1.2.4 • *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \\ \mathbf{0} & 4 & 4 \end{pmatrix}$, *alors*

$$trA = 1 + (-8) + 4 = -3.$$

Théorème 1.2.2 *Soient* A*,* $B \in M_n(\mathbb{K})$*. Alors :*

1. $tr(A+B) = trA + trB$,

2. $tr(\alpha A) = \alpha trA$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,

3. $tr(A^t) = trA$,

4. $tr(AB) = tr(BA)$.

1.3 Rang d'une matrice

Définition 1.3.1 *On dit qu'une matrice est échelonnée par rapport aux colonnes si le nombre de zéros commençant une colonne croît strictement colonne après colonne, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros. Autrement dit, la matrice transposée est échelonnée par rapport aux lignes.*

Exemple 1.3.1 *Les matrices suivantes sont des matrices échelonnées :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3.2 *Le rang d'une matrice A est le nombre maximum de lignes (ou colonnes) qui sont inéairement indépendants et on le note rgA.*

Proposition 1.3.1 *Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.*

Preuve. La preuve de cette proposition consiste à remarquer que les vecteurs colonnes non nuls sont linéairement indépendants, ce qui au vu de la forme échelonnée de la matrice est facile. ■

Méthode de Gauss pour calculer le rang d'une matrice

Le principe de la méthode de Gauss affirme que par les opérations élémentaires $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $C_i \leftarrow C_j$, on transforme la matrice A en une matrice échelonnée par rapport aux colonnes. Le rang de la matrice est alors le nombre de colonnes non nulles.

Exemple 1.3.2 *Trouver le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) *Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftarrow \frac{1}{2} C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme la dernière matrice est échelonnée par colonnes et que ses 3 *colonnes sont non nulles, alors en déduit $rgA = 3$.*

2) *Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $rgB = 3$.

1.4 Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 1.4.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit B une base de E. Soit B' une autre base de E.*

On appelle matrice de passage de la base B vers la base B', et on note $P_{B,B'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base B', par rapport à la base B.

C-à-d, la matrice de passage $P_{B,B'}$ contient - en colonnes - les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' exprimés dans l'ancienne base B.

Exemple 1.4.1 *Soient $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, $B' = \{l_1 = (1,2), l_2 = (2,3)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.*

1) *Quelle est la matrice de passage de la base B vers la base B' ?*

On a

$$l_1 = (1,2) = 1\,(1,0) + 2\,(0,1)\,,\ l_2 = (2,3) = 2\,(1,0) + 3\,(0,1)\,.$$

La matrice de passage est donc :

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Quelle est la matrice de passage de la base B' vers la base B ?

On a

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0) = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 \\ &= a_{11}(1,2) + a_{21}(2,3) \\ &= (a_{11} + 2a_{21}, 2a_{11} + 3a_{21}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = 1 \\ 2a_{11} + 3a_{21} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -3 \\ a_{21} = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= (0,1) = a_{12}l_1 + a_{22}l_2 \\ &= a_{12}(1,2) + a_{22}(2,3) \\ &= (a_{12} + 2a_{22}, 2a_{12} + 3a_{22}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_{12} + 2a_{22} = 0 \\ 2a_{12} + 3a_{22} = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{22} = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

La matrice de passage est donc :

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4.1 *1) La matrice de passage $P_{B,B'}$de la base B vers la base B' est la matrice associée à l'identité $id_E : (E, B') \to (E, B')$.*

C-à-d,

$$P_{B,B'} = Mat_{B',B}(id_E).$$

2) *La matrice de passage d'une base B vers une base B' est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base B' vers la base B :*

C-à-d,

$$P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1}.$$

3) Si *B, B', B'' sont trois bases, alors*

$$P_{B,B''} = P_{B,B'} \times P_{B',B''}.$$

Preuve. **1)** On pose $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.

On a $id_E\left(e'_j\right) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ et $Mat_{B',B}(id_E)$ est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de e'_j par rapport à B, soit $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Cette colonne est la j-ème colonne de $P_{B,B'}$.

2) Comme id_E est bijective, alors $P_{B,B'}$ est inversible, donc $(P_{B,B'})^{-1}$ est la matrice associée à l'application id_E^{-1}, c-à-d $(P_{B,B'})^{-1}$ est la matrice de passage de la base B' vers la base B.

3) On a $id_E : (E, B'') \to (E, B)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, B'') \overset{id_E}{\to} (E, B') \overset{id_E}{\to} (E, B)$$

c-à-d, $id_E = id_E \circ id_E$. Cette factorisation permet d'écrire l'égalité suivante :

$Mat_{B'',B}(id_E) = Mat_{B',B}(id_E) \times Mat_{B'',B'}(id_E)$, donc on a $P_{B,B''} = P_{B,B'} \times P_{B',B''}$.

■

Proposition 1.4.2 *Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $P_{B,B'}$ la matrice de passage de la base B vers la base B'. Soit $x \in E$ tq $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ les coordonnées de x dans la base B et $X' = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ les coordonnées de x dans la base B', alors*

$$X = P_{B,B'} \times X'$$

Preuve. On a $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ les coordonnées de x dans la base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, c-à-d

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

et $X' = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ les coordonnées de x dans la base B', c-à-d

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + ... + x'_n e'_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n &= x = id_E(x) \\ &= id_E(x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + ... + x'_n e'_n) \\ &= x'_1 id_E(e'_1) + x'_2 id_E(e'_2) + ... + x'_n id_E(e'_n). \end{aligned}$$

Comme $P_{B,B'} = Mat_{B',B}(id_E)$, on a

$$\begin{aligned} & x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \\ = \; & x'_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + .. + a_{n1} e_n) + x'_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + .. + a_{n2} e_n) + .. + x'_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + ... + a_{nn} e_n) \\ = \; & (a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + ... a_{1n} x'_n) e_1 + (a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + ... a_{2n} x'_n) e_2 + ... + (a_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 + ... a_{nn} x'_n) e_n. \end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + ... a_{1n} x'_n \\ x_2 = a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + ... a_{2n} x'_n \\ \qquad ... \\ x_n = a_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 + ... a_{nn} x'_n. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = P_{B,B'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix},$$

c-à-d,

$$X = P_{B,B'} \times X'.$$

■

Exemple 1.4.2 *Déterminer les coordonnées de x dans la base $B = \{x_1(1,1,1), x_2(0,1,1), x_3(0,0,1)\}$, où $x = (2,0,-3)$ s'écrit dans la base canonique $B' = \{x'_1(1,0,0), x'_2(0,1,0), x'_3(0,0,1)\}$.*

Soit $P_{B,B'}$ la matrice de passage de la base B vers la base B', donc

$$\begin{cases} (1,0,0) = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(0,0,1) \\ (0,1,0) = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(0,1,1) + a_{32}(0,0,1) \\ (0,0,1) = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(0,1,1) + a_{33}(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les coordonnées de x dans la base B est

$$X = P_{B,B'} \times X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

c-à-d,

$$x = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3.$$

Théorème 1.4.1 • *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \to F$ une application linéaire, B_E, B'_E deux bases de E et B_F, B'_F deux bases de F.*

• *Soit $P = P_{B_E,B'_E}$ la matrice de passage de B_E à B'_E et $Q = P_{B_F,B'_F}$ la matrice de passage de B_F à B'_F.*

• *Soit $A = Mat_{B_E,B_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B_E vers la base B_F.*

• *Soit $B = Mat_{B'_E,B'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B'_E vers la base B'_F.*

Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

Preuve. L'application $f : (E, B'_E) \to (F, B'_F)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, B'_E) \overset{id_E}{\to} (E, B_E) \overset{f}{\to} (F, B_F) \overset{id_E}{\to} (F, B'_F)$$

c'est-à-dire que $f = id_F \circ f \circ id_E$.

On a donc l'égalité de matrices suivante :

$$\begin{aligned} B &= Mat_{B'_E,B'_F}(f) = Mat_{B_F,B'_F}(id_F) \times Mat_{B_E,B_F}(f) \times Mat_{B'_E,B_E}(id_E) \\ &= P_{B'_F,B_F} \times Mat_{B_E,B_F}(f) \times P_{B_E,B'_E} \\ &= Q^{-1}AP. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.4.3 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$l'application linéaire dont la matrice de la base canonique $E = \{e_1(1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\}$ vers la base canonique $L = \{l_1(1,0), l_2(0,1)\}$est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f de la base $E' = \{e'_1(1,1,1), e'_2(1,1,0), e'_3(1,0,0)\}$ vers la base $L' = \{l'_1(1,3), l'_2(1,4)\}$, $B = Mat_{E',L'}(f)$?

1) *La matrice de passage P de E à E' est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) *Calcul Q^{-1}: la matrice de passage de L' à L.*

$$\begin{cases} l_1 = (1,0) = a_{11}(1,3) + a_{21}(1,4) \\ l_2 = (0,1) = a_{12}(1,3) + a_{22}(1,4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0) = (a_{11} + a_{21}, 3a_{11} + 4a_{21}) \\ (0,1) = (a_{12} + a_{22}, 3a_{12} + 4a_{22}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 4 \\ a_{21} = -3 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aprés le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} B &= Mat_{E',L'}(f) = Q^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.1 • *Soit $f : E \to E$ une application linéaire, B, B' deux bases de E.*

- *Soit $P = P_{B,B'}$ la matrice de passage de B à B'.*
- *Soit $A = Mat_B(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base B.*
- *Soit $B = Mat_{B'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base B'.*

Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 1.4.4 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $E = \{e_1(1,0), e_2(0,1)\}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f dans la base $E' = \{e'_1(1,3), e'_2(2,5)\}$, $B = Mat_{E'}(f)$?

1) La matrice de passage P de E à E' est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Calcul P^{-1}: la matrice de passage de E' à E.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} e_1 = (1,0) = a_{11}(1,3) + a_{21}(2,5) \\ e_2 = (0,1) = a_{12}(1,3) + a_{22}(2,5) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} (1,0) = (a_{11} + 2a_{21}, 3a_{11} + 5a_{21}) \\ (0,1) = (a_{12} + 2a_{22}, 3a_{12} + 5a_{22}) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} a_{11} = -5 \\ a_{21} = 3 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{22} = -1 \end{cases}, \end{aligned}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'aprés le Corollaire précédent, on a

$$\begin{aligned} B &= Mat_{E'}(f) = P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Déterminants

2.1 Définition et premières propriétés

Nous allons construire dans ce chapitre une fonction - appelée le déterminant - qui associe un nombre réel à chaque matrice carrée et qui permettra de caractériser facilement les matrices inversibles puisque ce sont celles dont le déterminant est non nul.

Définition 2.1.1 *Soit $\mathbb{K}$ un cors, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*

- *On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.*

Exemple 2.1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *donc*

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1.2 *Soit $\mathbb{K}$ un cors, $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application vérifie :*

1) *Si $A = (a) \Rightarrow f(A) = a$, $a \in \mathbb{K}$.*

2) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ *tq* $n \succ 1$*, alors :*

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} f(A_{ij}), \forall 1 \leq j \leq n.$$

On appelle l'application f *le déterminant de la matrice* A *et on le note par :* $\det A$ *ou* $|A|$*, c-à-d*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ fixons } j \text{ à un des indices } 1, 2, ..., n.$$

Remarque 2.1.1 *Le déterminant d'une matrice* 2×2 *est très simple à calculer :*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

Exemple 2.1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$*, donc*

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Fixons $j = 1$*, alors*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{21} \det A_{21} + (-1)^4 a_{31} \det A_{31} \\ &= 1. \det A_{11} - 2 \det A_{21} + \det A_{31} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 2(-2) + (-3) = -9. \end{aligned}$$

Deuxième méthode pour les matrices 3×3 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est la règle de Sarrus : on recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées), puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante (à gauche), et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante (à droite).

Exemple 2.1.3 *Calculons le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$*, par la règle de Sarrus :*

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1\searrow & -1\searrow & 0\searrow & 1 & -1 \\ 2 & 1\searrow & 3\searrow & 2\searrow & 1 \\ 1 & 4 & 2\searrow & 1\searrow & 4\searrow \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & \swarrow 0 & \swarrow 1 & \swarrow -1 \\ 2 & \swarrow 1 & \swarrow 3 & \swarrow 2 & 1 \\ \swarrow 1 & \swarrow 4 & \swarrow 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\det A = [1 \times 1 \times 2 + (-1) \times 3 \times 1 + 0 \times 2 \times 4] - [(-1) \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 4 + 0 \times 1 \times 1] = -9.$$

Remarque 2.1.2 *Cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3.*

Proposition 2.1.1 *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.*

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$ *on a*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

Corollaire 2.1.1 ***1)*** *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.*

2) *Si* $A = I_n$*, donc* $\det A = 1$.

Définition 2.1.3 *Soientt* $A = (a_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* n*,* $B = (b_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* m*,* $C = (c_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* $n \times m$*,* $D = (d_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* $m \times n$*. On définit la matrice* E *d'ordre* $n + m$ *comme suit :*

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} & c_{11} & ... & ... & c_{1m} \\ a_{21} & ... & ... & a_{2n} & c_{21} & ... & ... & c_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} & c_{n1} & ... & ... & a_{nm} \\ d_{11} & ... & ... & d_{1n} & b_{11} & ... & ... & b_{1m} \\ d_{21} & ... & ... & d_{2n} & b_{21} & ... & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ d_{m1} & ... & ... & d_{mn} & b_{m1} & ... & ... & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}.$$

On appelle E *matrice en blocs.*

Théorème 2.1.1 *Soit* $E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ *matrice en blocs. Si* C *est une matrice nulle, alors*

$$\det E = \det A. \det B.$$

Exemple 2.1.4 *Soit*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\det E=\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3.4=12.$$

Théorème 2.1.2 *Soit* $\mathbb{K}$ *un cors,* A*,* $B\in M_n(\mathbb{K})$ *alors :*

1) $\det A.B=\det A.\det B$.

2) $\det A^t=\det A$.

Exemple 2.1.5 *Soit* $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$*, donc* $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On a

$$\det A=\det A^t=4-6=-2.$$

2.2 Inverse d'une matrice

Théorème 2.2.1 *Soit* $\mathbb{K}$ *un cors,* $A\in M_n(\mathbb{K})$*, alors :*

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det A\neq 0.$$

Théorème 2.2.2 *Soit* $\mathbb{K}$ *un cors,* $A\in M_n(\mathbb{K})$ *tq* $\det A\neq 0$*, alors on a*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}C^t,\ tq\ C=(c_{ij})\ ;\ c_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Où la matrice C *s'appelle la comatrice de* A *et* C^t *s'appelle l'adjointe de* A*(on la note par* $adjA$*).*

Exemple 2.2.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Le calcul donne que* $\det A = -6 \neq 0$, *donc A est inversible.*

La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.2.3 *Soit $\mathbb{K}$ un cors, $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, alors :*

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Exemple 2.2.2 *Reprenons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Par la règle de Sarrus, on a :*

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{5}{6} \searrow & \frac{1}{3} \searrow & \frac{1}{2} \searrow & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \searrow & \frac{1}{2} \searrow & -\frac{1}{6} \searrow & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \searrow & -\frac{1}{2} \searrow & 0 \searrow \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \swarrow \frac{1}{2} & \swarrow \frac{5}{6} & \swarrow \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \swarrow \frac{1}{3} & \swarrow \frac{1}{2} & \swarrow -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \swarrow -\frac{1}{2} & \swarrow 0 & \swarrow -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \det A^{-1} &= \left[\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times 0\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{\det A}. \end{aligned}$$

2.3 Mineurs d'une matrice

Définition 2.3.1 *Soit $\mathbb{K}$ un cors, $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans$\mathbb{K}$. Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle mineur d'ordre k le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.*

Exemple 2.3.1 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

- *Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A.*

Par exemple : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 17$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 34$.

- *Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A.*

Par exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$.

Théorème 2.3.1 *Le rang d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.*

Exemple 2.3.2 *Soit α un paramètre réel. Calculons le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Clairement, le rang ne peut pas être égal à 4, puisque 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sauraient être indépendants.*

• *On obtient les mineurs d'ordre 3 de A en supprimant une colonne. Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant la première colonne, en le développant par rapport à sa première colonne :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2.$$

Par conséquent, si $\alpha \neq 2$, le mineur précédent est non nul et le rang de la matrice A est 3.

- *Si $\alpha = 2$, on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Donc dans ce cas, A est de rang inférieur ou égal à 2. Or $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$ est un mineur d'ordre 2 non nul. Donc, si $\alpha = 2$, le rang de A est 2.

Chapitre 3

Valeurs propres et vecteurs propres

L'objectif de ce chapitre est de définir les notions de valeurs propres et vecteurs propres, d'illustrer des méthodes permettant de déterminer ces valeurs propres, notamment via le calcul avec le polynôme caractéristique et de donner une caractérisation des matrices diagonalisables.

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. On appelle vecteur propre de f tout vecteur v, non nul de E, vérifiant :*

$$f(v) = \lambda v.$$

Le scalaire λ est appelé valeur propre associée au vecteur v.

L'ensemble des veceurs propres associés à λ s'appele sous-espace propre associé à λ et on le note par V_λ.

Théorème 3.1.1 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ une base de E, $f : E \to E$ un endomorphisme de E; $A = (a_{ij})$ la matrice associé à f dans la base B.*

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors :*

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Conséquence :

1) λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow$ l'application $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective.

2) $V_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E)$.

Définition 3.1.2 *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, $B = \{v_1, v_2, .., .v_n\}$ *une base de* E, $f : E \to E$ *un endomorphisme de* E; $A = (a_{ij})$ *la matrice associé à* f *dans la base* B, *alors*

- *Les valeurs propres et les veceurs propres de l'application* f *sont les valeurs propres et les veceurs propres de la matrice* A.
- $\det(A - \lambda I_n)$ *s'appelle équation caractéristique de* f.

3.1.1 Calcul des valeurs propres et vecteurs propres

Exemple 3.1.1 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) &= (x, y - z, z). \end{aligned}$$

Calculer les valeurs propres de f *et déterminer* V_λ *associé à chaque valeur propre* λ.

La matrice A *associé à* f *dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}. = (1-\lambda)^3.$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Le vecteurs propre $v = (x, y, z)$ *associé à* $\lambda = 1$ *vérifie :* $f(v) = \lambda v$, *c-à-d* $(f - Id_{\mathbb{R}^3})(v) = 0$, *alors*

$$\begin{aligned}(A - I_3)(v) &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow z = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$v = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0).$$

C-à-d,

$$V_{\lambda=1} = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)).$$

3.2 Diagonalisation d'une matrice carrée

Théorème 3.2.1 *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, $f : E \to E$ *un endomorphisme de* E. *Si* f *admet* n *valeurs propres, distinctes deux à deux, alors les* n *vecteurs propres associés sont linéairement indépendants.*

Théorème 3.2.2 *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *tq* $dimE = n$, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *une base de* E, $f : E \to E$ *un endomorphisme de* E.

Si l'équation caractéristique de f *admet* n *valeurs propres distinctes, alors il existe une base* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *de* E *tel que la matrice associée à* f *pour la base* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *est une matrice diagonale et les éléments de la diagonale principale sont les valeurs propres.*

Exemple 3.2.1 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) &= (x + z, 5y + 3z, -2x + 4z). \end{aligned}$$

i) ***Calcul les valeurs propres :***

La matrice A associé à f dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda I_3) \\ = \ & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}. \\ = \ & (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(4-\lambda)\right] - 2(5-\lambda) = (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 2\right). \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 2\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

ii) ***Calcul les vecteurs propres associés aux valeurs propres :***

1) *pour $\lambda_1 = 5$. Le vecteurs propre $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ associé à $\lambda_1 = 5$ vérifie : $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, c-à-d $(f - 5Id_{\mathbb{R}^3})(v_1) = 0$, alors*

$$\begin{aligned} (A - 5I_3)(v_1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x_1 + z = 0 \\ 3z_1 = 0 \\ -2x_1 - z_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right., \end{aligned}$$

donc

$$v_1 = (0, y_1, 0) = y_1(0, 1, 0).$$

C-à-d

$$V_{\lambda_1 = 5} = Vect((0, 1, 0)).$$

2) *pour $\lambda_2 = 2$. Le vecteurs propre $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ associé à $\lambda_2 = 2$ vérifie : $f(v_2) = \lambda_2 v_2$,* *c-à-d* $(f-2Id_{\mathbb{R}^3})(v_2)=0$, *alors*

$$\begin{aligned}(A-2I_3)(v_2) &= 0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&3&3\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-x_2+z_2=0\\3y_2+3z_2=0\\-2x_2+2z_2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}y_2=-z_2\\x_2=z_2\end{array}\right.,\end{aligned}$$

donc

$$v_2=(z_2,-z_2,z_2)=z_2(1,-1,1).$$

C-à-d,

$$V_{\lambda_2=2}=Vect((1,-1,1)).$$

3) *pour* $\lambda_3=3$. *Le vecteurs propre* $v_3=(x_3,y_3,z_3)$ *associé à* $\lambda_3=3$ *vérifie :* $f(v_3)=\lambda_3 v_3$, *c-à-d* $(f-3Id_{\mathbb{R}^3})(v_3)=0$, *alors*

$$\begin{aligned}(A-3I_3)(v_3) &= 0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&2&3\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-2x_3+z_3=0\\2y_3+3z_3=0\\-2x_3+z_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}y_3=-\frac{3}{2}z_3\\x_3=\frac{1}{2}z_3\end{array}\right.,\end{aligned}$$

donc

$$v_3=\left(\frac{1}{2}z_3,-\frac{3}{2}z_3,z_3\right)=\frac{1}{2}z_3(1,-3,2).$$

C-à-d,

$$V_{\lambda_3=3}=Vect((1,-3,2)).$$

D'aprés le théorème précédent, les vecteurs $F=\{v_1(0,1,0),v_2(1,-1,1),v_3(1,-3,2)\}$ *sont linéairement indépendants, par conséquent,* $F=\{v_1,v_2,v_3\}$ *forme une base dans* $\mathbb{R}^3$.

ii) Calcul la matrice B ***associée à*** f ***pour la base*** F ***:***

On a

$$B=P^{-1}AP,$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base F, donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$