Table des matières

Chapitre 1

Application linéaire

Ce chapitre est consacré l'étude des applications linéaires. Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices, ce qui facilite les calculs.

1.1 Application linéaire

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, *pour tous* $u, v \in E$.
2. $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$, *pour tout* $u \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.1.2 *Soit f une application de E dans F.*

$$f \text{ est une application linéaire} \Longleftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Exemple 1.1.1 *1. L'application f définie par :*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x, y, z) \quad &= \quad (-2x, y + 3z) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

En effet, soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (-2(x+x'), y+y'+3(z+z')) \\ &= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

2. *L'application f définie par*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) &= x.y \end{aligned}$$

n'est pas une application linéaire, car

$$\begin{aligned} \forall (x,y) &\in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x).(\lambda y) \\ &= \lambda^2 x.y \\ &= \lambda^2\ f(x,y) \\ &\neq \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *1) Si $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme linéaire.*

2) Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme .

3) Si f est bijective de E dans F, on dit que f est un isomorphisme.

4) Si f est bijective de E dans E, on dit que f est un automorphisme.

Proposition 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout $u \in E$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec $\lambda = 0$, puis avec $\lambda = 1$. ■

1.1.1 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.1.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f, noté $Ker(f)$, est l'ensemble :*

$$Ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}.$$

L'ensemble $f(E)$ s'appelle l'image de l'application linéaire f et est noté Imf, c-à-d

$$Imf = f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\}.$$

Exemple 1.1.2 *Reprenons l'exemple de l'application linéaire f définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y,z) & = & (-2x, y+3z) \end{array}$$

• *Calculons le noyau $Ker(f)$.*

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & \in & Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & (-2x, y+3z) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -2x = 0 \\ y+3z = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & (x,y,z) = (0,-3z,z). \end{array}$$

Donc $Ker(f) = \{(0,-3z,z) \ /z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $Ker(f) = Vect\{(0,-3,1)\}$: c'est une droite vectorielle.

• *Calculons Imf.*

$$\begin{array}{rcl} Imf & = & f(\mathbb{R}^3) = \left\{f(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ & = & \left\{(-2x, y+3z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ & = & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Donc f est surjective.

Proposition 1.1.2 *1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F, en particulier, Im f est un sous-espace vectoriel de F.*

2. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. 1) Montrons que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

i) Comme $0_E \in E'$, donc $0_F = f(0_E) \in f(E')$, alors $f(E') \neq \varnothing$.

ii) On montre que pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de $f(E')$ et pour tous scalaires λ, μ, l'élément $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E')$.

En effet :

$$\begin{aligned} y_1 &\in f(E') \Rightarrow \exists x_1 \in E',\, y_1 = f(x_1) \\ y_2 &\in f(E') \Rightarrow \exists x_2 \in E',\, y_2 = f(x_2) \end{aligned}$$

Comme f est linéaire, on a :

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or $\lambda x_1 + \mu x_2 \in E'$, car E' est un sous-espace vectoriel de E, donc

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(E')$$

et par suite, $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

2) Montrons que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

i) $Ker(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$, donc

$$0_E \in Ker(f).$$

ii) Soient x_1, $x_2 \in Ker(f)$ et λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2 \in Ker(f)$.

En effet :

$$\begin{aligned} x_1 &\in Ker(f) \Rightarrow f(x_1) = 0_F \\ x_2 &\in Ker(f) \Rightarrow f(x_2) = 0_F \end{aligned}$$

Comme f est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \\ &= \lambda 0_F + \mu 0_F \\ &= 0_F. \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \in Ker(f),$$

et par suite, $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. ∎

Théorème 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}.$$

Preuve. • Supposons que f soit injective et montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$.

Soit x un élément de $Ker(f)$, alors $f(x) = 0_F$.

Comme f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$, c-à-d

$$f(x) = f(0_E).$$

Comme f est injective, on déduit $x = 0_E$, et par suite

$$Ker(f) = \{0_E\}.$$

• Réciproquement, supposons maintenant que $Ker(f) = \{0_E\}$. Soient x_1, $x_2 \in E$, tq

$$f(x_1) = f(x_2).$$

On a

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ &\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \text{ (car } f \text{ est linéaire).} \end{aligned}$$

Donc

$$x_1 - x_2 \in Ker(f) = \{0_E\},$$

c-à-d

$$x_1 - x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Alors f soit injective. ■

1.1.2 Construction d'une application linéaire

Théorème 1.1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie n et que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base* *de E. Alors pour tout choix $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de n vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que, pour tout $i = 1, ..., n$:*

$$f(e_i) = v_i$$

C-à-d pour déterminer une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F, il suffit de donner l'image de la base de E.

Exemple 1.1.3 *Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ telle que $f(1,1) = 2 - 3x + x^2$, $f(2,3) = 1 - x^2$ (où $B = ((1,1),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$).*

En effet : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(2,3) \text{ (car } B \text{ est une base de } \mathbb{R}^2\text{).}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (a,b) &= (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = \alpha + 3\beta \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \beta = b - a \\ \alpha = 3a - 2b \end{cases}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f(a,b) &= f(\alpha(1,1) + \beta(2,3)) \\ &= \alpha f(1,1) + \beta f(2,3) \\ &= (3a - 2b) f(1,1) + (b - a) f(2,3) \\ &= (3a - 2b)\left(2 - 3x + x^2\right) + (b - a)\left(1 - x^2\right) \\ &= (5a - 3b) - 3(3a - 2b)x + (4a - 3b)x^2. \end{aligned}$$

1.1.3 Rang d'une application linéaire

Définition 1.1.4 *La dimension de Imf est appelée rang de f et est noté $rg(f)$; c-à-d*

$$rg(f) = \dim Imf$$

Théorème 1.1.3 *(Théorème du rang).*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors

$$\dim E = \dim Kerf + \dim Imf$$

Autrement dit :

$$\dim E = \dim Kerf + rg\left(f\right).$$

Exemple 1.1.4 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) &= \left(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4\right) \end{aligned}$$

Calculons le rang de f et la dimension du noyau de f.

- ***Première méthode.*** *On calcule d'abord le noyau :*

$$\begin{aligned} \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) &\in Kerf \Leftrightarrow f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4\right) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

On choisit x_3 et x_4 comme paramètres et on trouve :

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{\left(-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4\right) / x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x_3\left(-2,-1,1,0\right) + x_4\left(-1,-1,0,1\right) / x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect\left(\left(-2,-1,1,0\right), \left(-1,-1,0,1\right)\right). \end{aligned}$$

Les deux vecteurs définissant le noyau sont linéairement indépendants, donc

$$\dim Kerf = 2.$$

On applique maintenant le théorème du rang pour en déduire sans calculs la dimension de l'image :

$$\dim Imf = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Kerf = 4 - 2 = 2$$

• ***Deuxième méthode.*** *On peut calculer d'abord la dimension de l'image, puis on déduit* $\dim Kerf$ *par le théorème du rang.*

1.2 Matrice d'une application linéaire

1.2.1 Introduction aux matrices

Définition 1.2.1 • *Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.*

• *Elle est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*

• *Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.*

• *Le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne est noté $a_{i,j}$.*

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ ou } (a_{ij}).$$

Exemple 1.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{11} = 1$ et $a_{23} = 7$.

Définition 1.2.2 • *Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.*

• *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés matrices réelles.*

Matrices particulières

• Si $n = p$, la matrice est dite matrice carrée. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Les éléments a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la diagonale principale de la matrice.

• Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne ou vecteur ligne. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

• De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne ou vecteur colonne. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

• La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée 0_{np} ou plus simplement 0.

1.2.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E et $B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ une base de F. Soit enfin $f : E \to F$ une application linéaire.

• Pour $j \in \{1, ..., p\}$, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ de F.

Il existe donc n scalaires uniques a_{1j}, a_{2j},..., a_{nj} tels que

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2. + ... + a_{nj}f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{B'}$$

Définition 1.2.3 *La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases B et B' est la matrice $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la*

base de départ B, exprimée dans la base d'arrivée B'. On note cette matrice $Mat_{B,B'}(f)$.
C-à-d

$$Mat_{B,B'}(f) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & ... & f(e_j) & ... & f(e_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 \\ f_1 \\ ... \\ f_n \end{array} \end{array}$$

Exemple 1.2.2 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x_1, x_2, x_3) \quad &= \quad (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3). \end{aligned}$$

Soient $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, $B' = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$ les bases caanoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

***1.** Quelle est la matrice de f dans les bases B et B' ?*

• *On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

• *$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.*

• *$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Alors

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

***2.** On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée.*

Soient $B = \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (1,0,1), e_3 = (0,1,1)\}$, $B' = \{f_1 = (1,0), f_2 = (1,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Quelle est la matrice de f dans les bases B et B' ?

• *On a $f(e_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3f_1 - f_2$.*

- $f(e_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4f_1 + 4f_2$.
- $f(e_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -f_1 + f_2$.

Alors

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

3. *Inversemennt, Soit la matrice*

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

où $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, $B' = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$ *sont les bases caanoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$ *respectivement.*

Déterminer l'application linéaire f.

- *On a* $f(e_1) = f(1,0,0) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21}) = (1,2)$.
- *De même* $f(e_2) = f(0,1,0) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 = (2,1)$.
- *Enfin* $f(e_3) = f(0,0,1) = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 = (-3,5)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1,2) + y(2,1) + z(-3,5) \\ &= (x + 2y - 3z, 2x + y + 5z). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y,z) &= (x + 2y - 3z, 2x + y + 5z). \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *Soient* f, $g : E \to F$ *deux applications linéaires et soient* B *une base de* E *et* B' *une base de* F. *Alors :*

- $Mat_{B,B'}(f+g) = Mat_{B,B'}(f) + Mat_{B,B'}(g)$.
- $Mat_{B,B'}(\lambda f) = \lambda Mat_{B,B'}(f)$.

Proposition 1.2.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soient B une base de E, B' une base de F et B'' une base de G. Alors*

$$Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) \times Mat_{B,B'}(f).$$

Exemple 1.2.3 *On considère deux applications linéaires : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On se donne des bases : $B = (e_1, e_2)$ une base de E, $B' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F, et $B'' = (g_1, g_2)$ une base de G. On suppose connues les matrices de f et g :*

$$A = Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2},\ B = Mat_{B',B''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}.$$

Calculons la matrice associée à $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $C = Mat_{B,B''}(g \circ f)$, de deux façons différentes.

1. Première méthode. *Revenons à la définition de la matrice de l'application linéaire $g \circ f$. Il s'agit d'exprimer l'image des vecteurs de la base de départ B dans la base d'arrivée B''. C'est-à-dire qu'il faut exprimer $g \circ f\ (e_j)$ dans la base (g_1, g_2).*

• *Par définition, on a*

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} = f_1 + f_2\ ,\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B'} = f_2 + 2f_3.$$

$$g(f_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B''} = 2g_1 + 3g_2,\ g(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B''} = -g_1 + g_2,\ g(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B''} = 2g_2.$$

• *Alors, on a*

$$\begin{aligned} g \circ f(e_1) &= g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2) = 2g_1 + 3g_2 + -g_1 + g_2 = g_1 + 4g_2. \\ g \circ f(e_2) &= g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3) = -g_1 + g_2 + 2(2g_2) = -g_1 + 5g_2. \end{aligned}$$

Donc

$$C = Mat_{B,B''}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Deuxième méthode. *Utilisons le produit de matrices : on sait que* $C = B \times A$. *Donc*

$$C = Mat_{B,B''}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$