Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Le but de ce chapitre est de reconnaître et de décrire la structure d'espace vectoriel ainsi que des problèmes relatifs aux notions de combinaison linéaire, de dépendance et d'indépendance linéaire, de système générateur et de base.

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1.1 *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :*

- *d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v. \end{array}$$

- *d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda.u. \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

I. $(E,+)$ *est un groupe abélien.*

II. $\forall\,(\alpha,\beta) \in K^2$, $\forall\,(x,y) \in E^2$, *on a :*

1. $(\alpha+\beta)\,.x = \alpha.x + \beta.x$

2. $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$
3. $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$
4. $1_{\mathbb{K}}.x = x$ *($1_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre de de la multiplication de $\mathbb{K}$).*

Remarque 1.1.1 *Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.*

Exemple 1.1.1 ***I. (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).***

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\,/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

où la loi interne + et la loi externe . sont données par :

$$\begin{aligned} \forall (x,y),(x',y') &\in \mathbb{R}^2, (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'). \\ \forall (x,y) &\in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha.(x,y) = (\alpha.x, \alpha.y). \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car :*

i. $(\mathbb{R}^2, +)$ *est un groupe abélien. (La loi interne + est commutative et associative, l'élément neutre est le vecteur nul $(0,0)$ et le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$).*

ii. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x,y)$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

1)

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta).(x,y) &= ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y) \\ &= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) \\ &= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) \\ &= \alpha(x,y) + \beta(x,y). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \alpha.[(x,y)+(x',y')] &= \alpha.(x+x', y+y') \\ &= (\alpha.(x+x'), \alpha.(y+y')) \\ &= (\alpha.x + \alpha.x', \alpha.y + \alpha.y') \\ &= (\alpha.x, \alpha.y) + (\alpha.x', \alpha.y') \\ &= \alpha.(x,y) + \alpha.(x',y'). \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\alpha.(\beta.(x,y)) &= \alpha.(\beta.x,\beta.y)\\ &= (\alpha.\beta.x,\alpha.\beta.y)\\ &= (\alpha.\beta).(x,y).\end{aligned}$$

4)

$$1.(x,y) = (1.x, 1.y) = (x,y).$$

II. (L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté par $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La loi interne $+$ et la loi externe . sont données par :

$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *la fonction $f+g$ est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *la fonction $\alpha.f$ est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x).$$

$(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car :*

i. $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$ *est un groupe abélien. (La loi interne $+$ est commutative et associative, l'élément neutre est est la fonction nulle, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, et le symétrique de f est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -f(x)$).*

ii. $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall f,\ g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on a :*

1)

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ ((\alpha+\beta).f)(x) = (\alpha+\beta).f(x)\\ &= \alpha.f(x) + \beta.f(x)\\ &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x),\end{aligned}$$

donc

$$(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f$$

2)

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ (\alpha.(f+g))(x) = \alpha.(f+g)(x)\\ &= \alpha.(f(x)+g(x))\\ &= \alpha.f(x)+\alpha.g(x)\\ &= (\alpha.f+\alpha.g)(x),\end{aligned}$$

donc

$$\alpha.(f+g) = \alpha.f+\alpha.g$$

3)

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ (\alpha.(\beta.f))(x) = \alpha.(\beta.f)(x)\\ &= \alpha.\beta.f(x)\\ &= (\alpha.\beta).f(x)\\ &= ((\alpha.\beta).f)(x),\end{aligned}$$

donc

$$\alpha.(\beta.f) = (\alpha.\beta).f$$

4)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1.f)(x) = 1.f(x) = f(x),$$

donc

$$1.f = f$$

Proposition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :*

1. $0_{\mathbb{K}}\ .u = 0_E$

2. $\lambda.0_E = 0_E$

3. $(-1_{\mathbb{K}}).u = -u$

4. $\lambda.u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} &= 0_{\mathbb{K}} \\ &\Rightarrow (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).u = 0_{\mathbb{K}}.u \\ &\Rightarrow 0_{\mathbb{K}}.u + 0_{\mathbb{K}}.u = 0_{\mathbb{K}}.u \\ &\Rightarrow 0_{\mathbb{K}}.u + 0_{\mathbb{K}}.u - (0_{\mathbb{K}}.u) = 0_{\mathbb{K}}.u - (0_{\mathbb{K}}.u) \\ &\Rightarrow 0_{\mathbb{K}}.u + 0_E = 0_E \\ &\Rightarrow 0_{\mathbb{K}}.u = 0_E. \end{aligned}$$

2) La preuve est semblable en partant de l'égalité

$$0_E + 0_E = 0_E.$$

3) On a

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}})\,u &= 1_{\mathbb{K}}.u + (-1_{\mathbb{K}})\,u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})).u \\ &= 0_{\mathbb{K}}.u = 0_E, \end{aligned}$$

donc $(-1_{\mathbb{K}})\,u$ est le symétrique de u, c-à-d

$$(-1_{\mathbb{K}}).u = -u.$$

4) D'après les propriétés précédentes, on a :

$$\text{si } \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E \text{ alors } \lambda.u = 0_E.$$

Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $u \in E$ un vecteur tels que $\lambda.u = 0_E$.

Supposons λ différent de $0_{\mathbb{K}}$. On doit alors montrer que $u = 0_E$. Comme $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, λ alors est inversible pour le produit dans le corps $\mathbb{K}$. Soit λ^{-1} son inverse.

On a

$$\begin{aligned} \lambda.u &= 0_E \\ &\Rightarrow \lambda^{-1}.(\lambda.u) = \lambda^{-1}.0_E \\ &\Rightarrow \left(\lambda^{-1}.\lambda\right).u = \lambda^{-1}.0_E \\ &\Rightarrow (1_{\mathbb{K}}).u = 0_E \\ &\Rightarrow u = 0_E. \end{aligned}$$

■

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :*

1) $0_E \in F$.

2) $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$.

3) $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.u \in F$.

Exemple 1.2.1 ***1.*** *L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :*

(a) $(0, 0) \in F_1$,

(b) $\forall\, (x, y), (x', y') \in F_1$, *on a*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x' + y' = 0 \end{cases},$$

donc

$$(x + x') + (y + y') = 0$$

et ainsi

$$(x + x', y + y') = (x, y) + (x', y') \in F_1.$$

(c) $\forall\, (x, y) \in F_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, *ona*

$$x + y = 0,$$

donc

$$\lambda.x + \lambda.y = 0$$

d'où

$$(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda.\, (x, y) \in F_1.$$

2. *L'ensemble $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_2.*

3. *L'ensemble* $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

En effet les vecteurs $u = (1, 0)$ *et* $v = (0, 1)$ *appartiennent à* F_3*, mais pas le vecteur* $u + v = (1, 1) \notin F_3$.

Proposition 1.2.1 *Soient* F*,* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

- L'intersection $F \cap G$ *est aussi un sous-espace vectoriel de* E.

- La réunion $F \cup G$ *n'est pas en général un sous-espace vectoriel de* E.

Exemple 1.2.2 *Soient* $F_1 = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$*, la réunion* $F_1 \cup F_2 = \{(x, 0), (0, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas un s-e-v de* $\mathbb{R}^2$ *car* $\exists\ (1, 0), (0, 1) \in F_1 \cup F_2$ *mais* $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.2 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. L'ensemble*

$$F + G = \{u + v / u \in F, v \in G\}$$

est appelé somme des sous-espaces vectoriels F *et* G.

Proposition 1.2.2 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. $F + G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois* F *et* G.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.2.3 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.* F *et* G *sont en somme directe dans* E *si*

- $F \cap G = \{0_E\}$.
- $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$.

Si F *et* G *sont en somme directe, on dit que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans* E.

Exemple 1.2.3 *1. Soient* $F = \{(x,0)\,/x \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x,x)\,/x \in \mathbb{R}\}$. *Montrons que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ *:*

(a) Montrons que $F \cap G = \{(0,0)\}$.

Si $(x,y) \in F \cap G$, *alors d'une part* $(x,y) \in F$ *donc* $y = 0$, *et aussi* $(x,y) \in G$ *donc* $x = y$. *Ainsi* $(x,y) = (0,0)$.

(b) Montrons que $F + G = \mathbb{R}^2$.

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$(x,y) = (x-y,0) + (y,y) \in F + G.$$

Proposition 1.2.3 *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

1.3 Combinaison linéaire

Définition 1.3.1 *Soit $n \geq 1$ un entier, soient v_1, v_2, ...,v_n, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme*

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

(où λ_1, λ_2, ...,λ_n sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, ...,v_n.

Les scalaires λ_1, λ_2, ...,λ_n sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.3.1 *Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est colinéaire à v_1.*

Exemple 1.3.1 ***1.*** *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$,* $(3,3,1)$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $(1,1,0)$ *et* $(1,1,1)$ *car on a l'égalité*

$$(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1).$$

2. *Soient $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$. Montrons que $w = (4, -1, 8)$ n'est pas une combinaison linéaire de u et v. L'égalité*

$$(4, -1, 8) = \lambda (1, 2, -1) + \mu (6, 4, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda + 6\mu \\ -1 = 2\lambda + 4\mu \\ 8 = -\lambda + 2\mu \end{cases}.$$

Or ce système n'a aucune solution. Donc il n'existe pas λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = u+v$.

Théorème 1.3.1 *(Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire):*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \textit{ pour tous } u, v \in F \textit{ et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

Preuve. • Supposons que F soit un sous-espace vectoriel. Et soient $u, v \in F$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors par la définition de sous-espace vectoriel :

$$\lambda u \in F \text{ et } \lambda v \in F$$

et ainsi

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

• Réciproquement, supposons que pour chaque $u, v \in F$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.

- Comme F n'est pas vide, soient $u, v \in F$. Posons $\lambda = \mu = 0$. Alors

$$\lambda u + \mu v = 0_E \in F.$$

- Si $u, v \in F$, alors en posant $\lambda = \mu = 1$ on obtient

$$u + v \in F.$$

- Si $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (et pour n'importe quel v , en posant $\mu = 0$), alors

$$\lambda u \in F.$$

■

Théorème 1.3.2 *Soit* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un ensemble fini de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Alors :*

• *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

• *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *(au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$*.*

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par $v_1, v_2, ..., v_n$ et est noté $Vect\,(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Preuve. 1. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

(a) $0_E \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0_{\mathbb{K}}v_1+0_{\mathbb{K}}v_2+...+0_{\mathbb{K}}v_n$.

(b) Si $u, v \in F$, alors $\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}$ tq

$$\begin{cases} u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n \\ v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_n v_n \end{cases},$$

donc$u$

$$+v = (\lambda_1 + \mu_1)\, v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\, v_2 + ... + (\lambda_n + \mu_n)\, v_n \in F.$$

(c) De même,

$$\begin{aligned} \lambda.u &= \lambda.\,(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) \\ &= (\lambda.\lambda_1)\, v_1 + (\lambda.\lambda_2)\, v_2 + ... + (\lambda.\lambda_n)\, v_n \in F. \end{aligned}$$

donc : F est un sous-espace vectoriel.

2. Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire ; il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. ■

1.4 Indépendance linéaire

Définition 1.4.1 *Une famille $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de E est une famille libre ou linéairement indépendante si toute combinaison linéaire nulle*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, ...,\ \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est liée ou linéairement dépendante. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une relation de dépendance linéaire entre les v_j.

Exemple 1.4.1 ***1.*** *Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,-1,0)$, $v_3 = (2,1,1)$. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ?*

On a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre.

2. *Considérons la famille $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$, $v_3 = (2,1,0)$. On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que*

$$\lambda_1 (1,2,3) + \lambda_2 (4,5,6) + \lambda_3 (2,1,0) = 0$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

On calcule que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée.

Théorème 1.4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $F = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de F est combinaison linéaire des autres vecteurs de F.*

Preuve. • Supposons d'abord F liée. Il existe alors une relation de dépendance linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0,$$

avec $\lambda_k \neq 0$ pour au moins un indice k. Donc

$$\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_p v_p,$$

Comme $\lambda_k \neq 0$, on a

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - ... - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} v_p,$$

c'est-à-dire que v_k est combinaison linéaire des autres vecteurs de F.

• Réciproquement, supposons que pour un certain k, on a

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p,$$

alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... - v_k + ... + \lambda_p v_p = 0$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire pour F (puisque $-1 \neq 0$) et ainsi la famille F est liée. ■

Définition 1.4.2 *Soient $v_1, v_2, ..., v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_p$. C-à-d*

$$\forall v \in E,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}\ tq\ v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p.$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ engendre l'espace vectoriel E.

Exemple 1.4.2 *1. Considérons par exemple les vecteurs* $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ *de* $E = \mathbb{R}^3$. *La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est génératrice car tout vecteur* $v = (x,y,z)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *peut s'écrire*

$$(x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1)\,.$$

2. Soit maintenant $v_1' = (2,1)$, $v_2' = (1,1)$ *de* $\mathbb{R}^2$. *Alors* $\{v_1', v_2'\}$ *est aussi une famille génératrice.*

En effet, soit $v = (x,y)$ *un élément quelconque de* $\mathbb{R}^2$. *Montrer que* v *est combinaison linéaire de* $\{v_1', v_2'\}$ *revient à démontrer l'existence de deux réels* λ *et* μ *tels que*

$$v = \lambda v_1' + \mu v_2'.$$

Il s'agit donc d'étudier l'existence de solutions au système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \end{cases}.$$

Il a pour solution

$$\lambda = x - y,\ \mu = -x + 2y$$

et ceci, quels que soient les réels x *et* y *. Ceci prouve qu'il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.*

1.5 Base

Définition 1.5.1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Une famille* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de vecteurs de* E *est une base de* E *si* B *est une famille libre et génératrice.*

Exemple 1.5.1 *1. Les vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *:* $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,...,0)$,..., $e_n = (0,0,...,1)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^n$, *appelée la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $v_1' = (2,1)$, $v_2' = (1,1)$. *Montrons que la famille* $B = \{v_1', v_2'\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

D'aprés l'exemple précédent, B est une famille génératrice, il nous restera à montrer que B est une famille libre. On cherche λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + 0.$$

Ceci conduit au système suivant :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

La famille $\{v_1', v_2'\}$ est donc une famille libre, et par suite, B est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.5.1 *Soit $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de B. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

- *$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées du vecteur v dans la base B.*

Preuve. • Par définition, B est une famille génératrice de E, donc pour tout $v \in E$ il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Cela prouve la partie existence.

• Il reste à montrer l'unicité des $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Soient $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ d'autres scalaires tels que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_n v_n.$$

Alors, par différence on a :

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + ... + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0.$$

Comme B est une famille libre, ceci implique

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0,\ \lambda_2 - \mu_2 = 0, ...,\ \lambda_n - \mu_n = 0$$

et donc

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2, ..., \lambda_n = \mu_n.$$

■

Théorème 1.5.2 *(Théorème de la base incomplète)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.

1. *Toute famille libre L peut être complétée en une base. C'est-à-dire qu'il existe une famille F telle que $L \cup F$ soit une famille libre et génératrice de E.*

2. *De toute famille génératrice G on peut extraire une base de E. C'est-à-dire qu'il existe une famille $B \subset G$ telle que B soit une famille libre et génératrice de E.*

1.5.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.5.2 - *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de dimension finie.*

- La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée $dimE$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E.

Convention. $dim\,\{0\} = 0.$

Exemple 1.5.2 *Puisque $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, alors $dim\mathbb{R}^n = n$.*

Théorème 1.5.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie.

2. $dimF \leq dimE$.

3. $F = E \Leftrightarrow dimF = dimE$.

Preuve. • Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F = \{0\}$ il n'y a rien à montrer. On suppose donc $F \neq \{0\}$ et soit v un élément non nul de F . La famille $\{v\}$ est une famille libre de F, donc F contient des familles libres. Toute famille libre d'éléments de F étant une famille libre d'éléments de E (voir la définition des familles libres), alors comme E est de dimension n, toutes les familles libres de F ont au plus n éléments.

• On considère l'ensemble K des entiers k tels qu'il existe une famille libre de F ayant k éléments :

$$K = \{k \in \mathbb{N} / \exists \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset F \text{ et } \{v_1, v_2, ..., v_k\} \text{ est une famille libre de } F\}$$

Cet ensemble K est non vide (car $1 \in K$) ; K est un sous-ensemble borné de $\mathbb{N}$ (puisque tout élément de K est compris entre 1 et n) donc K admet un maximum. Notons p ce maximum et soit $\{v_1, v_2, ..., v_P\}$ une famille libre de F ayant p éléments.

• Montrons que $\{v_1, v_2, ..., v_P\}$ est aussi génératrice de F. Par l'absurde, s'il existe w un élément de F qui n'est pas dans $Vect\,(v_1, v_2, ..., v_P)$, alors la famille $\{v_1, v_2, ..., v_P, w\}$ ne peut pas être libre (si non p ne serait pas le maximum de K). La famille $\{v_1, v_2, ..., v_P, w\}$ est donc liée, mais alors la relation de dépendance linéaire implique que $w \in Vect\,(v_1, v_2, ..., v_P)$, ce qui est une contradiction.

Conclusion : $(v_1, v_2, ..., v_P)$ est une famille libre et génératrice, donc est une base de F.

• On a ainsi démontré simultanément que :

- F est de dimension finie (puisque $(v_1, v_2, ..., v_P)$ est une base de F).

- Ainsi $dimF = p$, donc $dimF \leq dimE$ (puisque toute famille libre de F a au plus n éléments).

- De plus, lorsque $p = n$, l'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_P\}$, qui est une base de F, est aussi une base de E. Tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de $v_1, v_2, ..., v_P$, d'où $E = F$. ■

Théorème 1.5.4 *(Théorème des quatre dimensions).*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F , G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$

Corollaire 1.5.1 *Si $E = F \oplus G$, alors $dimE = dimF + dimG$.*