Université Oum El Bouaghi

Département de Mathématiques. 2eme année Mayhs S4

Exercices avec solutions

Exercice 0.0.1. *soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* A , B *deux évènements de* $\mathcal{F}$ *tels que* $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ *et* $P(A \cup B) = 0,6$. *Calculer* $P(A \cap B)$, $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, $P\left(\overline{A}/B\right)$ *et* $P\left(B/\overline{A}\right)$.

Solution*.*

$P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ *et* $P(A \cup B) = 0,6$. *alors on a :*

* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,6 = 0,3$

* $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

* $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,3 = 0,1$

* $P\left(\overline{A}/B\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$

* $P\left(B/\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,2}{1-0,4} = \frac{1}{3}$

Exercice 0.0.2. *Quatre hommes déposent leurs chapeaux au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant* 1 *des* 4 *chapeaux. Calculer les probabilités suivantes*

1. *Aucun des* 4 *hommes ne prend son propre chapeau.*
2. *Exactement* 2 *des* 4 *hommes prennent leurs propres chapeaux.*
3. *Chacun prend son propre chapeau*

Solution

Quatre hommes déposent leurs chapeaux au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 *des* 4 *chapeaux. Aolrs on a*

* *L'expérience aléatoire = La distribution des 4 chapeaux sur les 4 hommes au hasard*

* *L'ensemble fondamendal* $\Omega = \{(i, j, k, l)$ *tel que* $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ *et différents deux à deux*$\} =$ *l'ensemble des permutations de 4 éléments (car la répitition n'existe pas et l'ordre est important) (i est le numéro du chapeau pris par le premier homme...) c'est à dire* Ω *est l'ensemble de permutation de* 4 *éléments car l'ordre est important et le répition n'existe pas donc :*

** $card(\Omega) = 4! = 24$ donc Ω est fini alors on prend la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et comme la répartion des chapeaux et au hasard alors les évènement élémentaires sont équiprobables et dans ce cas la probabilité P est définie par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

1. Soit l'évènement : A" Aucun des 4 hommes ne prend son propre chapeau" alors $A = \left\{ \begin{array}{c} (2,1,4,3), (2,4,1,3), (2,3,4,1), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), \\ (4,3,1,2), (4,3,2,1), (4,1,2,3) \end{array} \right\}$ *donc* $card(A) = 9$ *et alors* $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{9}{24}$

2. Soit l'évènement : B "Exactement 2 des 4 hommes prennent leurs propres chapeaux". alors $B = \{(1,2,4,3), (1,4,3,2), (1,3,2,4), (4,2,3,1), (3,2,1,4), (2,1,3,4)\}$ donc $card(B) = 6$ et alors $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{6}{24}$

3. Soit l'évènement : C" Chacun prend son propre chapeau" alors $C = \{(1,2,3,4)\}$donc $card(C) = 1$ et alors $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{1}{24}$

Exercice 0.0.3. *On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes et une femme sur cinq porte des lunettes.*

1. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard ne porte pas des lunettes ?

2. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

3. En déduire la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit un homme ?

Solution

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes et une femme sur cinq porte des lunettes.

** L'expérience aléatoire= On choisit au hasard une personne de la population.*

**Soient les évènements :*

H :"La personne est un homme", F :"La personne est une femme", L :"la personne porte des lunettes"

Comme $H \cap F = \emptyset$ et $\Omega = H \cup F$ alors $\{H, F\}$ est un système complet d'évènements pour Ω

De plus on a : $P(H) = 0,45$, $P(F) = 0,55$, $P(L/H) = \frac{1}{3}$ *et* $P(L/F) = \frac{1}{5}$

1. On cherche à calculer : $P\left(\overline{L}\right)$*? : On applique ici la formule des probabilités totales on obtient :*

$P\left(\overline{L}\right) = P(H)\,P\left(\overline{L}/H\right) + P(F)\,P\left(\overline{L}/F\right) = 0,45\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 0,55\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 0,74$

2. On cherche à calculer $P(F/L)$*? on applique la formule de Bayes on obtient :*

$P(F/L) = \frac{P(F)P(L/F)}{P(L)} = \frac{0,55\times\frac{1}{5}}{1-0,74} = \frac{11}{26}$

3. On cherche à calculer $P(H/L)$*? comme* $H = \overline{F}$ *alors :* $P(H/L) = 1 - P(F/L) = 1 - \frac{11}{26} = \frac{15}{26}$