

### مثال:

بفرض أن البيانات التالية تمثل الطلبات الشهرية لمنتج معين خلال أشهر متتالية كما هو مبين بالجدول التالي:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7
الطلب	35	30	32	40	48	50	65

والمطلوب:

- 1- التنبؤ بالطلب للشهر الخامس باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد ثلاث فترات.
- 2- التنبؤ بالطلب للشهر السابع باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات.
- 3- التنبؤ بالطلب للشهر السادس باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات بالأوزان التالية:

(3) للشهر السابق، 4 قبل شهرين، 2 قبل ثلاثة أشهر، 5 قبل أربعة أشهر).

- 4- التنبؤ بالطلب للشهر الثامن باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات بالأوزان التالية:  
(30% للشهر السابق، 10% قبل شهرين، 40% قبل ثلاثة أشهر، 20% قبل أربعة أشهر).

### الحل:

لحساب الطلب المتوقع به باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة (كما هو مطلوب في النقطتين 1، 2) يتم اتباع القاعدة التالية:

$$MA_t = \frac{\sum_{k=1}^n D_{t-k}}{N}$$

حيث أن:

$MA_t$  = المتوسط المتحرك للفترة المقبلة  $t$

$n$  = مجموع الفترات

$K$  = مؤشر الفترات ( $K=1,2,3,\dots,\in$ )

$N$  = طول المتوسط ( $t > N$ )

$D_{t-k}$  = الطلب الحقيقي للفترة  $t-k$

ويتم الحساب كما هو مبين بالجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	الشهر
65	50	48	40	32	30	3	الطلب
		$\div (40+32+30)$					المتوسط المتحرك للشهر
		$34=3\div 102=3$					الخامس طوله ثلاث فترات
$5\div (50+48+40+32+30)$							المتوسط المتحرك للشهر
$40=5\div 200=$							السابع طوله خمس فترات

ولحساب الطلب المتوقع به باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة المرجح بالأوزان (كما هو مطلوب في النقطتين 3، 4) يتم اتباع القاعدة التالية:

$$WMA_t = \frac{\sum(W_k D_k)}{\sum W_k}$$

حيث أن:

$WMA_t$  = المتوسط المتحرك الموزون للفترة المقبلة  $t$

$W_k$  = الوزن النسبي للفترة  $k$

$D_k$  = الطلب الحقيقي للفترة  $k$

ويتم الحساب كما هو مبين بالجدول التالي:

8	7	6	5	4	3	2	1	الشهر
	65	50	48	40	32	30	35	الطلب
		$(5 \times 30 + 2 \times 32 + 4 \times 40 + 3 \times 48)$						المتوسط المتحرك الموزون للشهر
		$14 \div$						السادس طوله أربع فترات بالأوزان
		$14 \div (150 + 64 + 160 + 144) =$						التالية: (3) للشهر السابق، 4 قبل شهرين،
		$37 = 14 \div 518 =$						2 قبل ثلاثة أشهر، 5 قبل أربعة أشهر).
$\times 48 + 0,10 \times 50 + 0,30 \times 65)$								المتوسط المتحرك الموزون للشهر الثامن
$\%100 \div (0,20 \times 40 + 0,40$								طوله أربع فترات بالأوزان التالية: (30%)
$1 \div (8 + 19,5 + 5 + 19,5) =$								للشهر السابق، 10% قبل شهرين، 40%
$51,7 = \%100 \div 518 =$								قبل ثلاثة أشهر، 20% قبل أربعة أشهر).
$518 =$								وحدة تقريبا

أ- الأساليب السببية Casual Methods: ومنها الانحدار الخطي Linear

Regression والانحدار المتعدد Multiple Regression

وتعد من أكثر الطرق فعالية للتنبؤ بالطلب، وتستخدم عندما تتوفر معلومات كثيرة عن العلاقة بين الطلب ومجموعة من العوامل الداخلية والخارجية التي يمكن أن تؤثر في الطلب

### الانحدار الخطي Linear Regression

تفترض هذه الطريقة أن الطلب يحدث بسبب واحد أو أكثر من المتغيرات، ويطلق علي الطلب تسمية المتغير التابع Dependent Variable أما العامل أو العوامل التي تسبب الطلب فتطلق عليها تسمية العوامل المستقلة Independent Variables، وتستخدم المعادلة التالية لوصف العلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل والآخر تابع:

$$Y = a + bX$$

أما الثابتان  $a$  و  $b$  فيحسبان بطريقة المربعات الصغرى 'Least Squares Method' وذلك كما يلي:

$$b = \frac{\sum XY - n \bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n\bar{X}^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$$

- ويطلق علي  $a$  ثابت الانحدار، وقيمته تعني قيمة المتغير التابع عندما تكون قيمة المتغير المستقل صفراً. وهي تمثل نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي (الذي يمثل المتغير التابع).

- ويطلق علي  $b$  ميل خط الانحدار، وقيمته تعني قيمة التغير في المتغير التابع عندما يتغير المتغير المستقل بواقع الوحدة.

ويتم حساب معامل الارتباط ( $r$ ) من خلال المعادلة التالية:

$$r = \frac{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}{\sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

ويتم تحديد نوع العلاقة من خلال إشارة معامل الارتباط، فإذا كانت الإشارة موجبة دل ذلك علي أن العلاقة طردية، وإذا كانت الإشارة سالبة دل ذلك علي أن العلاقة عكسية.

وعند تفسير قيمة معامل الارتباط الخطي المحسوب من بيانات العينة، فلا توجد قواعد ثابتة وإنما تخضع لعملية التقريب والتي تعتمد في الأساس علي مجال الدراسة، وقد جرت العادة أن يتم الحكم علي معامل الارتباط بطريقة تقترب من ما ذكر في الجدول التالي:

العلاقة بين المتغيرين (المستقل والتابع)	قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين
لا توجد علاقة	$ 0.00  \leq r <  0.25 $
ضعيفة	$ 0.25  \leq r <  0.50 $
متوسطة	$ 0.50  \leq r <  0.75 $
قوية	$ 0.75  \leq r <  0.90 $
قوية جداً	$ 0.90  \leq r <  1.00 $

**مثال:**

فيما يلي 5 مشاهدات من الطلب الفعلي لمنتجين يعتمد أحدهما Y علي مبيعات الآخر X:

المشاهدة	الطلب الفعلي للمنتج X	الطلب الفعلي للمنتج Y
1	55000	149000
2	15000	46000
3	30000	75000
4	50000	135000
5	65000	18000

والمطلوب:

- 1- ايجاد معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين الطلب علي المنتجين؟
- 2- ما هو نوع العلاقة ودرجة قوتها بين المتغيرين؟
- 3- ما هي قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب علي المنتج X بواقع 70000 وحدة؟
- 4- ماهو مقدار ثابت الانحدار وميل خط الانحدار وبم تفسر كل منهما بالنسبة للطلب علي المنتجين سالف الذكر؟

### الحل

الصيغة العامة معادلة الانحدار الخطي كما يلي:

$$Y = a + bX$$

وتحدد قيمة الثابتين a و b بطريقة المربعات الصغرى Least Squares Method، وذلك كما يلي:

$$b = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$r = \frac{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}{\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

ويبين الجدول التالي قيمة مفردات المعادلات حتي يتسنى احتساب قيمة a و b و r مع مراعاة أن القيم بالألف وحدة:

المشاهدة	X بالألف وحدة	Y بالألف وحدة	X <sup>2</sup>	XY	Y <sup>2</sup>
----------	---------------	---------------	----------------	----	----------------

22201	8195	3025	149	55	1
2116	690	225	46	15	2
5625	2250	900	75	30	3
18225	6750	2500	135	50	4
32400	11700	4225	180	65	5
80567	29585	10875	586	215	المجموع

$$\bar{X} = 215 \div 5 = 43 \text{ ألف وحدة}$$

$$\bar{Y} = 586 \div 5 = 117 \text{ ألف وحدة}$$

$$b = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum x^2 - n \bar{x}^2}$$

$$2,72 = \frac{4430}{1630} = \frac{25155 - 29585}{9245 - 10875} = \frac{117 \times 43 \times 5 - 29585}{2(43) \times 5 - 10875} = B$$

$$a = \bar{Y} - b \bar{X}$$

$$0,04 = 116,96 - 117 = 2,72 \times 43 - 117 =$$

وبذلك تكون معادلة خط الانحدار كما يلي:

$$Y = 0.04 + 2.72 X$$

ويطلق علي a ثابت الانحدار، وقيمته 0,04 تعني قيمة المتغير التابع (الطلب علي المنتج Y) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (الطلب علي المتغير المستقل X) مساويا للصفر. وهي تمثل نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي (الذي يمثل المتغير التابع).

- ويطلق علي b ميل خط الانحدار، وقيمته 2,72 تعني قيمة التغير في المتغير التابع (الطلب علي المنتج Y) عندما يتغير المتغير المستقل (الطلب علي المتغير المستقل X) بواقع الوحدة.

ولمعرفة نوع ودرجة قوة العلاقة بين المتغيرين التابع والمستقل يتم حساب قيمة معامل الارتباط من خلال المعادلة التالية:

$$r = \frac{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}{\sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5 \times 10875 - 125^2}}{\sqrt{5 \times 80567 - 586^2}} = \frac{\sqrt{54375 - 15625}}{\sqrt{402835 - 343396}} = \frac{\sqrt{38750}}{\sqrt{59439}} = \sqrt{0.652} \approx 0.8$$

وعلي ذلك فإن العلاقة بين الطلب علي المنتجين تتصف بما يلي:

- نوعها طردية لكون إشارة معامل الارتباط موجبة.

- درجتها قوية لكون قيمة معامل الارتباط 0,8 تقريبا وهي تقع بين 0,75 و 0,90

وللحصول على قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب على المنتج X بواقع 70000 وحدة يتم التعويض في معادلة خط الانحدار كما يلي:

$$Y=0,04 + 2.72 \times 70000 = 0,04 + 190400 \approx 90400.04$$

### مثال

إذا كانت المجاميع التالية خاصة ببيانات عينة من 20 مشاهدة من الطلب الفعلي لمنتجين يعتمد أحدهما Y علي مبيعات الآخر X:

$$\sum x = 145$$

$$\sum x^2 = 1250$$

$$\sum Y = 980$$

$$\sum xy = 2450$$

### والمطلوب:

- 1- ايجاد معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين الطلب علي المنتجين؟
- 2- ما هو نوع العلاقة ودرجة قوتها بين المتغيرين؟
- 3- ما هي قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب علي المنتج X بواقع 10 وحدة؟
- 4- ما هو مقدار ثابت الانحدار وميل خط الانحدار وبم تفسر كل منهما بالنسبة للطلب علي المنتجين سالف الذكر؟