République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et d'informatique

1ère année Master Mathématiques Appliquées, 2021-2022

Méthodes Numériques pour EDO et EDP

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 01H30mn. Coefficients : 2. Crédits : 5

Le 13-02-2022 de 9h à 10h30

Exercice 1 *(6 pts. 27mn)* ***Questions du cours.***

1. *Énoncez le théorème de Lax-Milgram et détaillez chaque hypothèse (Qu'est-ce qu'elles signifient mathématiquement).*
2. *Donnez la définition de* $H^1(\Omega)$.
3. *Énoncez la formule de Green pour deux fonctions* u *et* v *dans un ouvert* Ω.
4. *Énoncez le théorème de l'inégalité de Poincaré.*

Exercice 2 *(14 pts. 63mn)* *On pose* $I =]0,1[$. *Soit* $f \in L^2(I)$.

1. *Montrer qu'il existe un unique* $y \in \mathcal{V} = H^1(I)$ *tel que*

$$\int_I y'v'dx + 2\int_I yvdx + y(0)v(0) = \int_I fvdx, \forall v \in H^1(I).$$

2. *Déterminer le problème aux limites doit la solution faible est* y.

   On pose $h = \frac{1}{2}$. *On note* $\mathcal{V}_h$ *l'espace des fonctions* v_h *affines sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *et continues sur* $[0,1]$.

3. *Donner la dimension de* $\mathcal{V}_h$.
4. *Écrire le système linéaire qui permet de déterminer une solution approchée du problème résolu dans la première question. Détailler les calculs dans le cas où* f *est une fonction constante.*
5. *Donner une borne supérieure de l'erreur*

$$\|y - y_h\|_{H^1(I)}.$$

<u>Solution</u> 1

1. Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)_{\mathcal{V}}$ et d'une norme $\|.\|_{\mathcal{V}}$.
Soit la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{V} : a(y,v) = l(v) \end{cases}$$

Sous les hypothèses suivantes, la formulation variationnelle admet une unique solution:
• a est une forme bi-linéaire sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et l une forme linéaire sur $\mathcal{V}$.
• a est continue : $\exists C > 0$ tel que $\forall y, v \in \mathcal{V}, |a(y,v)| \leq C \|y\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}$.
• a est coercive : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall y \in \mathcal{V}, a(y,y) \geq \alpha \|y\|_{\mathcal{V}}^2$.
• l est continue : $\exists M > 0$ tel que $\forall y \in \mathcal{V}, |l(y)| \leq M \|y\|_{\mathcal{V}}$.. . . . . **(1.5 pts)**

2. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, nous avons alors :

$$H^1(\Omega) = \left\{ y \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla y \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \right\}.$$

. . . . **(1.5 pts)**

3. Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour toutes fonctions $y \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et $v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ on a :

$$\int_\Omega \Delta y(x) v(x) dx = -\int_\Omega \nabla y(x).\nabla v(x) dx + \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \eta}(x) v(x) d\Gamma,$$

où $\frac{\partial y}{\partial \eta}(x) = \nabla y(x).\eta(x)$ (dérivée normale de y). . . . . **(1.5 pts)**

4. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, nous avons alors :

$$\exists C > 0, \forall y \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|y\|_{H^1(\Omega)}.$$

. . . . **(1.5 pts)**

<u>Solution</u> 2

1. Posons

$$\mathcal{V} = H^1(I), a(y,v) = \int_I y'v'dx + 2\int_I yvdx + y(0)v(0); \langle l, v\rangle = \int_I fvdx, \forall (y,v) \in \mathcal{V}^2,$$

et montrons que toutes les conditions du théorème de **Lax-Milgram** sont satisfaites.
- $\forall (y', v') \in L^2(I)^2 \Longrightarrow y'v' \in L^1(I)$ et $\left|\int_I y'v'dx\right| \leq \|y'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \leq \|y\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}$.
$\forall (y,v) \in L^2(I)^2 \Longrightarrow yv \in L^1(I)$ et $\left|\int_I yvdx\right| \leq \|y\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|y\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}$.
$(y(0), v(0)) \in \mathbb{R}^2$ et $|y(0)v(0)| \leq |y(0)||v(0)| \leq C_I \|y\|_{H^1(I)} C_I \|v\|_{H^1(I)} = C_I^2 \|y\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}$.

On en déduit que

$$|a(y,v)| \leq \left(3 + C_I^2\right) \|y\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}, \forall (y,v) \in \mathcal{V}^2.$$

.... **(2 pts)**

La bilinéaire de $a(.,.)$ **étant claire,** on conclut qu'elle est une **forme bilinéaire continue sur** $\mathcal{V}^2$**.**

- Pour tout $y \in \mathcal{V}$, on a $a(y,y) = \int_I (y')^2 dx + 2\int_I y^2 dx + (y(0))^2 \geq \int_I (y')^2 dx + 2\int_I y^2 dx = \|y'\|^2_{L^2(I)} + 2\|y\|^2_{L^2(I)} \geq \|y'\|^2_{L^2(I)} + \|y\|^2_{L^2(I)} = \|y\|^2_{H^1(I)}$,

$$a(y,y) \geq \|y\|^2_{H^1(I)},$$

.... **(2 pts)**

donc $a(.,.)$ **est coercive sur** $\mathcal{V}$**.**

- Pour tout $v \in \mathcal{V}$, on a $(f,v) \in L^2(I)^2 \Longrightarrow fv \in L^1(I)$ et

$$|\langle l, v\rangle| = \left|\int_I fv dx\right| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H^1(I)}, \forall v \in \mathcal{V}.$$

.... **(1 pt)**

La linéarité de l étant évidente, on déduit qu'elle est une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}$, i.e. $l \in \mathcal{V}'$.

On conclut ainsi qu'il existe un unique $y \in H^1(I)$ tel que

$$\int_I y'v' dx + 2\int_I yv dx + y(0)v(0) = \int_I fv dx, \forall v \in H^1(I). \tag{1}$$

2. En utilisant (1) et appliquant la formule d'intégration par parties (au sens inverse), on obtient :

$$-\int_I y''v dx + (y'(1)v(1) - y'(0)v(0)) + 2\int_I yv dx + y(0)v(0) = \int_I fv dx, \forall v \in H^1(I).$$

Tenant compte du fait que $-y'' + 2u = f$ [1](comme $(y,f) \in L^2(I)^2$ donc $y'' = 2y - f \in L^2(I)$, donc $y \in H^2(I)$), ceci devient :

$$y'(1)v(1) + (-y'(0) + y(0))v(0) = 0, \forall v \in H^1(I).$$

- On conclut que y est la solution faible du problème de Robin :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y'' + 2y & = & f \text{ dans } I, \\ y'(0) & = & y(0), \\ y'(1) & = & 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

.... **(3 pts)**

[1]On a $\mathcal{D}(I) \subset H^1(I)$ et, en utilisant (1) et le fait que les fonctions dans $\mathcal{D}(I)$ sont nulles sur ∂I, d'où $-y'' + 2y = f$ dans I, au sens des distributions.

3. Une base de l'espace discret $\mathcal{V}_h$ est formée des fonctions ϕ_i, pour $i \in \{0, 1, 2\}$ définies par :

   $\phi_0(x) = -2x + 1, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   $\phi_1(x) = 2x, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\phi_1(x) = -2x + 2, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   $\phi_2(x) = 2x - 1, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   Donc, $\dim \mathcal{V}_h = 3$.. .... **(1.5 pts)**

4. La solution discrète y_h est de la forme : $y_h = \sum_{i=0}^{2} y_i \phi_i(x)$, où les coefficients y_i sont solutions du système linéaire suivant : $AY = b$, avec les notations :

$$\begin{aligned}
Y &= (y_0, y_1, y_2)^T, \\
A &= (a_{ij})_{0 \le i,j \le 2}, a_{ij} = a\left(\phi_i, \phi_j\right) = \int_0^1 \left(\phi_i' \phi_j' + 2\phi_i \phi_j\right)(x)\, dx + \phi_i(0)\, \phi_j(0), \\
b &= (b_i)_{0 \le i \le 2}, b_i = \int_0^1 f(x)\, \phi_i(x)\, dx.
\end{aligned}$$

   .... **(1.5 pts)**

   La matrice A est symétrique ; elle a trois diagonales non nulles, donc dans le cas où f est une fonction constante (i.e, $\forall x \in [0, 1] : f(x) = \overline{f}$). Alors les éléments non nuls de A sont données par :

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \frac{10}{3}, a_{11} = \frac{14}{3} \text{ et } a_{22} = \frac{7}{3}. \\
a_{01} &= a_{10} = \frac{-11}{6} \text{ et } a_{12} = a_{21} = \frac{-11}{6}
\end{aligned}$$

   Le second membre vaut :

$$b_0 = \frac{1}{4}\overline{f}, b_1 = \frac{1}{2}\overline{f} \text{ et } b_2 = \frac{1}{4}\overline{f}.$$

   .... **(2 pts)**

5. Soit $y \in \mathcal{V}$ une solution de (1). Soit $I_h y$ l'interpolée de y dans $\mathcal{V}_h$, Donc,

$$\|y - y_h\|_{\mathcal{V}} \le C \|y - I_h y\|_{\mathcal{V}},$$

   où C est la racine carrée du rapport de la constante de continuité sur la constante de coercitivité, c-à-d. $C = \sqrt{3 + C_I^2}$.. .... **(1 pt)**

   De plus, $y \in H^2(I)$:

$$\|y - y_h\|_{\mathcal{V}} \le Ckh \|y''\|_{L^2(I)},$$

   Donc,

$$\|y - y_h\|_{L^2(I)} \le Ch^2 \|y''\|_{L^2(I)}, \text{ où } k \simeq \sqrt{1 + h}.$$

<u>*Dr. I. Rezzoug*</u>