c1

Présentation du cours d'Analyse Fonctionnelle

Analyse Fonctionnelle signifie ici analyse sur des espaces de fonctions. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'est développé dans la première moitié du 20ème siècle grâce en particulier aux travaux de M. Fréchet, S. Banach, D. Hilbert.
L'analyse classique enseignée jusqu'en licence porte essentiellement sur des espaces de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cela convient par exemple pour résoudre des équations différentielles linéaires. Pour résoudre des équations plus compliquées : équations différentielles non linéaires, équations int'egrales, équations aux dérivées partielles, les solutions sont à rechercher à priori dans des espaces vectoriels de dimension infinie. Le calcul de solutions explicites étant souvent hors de portée on cherche à décrire la structure de ces solutions par leur appartenance à des espaces adaptés au problème posé. L'étude de la stabilité amène naturellement à considérer des espaces munis de topologies définies par des normes, des semi-normes ou des distances.

Un exemple spectaculaire de l'efficacité de l'analyse fonctionnelle a été l'introduction des espaces de Sobolev (1935) et l'invention par L. Schwartz de la théorie des distributions (1945-1950). Ces espaces ont permis de faire de grands progrès dans la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles et fournissent les principaux outils encore utilisés actuellement dans ce domaine aussi bien pour les études théoriques que numériques.

D'un point de vue purement mathématique ont peut aussi voir l'analyse fonctionnelle comme une extension à la dimension infinie de la géométrie euclidienne en dimension finie.
Le passage de la dimension finie à la dimension infinie n'est pas toujours facile car on perd une partie de l'intuition géomètrique. Alors que sur un espace vectoriel de dimension finie il y a une seule topologie “raisonnable”, sur un espace de dimension infinie on doit souvent considérer plusieurs topologies simultanément. C'est l'une des difficultés à surmonter pour le débutant qui devra s'entrainer à cet exercice sur les exemples proposés dans le cours et en travaux dirigés.

Comme souvent en mathématiques l'étude de nouvelles structures est indissociable de l'étude des transformations entre les espaces. Ici nous étudierons donc les propriétés des transformations linéaires continues entre espaces vectoriels munis de topologies.
Ce domaine d'apparence abstraite a beaucoup d'applications concrètes, notamment en physique quantique. C'est d'ailleurs en partie pour donner un cadre mathématique adapté à la théorie quantique que D. Hilbert et J. von Neumann ont développé la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert.

Pour terminer cette introduction je voudrais insister sur le point suivant.
L'analyse fonctionelle étudie des concepts généraux, parfois loin de l'intuition géométrique, mais dont l'efficacité a été prouvée depuis presque un siècle. Pour se familiariser en profondeur avec ses méthodes il faut constamment faire des aller-retour entre les concepts, les résultats généraux, d'une part, et les exemples qui les ont motivés d'autre part. Autrement dit il est indispensable pour comprendre le cours de résoudre des problèmes ou exercices (c'est bien sûr vrai pour l'ensemble des mathématiques !).
Les exemples et les problèmes d'analyse fonctionnelle utilisent souvent la théorie de l'intégration et l'analyse de Fourier. C'est pourquoi le dernier chapitre du cours (c6) est une annexe rappelant les principaux résultats utiles sur ces sujets.

Dernier conseil : un cours ne s'apprend pas nécessairement de façon linéaire. Après une première lecture, on peut commencer à faire des exercices puis revenir sur le cours pour l'approfondir puis retour sur les exercices et ainsi de suite. Il ne faut jamais perdre de vue que *faire des mathématiques c'est poser et résoudre des problèmes.*
Je recommande aussi pour compléter le cours, la lecture au moins partielle, des livres mentionnés dans la bibliographie ou d'autres que vous trouverez à la BU.

Plan du cours

Bibliographie pour l'ensemble du cours

1. H. Brézis Analyse fonctionnelle théorie et applications Masson fr Paris 1983 Collection Mathematiques Appliquées pour la Maîtrise
2. J. Dieudonné. Eléments d'analyse. T. I -fondements de l'analyse moderne Gauthier-Villars fr Paris 1968.
3. F. Riesz, B. Nagy. Leçons d'analyse fonctionnelle Akademiai Kiado hu Budapest 1955 Acadmie des Sciences de Hongrie
4. W. Rudin, Analyse réelle et complexe, édition Masson, 1975.
5. S. Banach. Théorie des opérations linéaires, Chealsea publishing company.
6. S. Lang, Analysis II Addison-Wesley publishing company us Massachusetts 1969 Addison-Wesley series in mathematics.

Nantes, le 20 juillet 2005, Didier ROBERT

email : didier.robert@univ-nantes.fr

1.1 Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. $\bar{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\lambda \in \mathbb{C}$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur K. On appelle semi-norme sur $\mathcal{E}$ toute application $u \mapsto \|u\|$ de $\mathcal{E}$ dans $[0, +\infty[$ vérifiant :*
(N-1) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{E}$
(N-2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \ \forall u, v \in \mathcal{E}.$
(N-3) $\|0\| = 0.$
On appelle norme toute semi-norme vérifiant de plus :
(N-4) $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$. *(condition de séparation)*
On appelle espace vectoriel normé tout espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme.

Tout espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ est muni d'une distance canonique ($d(u, v) = \|u - v\|$ qui en fait un espace métrique et donc un espace topologique.
Une semi-norme définit également une topologie qui n'est pas nécessairement séparée. Les ouverts $\mathcal{U}$ de cette topologie sont caractérisés par la propriété suivante :

$$\forall u \in \mathcal{U}, \ \ \exists \varepsilon > 0, \ \{v \in \mathcal{E} \ \|u - v\| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}$$

Définition 1.2 (normes équivalentes) *Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et 2 normes sur $\mathcal{E}$, $\| \bullet \|_1$, $\| \bullet \|_2$. On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe $c > 0$, $C > 0$ telles que*

$$c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C\|u\|_1, \ \ \forall u \in \mathcal{E}$$

Deux normes équivalentes définissent deux métriques équivalentes et donc des topologies identiques sur $\mathcal{E}$. Les exemples suivant seront traités en exercice. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ entier. Pour $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{1/p}$, pour $p \geq 1$ réel et si $p = \infty$, $\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \cdots, |u_n|\}$.
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\| \bullet \|_p$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ équivalentes entre-elles.

Soit K un espace compact. On désigne par $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose, pour $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$.
$\| \bullet \|_\infty$. On définit ainsi une norme sur $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$.
Sur $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ on peut également considérer $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. $\| \bullet \|_1$ est une norme. $\| \bullet \|_1$ et $\| \bullet \|_\infty$ sont des normes comparables mais non équivalentes. C'est un phénomène propre à la dimension infinie, puisqu'en dimension finie on a le résultat suivant.

Proposition 1.3 *Sur tout espace vectoriel $\mathcal{E}$ de* dimension finie *toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration : voir exercice td1.
On sait que la boule unité fermée d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte. Inversement on a

Théorème 1.4 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée de $\mathcal{E}$ est compacte alors $\mathcal{E}$ est de dimension finie.*

Démonstration :
Désignons par B la boule unité de $\mathcal{E}$ et par $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r. Il résulte de la compacité, qu'il existe $a_1, \cdots, a_n \in B$ tels que

$$B \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n} B(a_j, 1/2)$$

Désignons par V le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Montrons que $V = \mathcal{E}$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $b \in \mathcal{E}$, $b \notin V$. Or V est fermé (c'est une conséquence de l'équivalence des normes sur V) donc $\mathrm{dist}(b, V) = \delta > 0$. Il existe donc $c \in V$ tel que $\delta \leq \|b - c\| \leq \frac{3\delta}{2}$. Posons $u = \frac{b-c}{\|b-c\|}$. Il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $\|u - a_i\| \leq 1/2$. D'autre part on a

$$b = c + \|b - c\|u = c + \|b - c\|a_i + \|b - c\|(u - a_i)$$

où $c + \|b - c\|a_i \in V$ et $\|b - c\|(u - a_i)\| \leq 3\delta/4$. Ce qui implique $\mathrm{dist}(b, V) \leq 3\delta/4$, ce qui contredit la définition de δ.$\square$

Définition 1.5 *On appelle espace de Banach sur $\mathbb{K}$ tout espace vectoriel normé $\{\mathcal{E}, \| \bullet \|\}$ complet pour la métrique associée à la norme.*

Par exemple, on montrera en exercice que $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ entier est un espace de Banach ainsi que $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$ pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.

Pour faire de l'analyse efficace il est souvent préférable de travailler dans des espace de Banach. On peut s'y ramener en raison du résulat de complétion suivant, conséquence du théorème de complétion des espaces métriques vu en Licence.

Théorème 1.6 *Soit $(\mathcal{E}, \| \bullet \|)$ un espace vectoriel normé. Il existe alors un espace de Banach $\hat{\mathcal{E}}$, muni d'une norme $||| \bullet |||$, unique à isométrie bijective près et une isométrie $j; \mathcal{E} \xrightarrow{j} \widehat{\mathcal{E}}$ tels que $j(\mathcal{E})$ est dense dans $\hat{\mathcal{E}}$.*

1.2 Applications linéaires continues

Considérons deux espaces de Banach, $\mathcal{E}_i, \|\bullet\|_i$, $i = 1, 2$ et une application linéaire $A : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$.

Proposition 1.7 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) A est continue sur $\mathcal{E}_1$.
(ii) A est continue en 0.
(iii) Il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{E}_1$ on a $\|Au\|_2 \leq C\|u\|_1$.

Démonstration :
Il suffit de montrer que (ii) entraîne (iii), les autres propriétés étant immédiates.
Il résulte de la continuité en 0, qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|u\|_1 \leq \eta \Rightarrow \|Au\|_2 \leq 1$$

Maintenant pour $u \neq 0$ on applique l'inégalité précédente à $v = \frac{u}{\|u\|_1}\eta$ et on obtient (iii) avec $C = \frac{1}{\eta}$. □

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$. Suivant la proposition précédente, on pose

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|Au\|_2}{\|u\|_1},\ u \neq 0\} = \sup\{\|Au\|_2;\ \ \|u\|_1 = 1\} = \sup\{\|Au\|_2,\ \ \|u\|_1 \leq 1\}$$

Ces égalités se vérifient facilement.

Proposition 1.8 *$\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est un espace vectoriel et $\| \bullet \|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.*
Si $\mathcal{E}_2$ est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est un espace de Banach.

Démonstration :
Il est clair que $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est un espace vectoriel. Le lecteur vérifiera que $\| \bullet \|$ est une norme. Montrons que $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est complet.
Soit $\{A_n\}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Alors pour tout $u \in \mathcal{E}_1$, $A_n u$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}_2$ et converge donc vers un élément noté Au de $\mathcal{E}_2$. On vérifie facilement que A est une application linéaire. Montrons que A est continue. Posons $C = \sup_n \|A_n\|$. $C < +\infty$ car toute suite de Cauchy est bornée. Or on a $\|A_n u\|_2 \leq C\|u\|_1$. D'où en passant à la limite, $\|Au\|_2 \leq C\|u\|_1$. Pour conclure il reste à montrer que A_n *converge vers A au sens de la norme $\| \bullet \|$.*
Pour tout $\varepsilon > 0$; il existe N_ε tel que pour tout $u \in \mathcal{E}_1$ et tous $n, m \geq N_\varepsilon$ on a :

$$\|A_n u - A_m u\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_1$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient

$$\|A_n u - Au\|_2 \leq \varepsilon\|u\|_1$$

et donc $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$.□

Un cas particulier important est celui où $\mathcal{E}_2 = \mathbb{K}$.

Définition 1.9 *On appelle dual topologique de l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ l'espace de Banach $\mathcal{E}' = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur $\mathcal{E}$.*

1.3 Opérations sur les espaces de Banach

Dans cette section nous étudions les opérations suivantes sur les espaces de Banach : produits (et applications multilinéaires), quotients, sommes directes.

Proposition 1.10 (produit) *Soient n espaces de Banach, $\mathcal{E}_1, \cdots \mathcal{E}_n$. Le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ est un espace de Banach pour la norme $\|u\| = \max\{\|u\|_1, \cdots, \|u\|_n\}$, où $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $u_j \in \mathcal{E}_j$.*
Une telle norme est appelée norme produit et définit sur $\mathcal{E}$ la topologie produit.
Les projections $\pi_k : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_k$, $\pi_k(u) = u_k$ sont des applications linéaires, continues, de norme ≤ 1.
Toute application T, n-linéaire, de $\mathcal{E}$ dans un espace vectoriel normé $\mathcal{G}$, est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $u_j \in \mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq n$,

$$\|T(u_1, \cdots, u_n)\|_{\mathcal{G}} \leq C\|u_1\|_1 \cdots \|u_n\|_n \tag{1.1}$$

Démonstration :
(Le lecteur la fera à titre d'exercice au moins pour le cas $n = 2$). $\square$

Un cas particulier important de structure produit est le cas d'une somme directe dans une espace normé.

Définition 1.11 *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E} = F \oplus G$. On dit que que l'espace normé $\mathcal{E}$ est la somme directe topologiqe de F et de G (munis de la norme induite) si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est bicontinue de $F \times G$ sur $\mathcal{E}$.*
Dans ce cas on dit que F et G sont supplémentaires topologiques l'un de l'autre.

Proposition 1.12 *Soient n espaces vectoriels $\mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq n$. Alors l'application $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \mapsto A_{n-1} \cdot A_{n-2} \cdots \cdot A_1$ est n-linéaire continue de*

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \times \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}_n)$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_n)$ et on a

$$\|A_{n-1} \cdot A_{n-2} \cdots A_2 \cdot A_1\| \leq \|A_{n-1}\| \cdot \|A_{n-2}\| \cdots \|A_1\|$$

Démonstration :
On commence par le cas $n = 3$ et c'est alors une conséquence de la définition de la norme d'une application linéaire. On conclut par une récurrence sur n. $\square$

Proposition 1.13 (quotient) *Soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach et $\mathcal{G}$ un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}$. Alors l'espace quotient $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est un espace de Banach pour la norme quotient définie par*

$$|||\dot{u}||| = \inf\{\|v\|;\ v \in \dot{u}\} = \mathrm{d}(u, \mathcal{G})$$

où $\dot{u}$ désigne classe d'équivalence de $u \in \mathcal{E}$, et $\mathrm{d}(u, \mathcal{G})$ désigne la distance de u à $\mathcal{G}$ (i.e $\mathrm{d}(u, \mathcal{G}) = \inf\{\|u - v\|,\ \ v \in \mathcal{G}\}$).
De plus la surjection $u \mapsto \dot{u}$ est continue de norme ≤ 1.

Démonstration :
On a clairement $\inf\{\|v\|;\ v \in \dot{u}\} = \mathrm{d}(u, F)$. On en déduit facilement que $||| \bullet |||$ est une semi-norme.
Or $\mathcal{G}$ étant fermé, on en déduit (exercice de Licence) que $\mathrm{d}(u, \mathcal{G}) = 0$ si et seulement si $u \in \mathcal{G}$. On en déduit alors que $||| \bullet |||$ est une norme.
Le lecteur montrera en exercice que $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est complet.$\square$
Cette proposition s'étend facilement au cas des espaces vectoriels munis d'une semi-norme pour en faire un espace normé (comme par exemple pour les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ en théorie de l'intégration, voir Annexe).

Proposition 1.14 *Soit $\mathcal{E}$ un espace semi-normé pour une seminorme $| \bullet |$. Alors $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{E},\ |u| = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}$ et l'espace quotient $\mathcal{E}/\mathcal{N}$ est un espace vectoriel normé pour la norme quotient définie par*

$$\|\dot{u}\| = \inf\{|v|;\ v \in \dot{u}\} = \mathrm{d}(u, \mathcal{N})$$

$\mathcal{E}/\mathcal{N}$ est appelé espace vectoriel normé séparé associé à $\mathcal{E}$.
Si de plus $\mathcal{E}$ est complet pour la semi-norme $| \bullet |$ (la notion de suite de Cauchy conserve un sens et complet signifie que toute suite de Cauchy admet au moins une limite) alors $\mathcal{E}/\mathcal{N}$ est un espace de Banach.

1.4 Séries et familles sommables dans les espaces de Banach

Ce paragraphe sera développé dans le chapitre suivant sur les espaces de Hilbert. Il est motivé par des applications diverses : exponentielle d'applications linéaires, inversibilité, résolvantes et spectres.
Dans ce paragraphe on fixe un espace de Banach $\mathcal{E}$ pour une norme $\| \bullet \|$ et Λ un ensemble non vide qui joue le rôle d'un ensemble d'indices (la plupart du temps Λ sera un ensemble fini ou dénombrable :($\mathbb{N}, \mathbb{Z}$).)
On désigne par $\Phi[\Lambda]$ l'ensemble des parties finies de Λ.

Définition 1.15 *On dit que la famille $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ est sommable, de somme $S \in \mathcal{E}$, si la condition suivante est réalisée :*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0;\ \exists B_\varepsilon \in \Phi[\Lambda],\ \text{tel que}\ \{C \in \Phi[\Lambda],\ B_\varepsilon \subseteq C\} \quad \Rightarrow \\ \|S - \sum_{\alpha \in C} u_\alpha\| \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.2}$$

On montrera en exercice que $\{\alpha \in \Lambda,\ \|u_\alpha\| \neq 0\}$ est dénombrable et que l'on peut donc se ramener au cas où Λ est dénombrable.

Pour les familles de nombres réels posititifs on a la caractérisation suivante qui se démontre comme pour les séries.

Proposition 1.16 *Soit $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de nombres réels positifs. Alors elle est sommable si et seulement si on a*

$$S_\infty = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in A} u_\alpha,\ A \in \Phi[\Lambda] \right\} < +\infty$$

et S_∞ est la somme de la famille.

Définition 1.17 *On dit que la famille $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ est absolument sommable (ou normalement sommable) si $\{\|u_\alpha\|\}_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille sommable de nombres réels.*

Théorème 1.18 *Dans un espace de Banach toute famille absolument sommable est sommable.*

Démonstration :
On a remarqué que l'on peut supposer Λ dénombrable. On peut alors écrire $\Lambda = \cup_{n\geq 1}\Lambda_n$, où Λ_n est une suite croissante de parties de Λ de cardinal n. Posons alors $S_n = \sum_{j\in\Lambda_n} u_j$. Par hypothèse on a $\sum_{j\in\Lambda}\|u_j\| < +\infty$. On en déduit facilement que S_n est une suite de Cauchy, donc convergente. Posons $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Il faut maintenant prouver que la famille est bien sommable de somme S.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\sum_{j\in\Lambda_n} u_j - S\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Soit alors $C \in \Phi[\Lambda]$ telle que $\Lambda_{N_\varepsilon} \subseteq C$. Il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $C \subseteq \Lambda_{N_\varepsilon+p}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on démontre alors que

$$\|\sum_{j\in C} u_j - S\| \leq 3\varepsilon$$

□

1.5 Opérateurs inversibles

Définition 1.19 *On dit qu'une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est inversible si A est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui même et si A^{-1} est continue*[1].
On désigne par $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ l'ensemble des applications linéaires inversibles A de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Remarque 1.20 *$\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est un groupe pour le composition des applications.*

[1] on verra plus loin que pour les espaces de Banach cette dernière condition est superflue

Théorème 1.21 *Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach.*
(i) Si $A\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\|A\| < 1$ alors $\mathbb{1} - A$ est inversible et on a

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n, \tag{1.3}$$

la série étant normalement convergente.
(ii) $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est une partie ouverte de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Démonstration :
On a $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et puisque $\|A\| < 1$ la série de terme général A^n est bien normalement convergente. Posons $B = \sum\limits_{n\geq 0} A^n$. En utilisant la continuité de la composition on obtient que $B(\mathbb{1} - A) = (\mathbb{1} - A)B = \mathbb{1}$.
Soient $A \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ et $D \in \mathcal{E}$. On a $A + D = A(\mathbb{1} + A^{-1}D)$. Or on a $\|A^{-1}D\| \leq \|A^{-1}\|\|D\|$. D'après (i) on en déduit alors que $A + D$ est inversible si $\|D\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Ce qui montre que $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est ouvert.□

On sait que les valeurs propres jouent un rôle important dans l'étude des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie. En dimension infinie la notion de spectre est plus difficile à étudier car on peut avoir dans le spectre d'un opérateur autre chose que des valeurs propres (voir exercice plus loin).
Le point de départ est la définition suivante.

Définition 1.22 *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ étant un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble noté $\rho(A)$ des nombres complexes λ tels que $A - \lambda\mathbb{1} \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$. L'application $\lambda \mapsto (A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ est appelée résolvante de A.*
On appelle spectre de A l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$

Proposition 1.23 *(i) $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$. On a $\sigma(A) \subseteq \{\lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda| \leq \|A\|\}$.*
(ii) On a les identités suivantes

$$\begin{aligned}
(A-\lambda\mathbb{1})^{-1} - (B-\lambda\mathbb{1})^{-1} &= (A-\lambda\mathbb{1})^{-1}(B-A)(B-\lambda\mathbb{1})^{-1}; && (1.4)\\
\text{si } \lambda\in\rho(A)\cap\rho(B) & \\
(A-\lambda\mathbb{1})^{-1} - (A-\mu\mathbb{1})^{-1} &= (\lambda-\mu)(A-\lambda\mathbb{1})^{-1}(A-\mu\mathbb{1})^{-1}, && (1.5)\\
\text{si } \lambda,\mu\in\rho(A) &
\end{aligned}$$

En particulier $\lambda \mapsto (A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ est dérivable (donc holomorphe) sur $\rho(A)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et l'on a

$$\frac{d}{d\lambda}(A - \lambda\mathbb{1})^{-1} = (A - \lambda\mathbb{1})^{-2} \tag{1.6}$$

.

Démonstration :
$\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ résulte de la proposition précédente. $\sigma(A)$ est donc fermé. D'autre part si $|\lambda| > \|A\|$ alors $(A - \lambda 1\!\!1) = \lambda(\lambda^{-1}A - 1\!\!1)$ est donc inversible d'après le Théorème (1.21) d'où il résulte que $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < \|A\|\}$.
Les 2 identités de (ii) résultent d'un calcul facile. □

1.6 Espace des fonctions continues sur un espace compact

On désigne par $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K}$, K étant un espace métrique compact.

Théorème 1.24 (Stone-Weierstrass) *L'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.*
Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$ vérifiant :
i) $1 \in \mathcal{A}$
ii) $\mathcal{A}$ sépare les points de K c'est à dire que pour tout $x, y \in K$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.
Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le résultat subsiste en supposant de plus que si $f \in \mathcal{A}$ alors $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Démonstration :
Le cas complexe résulte facilement du cas réel. On suppose donc dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On suppose d'abord que $K = [0, 1]$. Plusieurs démonstrations sont connues (voir Exercice). Nous choisissons ici une preuve probabiliste très élégante.
Soit $f \in \mathcal{C}[0, 1]$. Introduisons la suite de polynômes de Bernstein de f définie par

$$B_n f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrons que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
Rappelons que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et que $\{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\}_{0 \leq k \leq n}$ est la loi de probabilité binomiale de paramètres (n, x). Soit X une variable aléatoire définie sur un espace muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ suivant la loi binômiale (n, x). L'espérance de X est $\mathbb{E}[X] = nx$ et sa variance $\mathbb{V}[X] = nx(1-x)$.

L'inégalité de Tchébichev implique alors que pour tout $\eta > 0$ on a

$$\sum_{\{k, |x-k/n| \geq \eta\}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\eta^2}. \tag{1.7}$$

On peut alors estimer

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

en séparant la somme en deux paquets $I_1 = \{k, |x - k/n| \geq \eta\}$ et $I_2 = \{k, |x - k/n| < \eta\}$. On majore le premier paquet en utilisant (1.7), ce qui donne

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ |x-y| < \eta}} |f(x) - f(y)| + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta} \tag{1.8}$$

Or on sait que f étant continue sur le compact $[0, 1]$ est uniformément continue, on en déduit donc de (1.8) la conclusion cherchée.
Passons maintenant au cas général.
On désigne par $\overline{\mathcal{A}}$ l'adhérence (fermeture) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(K)$. Commençons par établir un lemme.

Lemme 1.25 *Sous les hypothèses précédentes, $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ possédant en outre les propriétés suivantes :*
si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.
Pour toute famille finie de $\overline{\mathcal{A}}$, $\{f_1, \cdots, f_n\}$ on a :
$\max\{f_1, \cdots, f_n\} \in \overline{\mathcal{A}}$ *et* $\min\{f_1, \cdots, f_n\} \in \overline{\mathcal{A}}$

Démonstration du Lemme :
En utilisant la continuité des opérations de multiplication et d'addition, on montre facilement que $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$.
Soit $f \in \overline{\mathcal{A}}$. On peut toujours se ramener au cas où $0 < \|f\|_\infty \leq 1$. Or on a $|f| = \sqrt{f^2}$. D'après ce qui précède, on sait que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$, est limite uniforme d'une suite de polynômes $p_n(t)$. Il en résulte que $g_n(x) = p_n(f(x))$ converge uniformément sur K vers $|f|$. Or $p_n \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$ en raison de la propriété d'algèbre.
Soient $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{A}}$. Rappelons les formules connues suivantes

$$\max\{f_1, f_2\} = f_2 + \frac{f_1 - f_2 + |f_1 - f_2|}{2} \tag{1.9}$$

$$\min\{f_1, f_2\} = f_2 + \frac{f_1 - f_2 - |f_1 - f_2|}{2} \tag{1.10}$$

D'où l'on déduit $\max\{f_1, f_2\} \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min\{f_1, f_2\} \in \overline{\mathcal{A}}$. On termine par récurrence sur n.□

La démonstration du théorème se fait alors par étapes successives.

Etape I. Soient $x, y \in K$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

En effet, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. La fonction f suivante convient

$$f(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)},\ \forall z \in K.$$

Etape 2. Pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que

$$g_x(x) = f(x),\ g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon,\ \forall y \in K$$

D'après l'Etape.1, pour tout $z \neq x$, $\exists h_{x,z} \in \mathcal{A}$ telle que $h_{x,z}(x) = f(x)$ et $h_{x,z}(z) = f(z)$. Par continuité, il existe donc un voisinage ouvert V_z de z tel que $\forall y \in V_z$, $h_{x,z}(y) \leq f(y) + \varepsilon$. K étant compact, existe un nombre fini N de $z_j \in K$ tel que $K = \bigcup\limits_{1\leq j\leq N} V_{z_j}$. Alors la fonction g_x suivante convient

$$g_x = \min_{1\leq j\leq N}\{h_{x,z_j}, 1 \leq j \leq N\}.$$

Etape 3. Il résulte de la continuité de f qu'il existe un voisinage W_x de x tel que $\forall y \in W_x$, $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$. On raisonne alors comme dans l'Etape 2. Il existe un nombre fini M de x_j tel que $K = \bigcup_{1\leq j\leq M} W_{x_j}$. Définissons alors

$$\varphi = \max_{1\leq j\leq N}\{g_{x_j}, 1 \leq j \leq M\}.$$

Il résulte donc des propriétés précédentes que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$ et que

$$f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon$$

c'est à dire $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.□

L'autre résulat important est le théorème d'Ascoli.

Théorème 1.26 *Soit K un espace métrique compact muni d'une distance d et F un espace vectoriel normé de dimension finie. On désigne par $\mathcal{C}(K, F)$ l'espace de Banach des applications continues de K dans F pour la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}\|f(x)\|$$

Alors $\mathcal{K}$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(K, F)$ si et seulement si *$\mathcal{K}$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

(K1) $\mathcal{K}$ est équicontinue, i.e pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in K, d(x, y) < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{K}. \tag{1.11}$$

(K2) Pour tout $x \in \mathcal{K}$, l'ensemble $\mathcal{K}(x) = \{f(x),\ f \in \mathcal{K}\}$ est borné dans F.

Démonstration :

Commençons par montrer que les conditions (K1) et (K2) sont suffisantes.

Supposons donc $\overline{\mathcal{K}}$ compact. Pour tout $x \in K$, $f \mapsto f(x)$ est une application continue de $\overline{\mathcal{K}}$ dans F. Son image est donc compacte et $\mathcal{K}(x)$ est donc borné dans F.

D'autre part $\mathcal{K}$ étant précompact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{K}$ telles que

$$\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq N} B(f_i, \varepsilon/2) \tag{1.12}$$

$B(f, \varepsilon)$ désignant la boule ouverte de centre f et rayon ε dans $\mathcal{C}(K, F)$.

Soit $x \in K$. Pour chaque $i = 1, \cdots, N$ il existe $\eta_i > 0$ tel que $d(x, y) < \eta_i \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon/2$. Soit $f \in \mathcal{K}$. Il existe i tel que $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/2$. Posons $\eta = \min\limits_{1\leq i\leq N} \eta_i$. Il résulte alors de l'inégalité triangulaire que $d(x, y) < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. (notons que par construction η ne dépend pas de $f \in \mathcal{K}$).

Supposons maintenant les conditions (K1) et (K2) satisfaites. $\mathcal{C}(K, F)$ étant complet, il suffit de montrer que $\mathcal{K}$ est précompact.

Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de (K1) que pour tout $x \in K$ il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que

$$\forall y \in V_x, \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{K}$$

K étant compact, il existe $x_1, \cdots, x_N \in K$ tels que $K = \bigcup_{1\leq j\leq N} F_{x_j}$.

Or $\bigcup\limits_{1\leq j\leq N} \mathcal{K}(x_j)$ est relativement compact. Il existe donc M vecteurs de F, $u_1, \cdots, u_M$ tels que

$$\bigcup_{1\leq j\leq N} \mathcal{K}(x_j) = \bigcup_{1\leq j\leq M} B_F(u_j, \varepsilon).$$

Désignons par Φ l'ensemble (fini) des applications de $\{1, 2, \cdots, N\}$ dans $\{1, 2, \cdots, M\}$ et pour tout $\varphi \in \Phi$ posons :

$L_\varphi = \{f \in \mathcal{K},\ \|f(x_i) - u_{\varphi(i)}\| < \varepsilon\}$. Par construction on a $\mathcal{K} = \bigcup_{\varphi\in\Phi} L_\varphi$. Soient $f, g \in L_\varphi$. Alors pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in V_{x_i}$. On a donc

$$\|f(x) - f(x_i)\| < \varepsilon,\ \|g(x) - g(x_i)\| < \varepsilon. \tag{1.13}$$

Or on a également, par définition de L_φ,

$$\|f(x_i) - g(x_i)\| \leq \|f(x_i) - u_{\varphi(i)}\| + \|g(x_i) - u_{\varphi(i)}\| \leq 2\varepsilon \tag{1.14}$$

De (1.13) et (1.14) il résulte que $\|f - g\|_\infty \leq 4\varepsilon$. Chaque L_φ est donc inclus dans une boule de rayon $\leq 4\varepsilon$ ce qui entraine que $\mathcal{K}$ est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leq 4\varepsilon$.$\square$

td1

Exercice 1 *Normes sur $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ entier.*
Pour $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{1/p}$, pour $p \geq 1$ réel et si $p = \infty$, $\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \cdots, |u_n|\}$.
1) Montrer que si $p = 1$ ou $p = +\infty]$, $\| \bullet \|_p$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ équivalentes entre-elles.
On suppose maintenant $1 < p < +\infty$. Soit q le réel conjugué de p i.e tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On pose

$$M_p(u) = \sup\{|\sum_{1 \leq j \leq n} u_j v_j|, \ \|v\|_q \leq 1\}$$

2) Montrer que $M_p(u) = \|u\|_p$, $\forall u \in \mathbb{K}^n$. En déduire que $\| \bullet \|_p$ est une norme.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 2 *Soit K un espace compact. On désigne par $\mathcal{C}_\mathbb{K}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose, pour $f \in \mathcal{C}_\mathbb{K}(K)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.*
$\| \bullet \|_\infty$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathcal{C}_\mathbb{K}(K)$.
Sur $\mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1])$ on considére également $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Vérifier que $\| \bullet \|_1$ est une norme.
Montrer que les normes $\| \bullet \|_1$ et $\| \bullet \|_\infty$ sont comparables mais non équivalentes.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 3 *(i) Montrer que $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ entier est un espace de Banach.*
(ii) Montrer que l'espace $\mathcal{C}_\mathbb{K}(K)$ de l'exemple précédent est un espace de Banach pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 4 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ une base de $\mathcal{E}$. On pose $\|u\|_\infty = \max\{|\lambda_1, \cdots, |\lambda_n|\}$ si $u = \sum_{1 \leq j \leq N} \lambda_j e_j$. On considère que $\mathcal{E}$ est muni de la topologie de la norme $\| \bullet \|_\infty$.*
Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{E}$.
i) Montrer que N est continue sur $\mathcal{E}$ et qu'il existe $C > 0$ telle que $N(u) \leq C\|u\|_\infty$, $\forall u \in \mathcal{E}$.
ii) Montrer que N ne s'annule pas sur l'ensemble $S = \{u \in \mathcal{E}, \ \|u\| = 1\}$. En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que $N(u) \geq c\|u\|_\infty$, $\forall u \in \mathcal{E}$.
En déduire que sur $\mathcal{E}$ toutes les normes sont équivalentes.
iii) On suppose que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{G}$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 5 *(i) Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ des espaces vectoriels normés. On suppose que $\mathcal{E}_1$ est de dimension finie. Montrer alors que toute application linéaire de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ est continue.*
(ii) Soit K une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. On pose $A_K u(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy$. Montrer que A_K définit une application linéaire continue de $\mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1])$ dans lui-même de norme $\|A_K\| \leq \|K\|_\infty$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 6 *(i) Montrer que si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille sommable alors sa somme S est unique.*
(ii) On suppose que $\Lambda = \mathbb{N}$. Montrer que si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable alors la suite $S_n = \sum_{1 \leq j \leq n} u_j$ est convergente et a pour limite la somme de la famille sommable.
(iii) Montrer que si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ est sommable alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\alpha \in \Lambda, \ \|u_\alpha\| \geq \varepsilon\}$ est fini. En déduire que $\{\alpha \in \Lambda, \ \|u_\alpha\| \neq 0\}$ est dénombrable.
Ce résultat montre donc que l'on peut se ramener au cas où Λ est dénombrable.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 7 *(i) Démontrer la proposition 1.16*
(ii) Montrer qu'une famille $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de nombres réels est sommable si et seulement si elle est absolument sommable.
Indication *: On introduira les parties positives et négatives de u_α, u_α^+ et u_α^-.*
(iii) Donner des exemples de séries convergentes qui ne sont pas sommables.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 8 *[Exponentielle d'opérateur] On travaille ici dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{E}($ des applications linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.*

(i) Montrer que la famille $\dfrac{A^j}{j!}$ est absolument sommable.

On pose $\mathrm{e}^A = \sum_{j\geq 0} \frac{A^j}{j!}$.

(ii) Montrer que si $AB = BA$ alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$.

(iii) Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 9 *Soit $\mathcal{E} = L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$et l'application linéaire définie par $Au(x) = xu(x)$.*

i) Montrer que A est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans lui-même et donner un majorant de sa norme.

ii) Montrer que $\sigma(A) \subseteq [0,1]$.

iii) Soit $\lambda \in]0,1[$. Montrer que $\lambda \in \sigma(A)$.

Indication *: Raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction à l'aide des fonctions $u_\varepsilon(x) = (x-\lambda)^{-1/p} \mathbb{1}_{[0,\lambda-\varepsilon]}(x)$.*

iv) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda \mathbb{1}$ est injectif (i.e A n'a pas de valeur propre).

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 10 *Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à n variables est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 11 *Soit $[a,b]$ un intervalle réel et $M >$ un réel fixé. On définit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions f continues sur [a,b], dérivables sur $]a,b[$ et vérifiant $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 12 (théorème de Péano) *On considère l'équation différentielle*

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ x(0) = x_0 \tag{1.15}$$

où f est une fonction continue et bornée sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$. Lorsque $y \mapsto f(t,y)$ est localement lipschitsienne, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence locale et l'unicité de (1.15). Le but de l'exercice est de montrer que l'on a encore l'existence de solutions en supposant seulement que f est continue.

On pose $f_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,y) R_\varepsilon(t, x-y) dy$ où R_ε est une famille de fonctions régularisantes (voir c6, Appendice Intégration).

(i) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ le problème

$$x_\varepsilon{}'(t) = f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)),\ x_\varepsilon(0) = x_0 \tag{1.16}$$

a une solution x_ε, définie et de classe C^1 sur $[-1,1]$.

(ii) Montrer que $\{x_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ est une partie équicontinue de $C[-1,1]$.

(iii) Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite ε_n, tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, telle que x_{ε_n} converge vers une fonction x dans $C[-1,1]$.

Montrer que x est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

Indication : pour le dernier point, revenir à l'équation différentielle pour étudier la convergence des dérivées : x'_{ε_n}.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 13 *On désigne par ℓ_∞ l'ensemble des suites bornées de nombres réels. Si $x \in \ell_\infty$ on pose $\|x\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$.*

i) Montrer que ℓ_∞ est un espace de Banach.

ii) On désigne par c_0 l'ensemble des suites de nombres réels convergeant vers 0.

Montrer que c_0 est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ_∞.

Pour p réel, $p \geq 1$, on désigne par ℓ_p l'ensemble des suites de nombres réels $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^p < +\infty$.

iii) Montrer que l'égalité

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

définit une norme sur ℓ_p.

iv) Montrer que ℓ_p est un espace de Banach.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 14 *On désigne par L^p $(1 \leq p < +\infty)$ l'espace de Banach des (classes) de fonctions de puissance p intégrable pour le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que le sous-espace C_{00} des fonctions continues à support compact est dense dans L^p (voir Annexe Intégration). On pose, pour $f \in L^p$ et $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h(f) = f(x+h)$.*
i) Montrer que τ_h est une isométrie de L^p.
ii) Montrer que pour tout $f \in L^p$ on a $\lim\limits_{h \to 0} \tau_h(f) = f$ fortement dans L^p
Indication : utiliser la densité de C_{00}.
On considère une famille régularisante R_ε (voir annexe intégration). On rappelle que l'on peut construire R_ε comme suit. On part d'une fonction R, C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive et à support dans $[-1,1]$, telle que $\int_{\mathbb{R}}(x)dx = 1$. On pose alors

$$R_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et si $f \in C_{00}$, $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} R_\varepsilon(x-y)f(y)dy$.
iii) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = f$ pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.
En déduire que l'ensemble C_0^∞ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et à support compact, est dense dans L^1.

indications♠ ;Corrigé♣

Indications 1 *(1) propriétés des inégalités entre réels.*
(2)Utiliser l'inégalité de Hölder. Montrer que pour tout $u \neq 0$ il existe v, $\|v\|_q = 1$ tel que $\sum u_j v_j = \|u\|_p$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 2 *Le seul point délicat est de montrer que si $\|f\| = 0$ alors $f = 0$. On raisonnera par l'absurde.*
On donnera une interprétation graphique des normes et on cherchera une suite de fonctions continues positives de borne supérieure égale à un et dont les intégrales tendent vers 0.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 3 *i) Utiliser que $\mathbb{K}$ est complet.*
ii) Soit f_n une suite de Cauchy. Pour chaque $x \in K$ montrer successivement que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, que f est continue sur K puis que f_n converge vers f pour la norme $\| \bullet \|_\infty$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 4 *i) on rappelle que $|N(u) - N(v)| \leq N(u - v)$.*
ii) propriété des fonctions continues sur un compact.
iii) noter que $\mathcal{E}$ est complet.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 5 *(i) choisir une base de $\mathcal{E}_1$.*
(ii) majorer l'intégrale.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 6 *i) raisonner par l'absurde*
ii) considérer des parties finies particulières.
iii) montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie F_ε telle que pour toute partie finie A telle que si $A \cap F_\varepsilon = \emptyset$ alors $\sum_{\alpha \in A} \|u_\alpha\| \leq \varepsilon$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 7 *se ramener au cas où $\Lambda = \mathbb{N}$.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 8 *(i) majorer $\|A^j\|$.*
(ii) s'inspirer des propriétés du produit de séries entières sur $\mathbb{C}$.
(iii) revenir à la définition de la dérivée.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 9 *(i) sans difficulté.*
(ii) étudier l'inversibilité de $A - \lambda$.
(iii) suivre l'indication du texte.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 10 *Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 11 *Appliquer le théorème d'Ascoli.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 12 *Appliquer le théorème d'Ascoli.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 13 *suivre le schéma habituel pour montrer qu'un espace est complet (voir exercice 3).*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Correction 1 *Rappelons l'inégalité de Hölder (cas discret) : Si* $x_j \geq 0$, $x_j \geq 0$ *et* $p > 1$ *alors*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j \leq \left(\sum_{1 \leq j \leq n} x_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} y_j^q \right)^{1/q}$$

où q *est le réel conjugué de* p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). *(le lecteur pourra la démontrer en utilisant la convexité de la fonction exponentielle).*
Il en résulte alors que $M_p(u) \leq \|u\|_p$. *On obtient l'autre inégalité en choisissant*

$$v_j = \frac{u_j^{p-1}}{\left(\sum u_j^p \right)^{1/q}}$$

On a alors $\sum u_j v_j = \|u\|_p$.
Or l'application M_p *vérifie l'inégalité triangulaire (revoir les propriétés des bornes supérieures). Il en résulte que* $\| \bullet \|_p$ *est une norme.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 2 *Si* $f \neq 0$ *il existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tel que* $f(x_0) \neq 0$ *et* f *étant continue, il existe un intervalle* J *contenant* x_0, *de longueur* δ *non nulle, tel que sur* J *on a* $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2$. *D'où*

$$\int_0^1 |f(x)| dx \geq \int_J |f(x)| dx \geq \delta |f(x_0)|/2$$

et donc $\|f\|_1 > 0$.
D'après les propriétés de l'intégrale de Riemann on

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

Supposons qu'il existe un réel $C > 0$ *telle que pour tout* $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ *on ait*

$$C\|f\|_1 \geq \|f\|_\infty$$

On considère alors la suite f_n *de fonctions définies par* $f_n(x) = 0$ *si* $x \in [1/n, 1]$ *et* $f_n(x) = 1 - nx$ *si* $x \in [0, 1/n]$. *On aurait alors* $C \geq n/2$ *pour tout* $n \geq 2$ *d'où une contradiction.* □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 3 *1) On sait que tout produit fini d'espaces métriques complet est complet et que* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont complets d'où* $\mathbb{K}^n$ *est complet, donc une espace de Banach.*
2) On suit la démarche mentionnée dans l'indication.
On a d'abord

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \tag{1.17}$$

, pour tout n, m. *On en déduit que* $f_n(x)$ *est une suite de Cauchy.* $\mathbb{K}$ *étant complet, on pose* $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. *Il résulte de (1.17) que* f_n *converge uniforément vers* f *sur* K, f *est donc continue sur* K. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* N_ε *tel que* $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ *on ait* $Vert f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. *Il résulte alors de (1.17) que l'on a* $Vert f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \; \forall n \geq N_\varepsilon$. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 4 *i) D'après l'inégailté triangulaire on a* $|N(u + h) - N(u)| \leq N(h)$ $(u, h \in \mathcal{E})$. *Toujours d'après l'inégalité triangulaire on a* $N(\sum \lambda_j e_j) \leq \sum |\lambda_j N(e_j)$. *Posons* $C = \sum N(e_j)$. *On a alors,* $\forall h \in \mathcal{E}$,

$$N(h) \leq C\|h\|_\infty \tag{1.18}$$

(i) en résulte.
(ii) N *étant une norme, elle ne peut s'annuler qu'en 0. Or* N *est continue,* S *étant compact, elle y atteint sa borne inférieure qui est donc nécessairement strictement positive. On en déduit dons que* N *et* $\| \bullet \|_\infty$ *sont deux normes équivalentes.*
(iii) Désignons par N *la norme sur* $\mathcal{E}$ *induite par* $\mathcal{G}$. *On a vu que* N *est équivalent à une norme* $\| \bullet \|_\infty$ *sur* $\mathcal{E}$ *obtenue en fixant une base de* $\mathcal{E}$. *Or* $\mathcal{E}$ *est complet pour cette norme* $\| \bullet \|_\infty$ *donc complet pour* N *et donc fermé dans* $\mathcal{G}$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 5 *(i) Soit* $\{e_j, \; 1 \leq j \leq N\}$ *une base de* $\mathcal{E}_1$. *Pour tout* $u = \sum \lambda_j e_j$ *on a*

$$|f(v)| \leq C\|v\|_\infty$$

où $C = \sum |f(e_j)|$. *On en déduit que* f *est continue.*
(ii) A_K *est continue d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.*
Ensuite on a l'inégalité

$$\left| \int_0^1 K(x, y) u(y) dy \right| \leq \|K\|_\infty \|u\|_\infty$$

D'où la conclusion. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 6 *On suppose Λ infini.*
(i) Soient S et S' deux sommes possibles pour la famille $\{u_\alpha\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des partie finies F_ε et F'_ε telles que si $F_\varepsilon \subseteq A$ alors $S - \sum_{\alpha \in A} \leq \varepsilon$ et si $F'_\varepsilon \subseteq A$ alors $S' - \sum_{\alpha \in A} \leq \varepsilon$. Il résulte de l'inégalité triangulaire que l'on a $\|S - S'\||eq2\varepsilon$.
(ii) Soit S la somme de la famille sommable. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie F_ε de $\mathbb{N}$ telle que $|S - \sum_{j \in A} u_j| \leq \varepsilon$ pour toute partie finie telle que $F_\varepsilon \subseteq A$. Posons alors $N_\varepsilon = \max F_\varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|S - S_n| \leq \varepsilon$.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 7 *Il suffit de montrer que les sommes partielles de la série de terme général u_j^+ sont majorées. Posons alors $I_+ = \{j \in \mathbb{N};\ u_j \geq 0\}$. On alors, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $\sum_{j \in J} u_j^+ = \sum_{j \in J \cap I_+} u_j$. Or il résulte de l'hypothèse que les sommes partielles $\sum_{j \in F} u_j$ sont majorées lorque F décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. La conclusion en résulte.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 8 *(i) Il résulte de la définition de la norme des opérateurs que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Ensuite par récurrence sur j on obtient facilement $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ pour tout entier $j \geq 1$. On en dédiut que la famille est absolument sommable, donc sommable puisque $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est un espace de Banach.*
(ii) Revoir le cours sur les produits de séries entières.
(iii) D'après la question précédente on a

$$\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}(\mathrm{e}^{hA} - \mathbb{1})$$

On est donc ramené à étudier la dérivabilitté en 0. Or on a

$$\|\mathrm{e}^{hA} - \mathbb{1} - hA\| \leq \sum_{j \geq 2} \frac{h^j \|A\|^j}{j!}$$

En particulier, si $|h| \leq 1$ on a $\|\mathrm{e}^{hA} - \mathbb{1} - hA\| \leq h^2 \mathrm{e}^{\|A\|}$ d'où il résulte que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{hA} - \mathbb{1}}{h} = A$$

On déduit donc que $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable et que

$$\frac{d\mathrm{e}^{tA}}{dt} = A\mathrm{e}^{tA}$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 9 *(i) A est clairement linéaire. On a $\int_0^1 |xu(x)|^p \leq \int_0^1 |u(x)|^p$ d'où $\|A\| \leq 1$.*
(ii) On vérifie sans peine que l'opérateur défini par $M_\lambda u(x) = \frac{u(x)}{x-\lambda}$ est linéaire continu si $\lambda \notin [0,1]$ et que M_λ est l'inverse de $A - \lambda\mathbb{1}$.
(iii) Supposons qu'il existe $\lambda \in]0,1[\cap\rho(A)$. Il existe alors $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^p[0,1]$ on a

$$\int_0^1 |u(x)|^p dx \leq C \int_0^1 |(x-\lambda)u(x)|^p dx$$

En applicant cette inégalité à u_ε on on obtient l'inégalité

$$\int_0^{\lambda-\varepsilon} |x-\lambda|^{-1} dx \leq C \int_0^1 |x-\lambda|^{p-1}$$

Le membre de droite étant indépendant de ε on obtient un contradition car le membre de gauche tend vers l'infini lorsque ε tend vers 0.
(iv) Soit $u \in L^p[0,1]$ et $Au = \lambda u$. On alors $(x-\lambda)u(x) = 0$, pour presque tout $x \in [0,1]$. D'où $u = 0$ presque partout. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 10 *Vérifions les hypothèses du thérème de Stone-Weierstrass sous sa forme générale. Soit $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des des fonctions polynomiales sur K. $\mathcal{P}(K)$ est une algèbre contenant les constantes. Montrons qu'elle sépare les points de K. Si $u, v \in K$, $x \neq y$, alors il existe j, $1 \leq j \leq n$ tel que $u_j \neq v_j$ (u_j est la jème composante de u). Le polynôme $x \mapsto x_j$ sépare donc u et v.* □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 11 *$\mathcal{K}$ est une partie bornée de $\mathcal{C}[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $|f(x)| \leq (b-a)M$. $\mathcal{K}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$ donc relativement compact. Vérifions l'équicontinuité. Celà résulte directement du théorème des accroissements finis : $|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$.* $\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 12 *travail personnel*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 13 *i) se démontre exactement comme dans le cas des fonctions continues sur un compact traité dans l'exercice 3, le lecteur ne devrait pas rencontrer de difficulté pour adapter ici cette démonstration.*
ii) Soit $\{x^n\}$ une suite dans ℓ_∞ convergent vers x (au sens de ℓ_∞). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite x^n converge vers 0. On a , en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|x_k| \leq \|x^n - x\|_\infty + |x^n_k|$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe N_ε tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a $\|x^n - x\|_\infty \leq \varepsilon/2$. On fixe alors $n = N_\varepsilon$. Il existe K_ε tel que $\forall k \geq K_\varepsilon$ on a $|x^{N_\varepsilon}_k| \leq \varepsilon/2$. On a donc montré

$$k \geq K_\varepsilon \Rightarrow |x_k| \leq \varepsilon$$

c_0 est donc un sous espace fermé de ℓ_∞.
iii) Il faut commencer par montrer que ℓ_p est un espace vectoriel. On utilise pour cela l'inégalité triangulaire suivante(voir Exercice 1). Pour tout N entier on a

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

En faisant tendre N vers l'infini on obtient que ℓ_p est un espace vectoriel et que $\|\bullet\|_p$ est bune norme.
iv) Pour montrer que ℓ_p est complet on procède comme dans i) (le lecteur est invité à écrire les détails).

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

2.1 Espaces préhilbertiens

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. $\bar{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous donnerons les énoncés dans le cas complexe. Nous invitons le lecteur à adapter les énoncés correspondants au cas réel.

Définition 2.1 *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel $\mathcal{E}$ muni d'un produit scalaire, c'est à dire d'une application $h : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
Pour tous $u, v, w \in \mathcal{E}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a
(H-1) $h[\lambda u + \mu v, w] = \lambda h[u, w] + \mu h[v, w]$
(H-2) $h[u, \lambda v + \mu w] = \bar{\lambda} h[u, v] + \bar{\mu}[v, w]$
(H-3) $h[u, v] = \overline{h[v, u]}$
(H-4) $h[u, u] \geq 0$
(H-5) $h[u, u] = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
(H-1) et (H-2) caractérisent les formes sesquilinéaires. Si de plus h vérifie (H-3) on dit qu'elle est hermitienne, (H-4) est la condition de positivité et (H-5) la condition de non dégénérescence. Lorsque h vérifie les propriétés de (H-1) à (H-5) on dit que h est un produit scalaire.

Notation Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, les produits scalaires sont notés $h[u, v] = \langle u|v\rangle$. On dit que $u, v \in \mathcal{E}$ sont orthogonaux si $\langle u|v\rangle = 0$, on note souvent cette propriété par le symbole $u \perp v$.

Exemple 2.2 *(1) $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire canonique $u \cdot v = \sum_{1\leq j\leq d} u_j v_j$, $u = (u_1, \cdots, u_d)$, $v = (v_1, \cdots, v_d)$, est un espace préhilbertien (réel).*
(2) $\mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle u|v\rangle = \sum_{1\leq j\leq d} u_j \overline{v_j}$$

(3) Soit A une matrice $d \times d$ à coefficients réels, symétrique[2], (resp à coefficients complexes, hermitienne[3]) alors $(u, v) \mapsto h_A[u, v] =< Au, v >$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{R}^d$(resp. $\mathbb{C}^d$). h_A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives. h_A est positive et non dégénérée si et seulement si A a toutes ses valeurs propres strictement positives.
(4) Soit $\mathcal{C}[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $h[u, v] = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt$. h définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}[0, 1]$

Théorème 2.3 (Cauchy-Schwarz) *Soit $\{\mathcal{E}, \langle|\rangle\}$ une espace préhilbertien. On a alors*

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{E}. \tag{2.19}$$

De plus on a l'égalité dans (2.19) si et seulement si u et v sont colinéaires. L'application $u \mapsto \|u\| := \sqrt{\langle u|u\rangle}$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

Démonstration :
Posons $\varphi(\lambda) = \langle u + \lambda v|u + \lambda v\rangle$, $\lambda = e^{i\alpha}|\lambda|$, $\rho = |\lambda|$, $\langle u|v\rangle = e^{i\theta}|\langle u|v\rangle|$. On a

$$\varphi(\lambda) = \langle u|u\rangle + \lambda\langle v|u\rangle + \bar{\lambda}\langle u|v\rangle + |\lambda|^2\langle v|v\rangle$$

d'où, choisissant $\theta = \lambda$, on trouve que pour tout $\rho \geq 0$ on a

$$\langle u|u\rangle + 2\rho|\langle u|v\rangle| + \rho^2\langle v|v\rangle \geq 0$$

On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (signe d'un trinôme à coefficients réels).
Dans le cas d'égalité, on peut supposer que $u \neq 0$, $v \neq 0$. On a $\langle u|v\rangle = e^{i\theta}\|u\|\|v\|$ et on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} > 0$ tel que $\varphi(\lambda) = 0$.
Pour avoir une norme, la seule propriété non évidente à vérifier ici est l'inégalité triangulaire. Or on a

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Dans la suite on considère sur $\mathcal{E}$ la topologie définie par la norme $\|\cdot\|$. On obtient facilement les propriétés suivantes

[2] on rappelle que la matrice A, de coefficients $A_{j,k}$ est symétrique si pour tous $1 \leq j, k \leq d$, $A_{j,k} = A_{k,j}$. On dit que A est hermitienne si $A_{j,k} = \overline{A_{k,j}}$.

[3] voir la note précédente

Proposition 2.4 *(i) Le produit scalaire $(u,v) \mapsto \langle u|v\rangle$ est continu sur $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$.*
(ii) On a la formule du parallélogramme

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{2.21}$$

(iii) Si $u \perp v$, on a la formule de Pythagore

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \tag{2.22}$$

Démonstration : exercice.

Dans un espace préhilbertien, l'orthogonalité joue, bien sûr, un rôle essentiel.

Définition 2.5 *Soit G un partie de $\mathcal{H}$. On appelle orthogonal de G l'ensemble $G^\perp = \{u \in \mathcal{H}; \langle u|v\rangle = 0,\ \forall v \in G\}$.*

Proposition 2.6 *$G^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$. Si $\overline{\text{vect}}[G]$ désigne le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ contenant G, on a alors $\overline{\text{vect}}[G] \subseteq G^{\perp\perp}$.*

Démonstration :
$G^\perp$ est clairement un sous-espace vectoriel. Pour montrer qu'il est fermé, on remarque qu'il s'écrit comme intersection des noyaux des formes linéaires continues $\ell_u v = \langle v|u\rangle$, pour $u \in G$, $v \in \mathcal{H}$. La fin de la proposition en résulte aisément. □

Définition 2.7 *Soit A une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans lui-même. On dit que A est auto-adjointe (ou hermitienne) si, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, on a $\langle Au|v\rangle = \langle u|Av\rangle$.*

Proposition 2.8 *Si A est une application linéaire continue hermitienne de $\mathcal{H}$ dans lui-même, alors* $\ker(A) = [\text{Im}(A)]^\perp$.

Démonstration :
C'est une conséquence des équivalences suivantes :

$$\{Au = 0\} \Longleftrightarrow \{\langle Au|v\rangle = 0;\ \forall v \in \mathcal{H}\} \Longleftrightarrow \{\langle u|Av\rangle = 0\ \forall v \in \mathcal{H}\}.$$

□

Les transformations linéaires qui préservent les structures préhilbertiennes jouent un rôle spécifique.

Définition 2.9 *Soient deux espaces préhilbertiens $\{\mathcal{E}_1, \langle|\rangle_1\}$ et $\{\mathcal{E}_2, \langle|\rangle_2\}$ et une application linéaire $U : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$.*
(i) On dit que U est une isométrie si pour tout $u, v \in \mathcal{E}_1$ on $\langle Uu|Uv\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$
(ii) On dit que U est unitaire si U est une isométrie surjective *de $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{E}_2$.*

2.2 Espaces de Hilbert

Définition 2.10 *On appelle espace de Hilbert (ou espace hilbertien) tout espace préhilbertien $\{\mathcal{H}, \langle|\rangle\}$ complet pour la norme définie par le produit scalaire.*

Voici des exemples qui seront approfondis en exercice.

Exemple 2.11 *(1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*
(2) L'espace préhilbertien $\mathcal{C}[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle u|v\rangle = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt$ n'est pas complet.
(3) Il a été vu en intégration (voir rappels) que l'espace de Lebesgue $L^2[0,1]$ est un espace complet pour la norme préhilbertienne $u \mapsto \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Rappelons ici que $L^2[0,1]$ est l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$, pour la mesure de Lebesgue, pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque-partout.
(3) L'ensemble, noté $\ell^2(\mathbb{N})$, des suites $u = \{u_n\}_{n\geq 0}$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u|v\rangle = \sum_{n\geq 0} u_n \overline{v_n}$.

Tout espace préhilbertien peut être plongé canoniquement dans un espace de Hilbert par complétion.

Théorème 2.12 *Soit $\{\mathcal{E}, h\}$ un espace préhilbertien. Il existe un espace de Hilbert $\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{h}\}$ et une isométrie I de $\{\mathcal{E}, h\}$ dans $\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{h}\}$ telle que $I[\mathcal{E}]$ est dense dans $\mathcal{H}$.*
De plus l'espace de Hilbert $\{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{h}\}$ vérifiant la propriété précédente est unique à transformation unitaire près. On l'appelle le complété de $\{\mathcal{E}, h\}$.

Démonstration :
C'est une conséquence du théorème de complétion d'un espace métrique

et du prolongement des applications uniformément continues. (voir Topologie de L3). □

Par exemple l'espace préhilbertien $\mathcal{C}[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle u|v\rangle = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt$ a pour complété l'espace de Lebesgue $L^2[0,1]$ (voir exercice).

Le théorème suivant est fondamental dans la compréhension des espaces de Hilbert.

Rappelons que dans un espace métrique $\{\mathcal{E}, d\}$, la distance d'un point u de $\mathcal{E}$ à une partie F de $\mathcal{E}$ est définie par $d(u,F) = \inf\{d(u,v),\ v \in F\}$.

Théorème 2.13 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F une partie convexe* [4] *et fermée de $\mathcal{H}$.*
Alors il existe $y \in F$, unique tel que $d(x,F) = \|x-y\|$. On note alors $y = \Pi_F x$.
Si F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ on a alors les propriétés suivantes :
(i) $\Pi_F x$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - \Pi_F x \in F^\perp$
(ii) Π_F est une application linéaire, continue de $\mathcal{H}$ sur F, de norme 1 si $F \neq \{0\}$.
(iii) $\Pi_F^2 = \Pi_F$ (Π_F est idempotent).
(iv) Pour tous $u,v \in \mathcal{H}$ on a $\langle \Pi_F u|v\rangle = \langle u|\Pi_F v\rangle$ (Π_F est auto-adjoint).

Démonstration :
Soit $\{y_n\}$ une suite de point de F telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x-y_n\| = d(x,F)$. Nous allons montrer que y_n est une suite de Cauchy de $\mathcal{H}$. Pour cela on applique l'identité du parallélogramme à $y_n - y_m = (x-y_m) - (x-y_n)$. On obtient alors

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4\left\|x - \left(\frac{y_n+y_m}{2}\right)\right\|^2$$

La convexité de F assure que $(\frac{y_n+y_m}{2}) \in F$ et on a donc

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4d(x,F)^2.$$

On en déduit que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans $\mathcal{H}$, qui est complet. F étant fermé on a donc $y = \lim_{n\to+\infty} y_n \in F$.
Supposons que l'on ait $y, y' \in F$ tels que $d(x,F) = \|x-y\| = \|x-y'\|$. On applique l'inégalité précédente avec $y_n = y$ et $y_m = y'$ et on obtient $\|y-y'\| = 0$ d'où $y = y'$. On a donc démontré l'existence et l'unicité de $\Pi_F x$.
Soit $y = \Pi_F x$ et $z \in F$. Développons, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|x - y + \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2|\lambda|^2\|z\|^2 + 2\Re(\lambda\langle z|x-y\rangle)$$

Posons $\lambda = |\lambda|\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\langle z|x-y\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $r \geq 0$. On a alors

$$\|x - y + \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2|\lambda|^2\|z\|^2 + 2|\lambda| r\cos(\theta - \alpha)$$

Il en résulte que si $\langle z|x-y\rangle \neq 0$ alors on peut trouver λ tel que $\|x-y+\lambda z\|^2 < \|x-y\|^2$, ce qui contredirait la définition de y. Inversement si $x - y \in F^\perp$ alors pour tout $z \in F$ on a, d'après l'identité de Pythagore,

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2$$

D'où $y = \Pi_F x$.
On a en particulier $\|u\|^2 = \|\Pi_F u\|^2 + \|\mathbb{1} - \Pi_F u\|^2$. Ce qui donne la continuité de Π_F.
On a clairement $\Pi_F^2 = \Pi_F$. Montrons que Π_F est hermitien.
Il résulte de (i) que pour tous $u, w \in \mathcal{H}$ on a $\langle u|\Pi_F w\rangle = \langle \Pi_F u|\Pi_F w\rangle$. On en déduit le résulat en utilisant que $\overline{\langle \Pi_F u|w\rangle} = \langle w|\Pi_F u\rangle$.□

Corollaire 2.14 *Pour tout sous-espace vectoriel F fermé de $\mathcal{H}$, on a la décomposition en somme directe, orthogonale :*

$$\mathcal{H} = F \oplus F^\perp, \quad u = \Pi_F u + (\mathbb{1} - \Pi_F)u,\ \forall u \in \mathcal{H} \tag{2.23}$$

Corollaire 2.15 *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On a alors $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ et F est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration :
On a déjà vu que $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. D'après le théorème de la projection on a les deux décompositions en somme directe

$$\mathcal{H} = \overline{F} \oplus F^\perp, \quad \text{et } \mathcal{H} = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$$

Soit alors $u \in F^{\perp\perp}$. Dans la première décomposition on a $u = v + w$ et dans la deuxième $u = u + 0$. L'unicité de la décomposition entraîne alors $w = 0$ et donc $u \in \overline{F}$.□

Définition 2.16 *On appelle projection orthogonale (ou projecteur orthogonal) toute application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans lui-même, hermitienne et idempotente.*

[4] rappelons qu'une partie F d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ est convexe si pour tous $u, v \in F$ et tout $t \in [0,1]$ alors $tu + (1-t)v \in F$

Proposition 2.17 *Tout projecteur orthogonal est le projecteur sur un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$.*

Démonstration :
Il est facile de voir que si Π est un projecteur orthogonal alors $\mathrm{Im}(\Pi)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\Pi = \Pi_F$. □

Les espaces de Hilbert possèdent une propriété de dualité remarquable.

Théorème 2.18 (F. Riesz) *On désigne par $\mathcal{H}'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$ (dual topologique). Pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ on pose $\ell_u(v) = \langle u|u\rangle$. Alors :*
(i) $\ell_u \in \mathcal{H}'$ et $\|\ell_u\| = \|u\|$. Ou encore : $u \mapsto \ell_u$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$.
(ii) Pour toute forme linéaire continue f sur $\mathcal{H}$ il existe $u \in \mathcal{H}$, unique, tel que $f = \ell_u$.
En conséquence, $\mathcal{H}'$ est un espace de Hilbert, unitairement équivalent à $\mathcal{H}$.

Démonstration :
Il suffit de supposer que $u \neq 0$. Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on a $|\ell_u(v)| \leq \|u\|\|v\|$. D'autre part $\ell_u(u) = \|u\|^2$. D'où $\|\ell_u\| = \|u\|$. Soit maintenant $f \in \mathcal{H}'$, $f \neq 0$. $F = \ker f$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $F^\perp \neq \{0\}$. Il existe $u_0 \in F^\perp$, $\|u_0\| \neq 0$ et alors $f(u_0) \neq 0$. On peut supposer que $f(u_0) = 1$. Or $u - f(u)u_0 \in F$, donc $\langle u - f(u)u_0|u_0\rangle = 0$ et $f(u) = \frac{\langle u|u_0\rangle}{\|u_0\|^2}$. □

Voici une première application du théorème de Riesz.

Théorème 2.19 (adjoint d'un opérateur) *Soient 2 espaces de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ et A une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. Il existe alors une unique appllication linéaire continue notée $A^\star$, telle que pour tout $u \in \mathcal{H}$ et tout $v \in \mathcal{K}$, on ait*

$$\langle Au|v\rangle_{\mathcal{K}} = \langle u|A^\star v\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{2.24}$$

Démonstration :
Pour tout $v \in \mathcal{K}$ fixé, $u \mapsto \langle Au|v\rangle_{\mathcal{K}}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. D'après le théorème de Riesz il existe donc un unique vecteur $A^\star v$ vérifiant (2.24). En utilisant l'unicité on montre facilement que $A^\star$ est linéaire. Montrons que $A^\star$ est continu. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle Au|v\rangle_{\mathcal{K}}| = |\langle u|A^\star v\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|A\|\|u\|\|v\|$$

On en déduit la continuité de $A^\star$ et l'inégalité $\|A^\star\| \leq \|A\|$.□

Proposition 2.20 *Sous les hypothèse du théorème précédent, on a $A^{\star\star} = A$ et $\|A^\star\| = \|A\|$*

Démonstration :
L'égalité $A^{\star\star} = A$ résulte de l'unicité de l'adjoint. L'égalité des normes provient de l'inégalité établie précédemment puis en échangeant les rôles de A et $A^\star$. □

2.3 Bases hilbertiennes

Nous allons voir dans cette section que les espaces de Hilbert admettent des bases orthonormées au sens des familles sommables (différent des bases algébriques).

2.3.1 Systèmes orthonormés

Définition 2.21 *Soit $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de vecteurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*
(i) On dit que ce système est orthonormé si

$$\|e_\lambda\| = 1,\ \forall\lambda \in \Lambda \tag{2.25}$$

$$\langle e_\lambda|e_{\lambda'}\rangle = 0,\ \text{si } \lambda \neq \lambda' \tag{2.26}$$

(ii) On dit que le système $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est total *si l'espace vectoriel, noté $\mathbb{V}ect[e_\lambda,\ \lambda \in \Lambda]$, engendré par ce système, est dense dans $\mathcal{H}$.*

Exemple 2.22 *(1) Considérons l'espace $\ell^2(\Lambda)$ des familles complexes $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ telles $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}|x_\lambda|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle x|y\rangle = \displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\overline{y_\lambda}$. $\ell^2(\Lambda)$ est un espace de Hilbert (exercice). De plus si on pose $e_\lambda = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}$[5], alors $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une base orthonormée (exercice). Cas particuliers : $\Lambda = \mathbb{N}, \Lambda = \mathbb{Z}$.*
(2) Considérons l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Posons $e_k(t) = \mathrm{e}^{2i\pi kt}$, $t \in [0,1]$, $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie aisément que le système $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormé. On montre qu'il est total en utilisant le théorème de Césaro sur les séries de Fourier et la densité de l'espace $\mathcal{C}[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $L^2[0,1]$ (voir Annexe et Exercice).

[5] $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de la partie A d'un ensemble E c'est à dire la fonction qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs

La propriété principale des systèmes orthonormés est l'inégalité suivante.

Théorème 2.23 (Inégalité de Bessel) *Soit $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un système orthonormé. Alors, pour toute partie finie A de Λ et pour tout $u \in \mathcal{H}$, on a*

$$\sum_{\lambda\in A} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 \le \|u\|^2 \tag{2.27}$$

Démonstration
Soit $\mathcal{G}_A$ l'espace vectoriel (de dimension finie) engendré par $\{e_\lambda,\ \lambda \in A\}$. On désigne par π_A le projecteur orthogonal sur $\mathcal{G}_A$. On alors $\|\pi_A u\|^2 \le \|u\|^2$. Or pour tout $v \in \mathcal{G}_A$ on a $\|v\|^2 = \sum_{\lambda\in A} |\langle v|e_\lambda\rangle|^2$. D'après les propriétés des projecteurs, si $\lambda \in A$, on a $\langle \pi_A u|e_\lambda\rangle = \langle u|e_\lambda\rangle$. On en déduit l'inégalité de Bessel. □

Remarque 2.24 *Il résulte de la définition du projecteur orthogonal π_A que la meilleure approximation de $u \in \mathcal{H}$ par un élément $v$de $\mathcal{G}_A$ est obtenue pour $v = \sum_{\lambda\in A} \langle v|e_\lambda\rangle e_\lambda$.*

2.3.2 bases hilbertiennes

Dans ce qui suit on caractérise les bases hilbertiennes parmi les systèmes orthonormés.

Théorème 2.25 (égalité de Parseval) *Un système orthonormé $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une base hilbertiennes si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 = \|u\|^2 \tag{2.28}$$

De plus, sous les conditions précédentes, pour tout $u \in \mathcal{H}$, on a, au sens des familles sommables,

$$u = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle u|e_\lambda\rangle e_\lambda \tag{2.29}$$

Démonstration :
Supposons d'abord que $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une base. Il existe alors une suite A_n de parties finies de Λ et $u_n \in \mathcal{G}_{A_n}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \|u - u_n\| = 0$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \|u - \pi_{A_n} u\| = 0$. Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie A_ε de Λ telle que

$$\|u\|^2 \le \sum_{\lambda\in A_\varepsilon} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 + \varepsilon \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 + \varepsilon$$

L'égalité de Parseval en résulte en faisant tendre ε vers 0.
Inversement, supposons l'égalité de Parseval vérifiée. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie B_ε de Λ telle que

$$\sum_{\lambda\in B_\varepsilon} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 \le \|u\|^2 \le \sum_{\lambda\in B_\varepsilon} |\langle u|e_\lambda\rangle|^2 + \varepsilon$$

On en déduit

$$\|u - \pi_{B_\varepsilon} u\|^2 = \|u\|^2 - \|\pi_{B_\varepsilon} u\|^2 \le \varepsilon$$

et donc $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est total dans $\mathcal{H}$.
Il résulte en particulier de ce qui précède que

$$u = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle u|e_\lambda\rangle e_\lambda$$

au sens des familles sommables.□

Corollaire 2.26 *Un système orthonormé $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une base hilbertienne si et seulement si on a la propriété suivante :*

$$\langle u|e_\lambda\rangle = 0, \forall \lambda \in \Lambda, \Rightarrow u = 0$$

Démonstration :
Si $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une base hilbertienne et si $\langle u|e_\lambda\rangle = 0, \forall\lambda \in \Lambda$ l'égalité de Parseval implique $u = 0$.
Pour la réciproque, on pose $v = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle u|e_\lambda\rangle e_\lambda$ (on vérifiera que la famille est bien sommable). Or on a $\langle u - v|e_\lambda\rangle = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et l'hypothèse entraîne que $u = v$. □

On montre maintenant que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.
Commençons par le cas plus explicite où $\mathcal{H}$ est séparable.

Théorème 2.27 (le cas séparable, procédé d'orthogonalisation de S *Supposons que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ possède une suite totale $\{u_n,\ n \ge 1\}$. Alors $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne dénombrable $\{\varphi_n\}_{n\ge1}$.*

Si de plus les vecteurs de la suite $\{u_n,\ \ n \geq 1\}$ sont mutuellement linéairement indépendants, on obtient une base hilbertienne $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ par l'algorithme suivant :

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ \ \varphi_{n+1} = c_n(u_n - \pi_{V_n} u_n),\ n \geq 1, \tag{2.30}$$

où V_n est le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \cdots, u_n$ et $c_n > 0$ est choisie telle que $\|\varphi_n\| = 1$.

Démonstration :
Tout d'abord on peut se ramener facilement au cas où les vecteurs de la suite $\{u_n,\ \ n \geq 1\}$ sont mutuellement linéairement indépendants. Montrons alors que pour tout n ; $\{\varphi_j\}_{1\leq j\leq n}$ est une base orthonormée de V_n. On démontre celà par récurrence sur n.
C'est vrai pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour n. On a clairement $\varphi_{n+1} \in V_n^{\perp}$ et $\varphi_{n+1} \neq 0$ car $u_{n+1} \notin V_n$. On en déduit alors que $\{\varphi_j\}_{1\leq j\leq n+1}$ est une base de V_{n+1}.
On en conclut alors que $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ est un système orthonormé total dans $\mathcal{H}$ donc une base hilbertienne. $\square$

Le cas des espaces de Hilbert non séparables se traite en utilisant le lemme de Zorn (rappelé dans le chapitre 4).

Théorème 2.28 (cas général) *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Démonstration :
Le principe est le suivant. On désigne par $\mathcal{O}$ l'ensemble des systèmes orthonormés de $\mathcal{H}$. Cet ensemble est muni de la relation d'ordre partiel définie par l'inclusion des ensembles. Or $\{\mathcal{O}, \subseteq\}$ est clairement inductif. D'après le lemme de Zorn, il existe donc dans $\{\mathcal{O}, \subseteq\}$ un élément maximal, que l'on note $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Si cet ensemble n'était pas total, alors il existerait φ de norme 1, orthogonal à e_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Mais alors $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\varphi\}$ serait un système orthonormé et celà contredit le caractère maximal de $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.$\square$

Un exemple typique de base hilbertienne est donné par la théorie des séries de Fourier (voir détails en exercice ainsi que d'autres exemples).

td2

Exercice 15 *Vérifier que l'espace préhilbertien $\mathcal{C}[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle u|v\rangle = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt$ a pour complété l'espace de Lebesgue $L^2[0,1]$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 16 *1) On considère l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{Z})$ des suites de carré sommable indexées sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $n \in Z$, on pose ${u^k}_n = \delta_{k,n}$.*
i) Montrer que $\{u^k\}_{k\in Z}$ est une base hibertienne de $\ell_2(\mathbb{Z})$.
2) Montrer que $e_k(x) = \mathrm{e}^{2i\pi kx}$, $k \in Z$ est une base hilbertienne de $L^2[0,1]$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 17 *On considère l'espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $L^2[-1,1]$, pour la mesure de Lebesgue et la suite $u_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.*
1) Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2[-1,1]$.
2) Appliquer le procédé de Schmidt pour construire une base orthormée de $L^2[-1,1]$ constituée le polynôme $p_n(t)$ (appelés polynômes de Legendre).
3) Montrer que les polynômes déterminé ci-dessus sont de la forme

$$L_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

où les c_n sont des constantes réelles arbitraires.
Déterminer c_n pour que $\int_{-1}^1 |L_n(x)|^2 dx = 1$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 18 *Soit l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$. On considère le sous-espace $F = \{u \in L^2[0,1],\ u = 0,\ \text{p.p sur } [0, \mathbb{1}/2]\}$.*
Déterminer l'opérateur Π_F de projection sur F.
Répondre à la même question pour l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et $F = \{u \in L^2(\mathbb{R}),\ u(-t) = u(t),\ \text{p.p}\}$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 19 *On considère l'espace $L^2(\mathbb{R})$ muni de la mesure de Lebesgue et la suite de fonctions $u_n(t) = t^n g(t)$ où $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.*
On rappelle que la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g est donnée par $\hat{g}(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$.
1) Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que $u \star g = 0$. Montrer que $u = 0$, p.p. ($u \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)g(x-t)dt$).
2) Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.
Indication : considérer les dérivées successives de $u \star g$ en 0 et montrer que $u \star g$ est une fonction analytique en 0.
3) Montrer que $L^2(\mathbb{R})$ possède une base orthonormée de la forme $\varphi_n(t) = h_n(t)g(t)$, où h_n est un polynôme réel, de degré n. Calculer φ_1, φ_2, φ_3.
Montrer que h_n a même parité que n. (les h_n portent le nom de polynômes d'Hermite).

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 20 *Soit H un espace hilbertien sur $\mathbb{C}$, de produit scalaire noté $\langle,\rangle$. Soit $\{v_1,\cdots,v_n\}$ un système de n vecteurs de H. On désigne par V l'espace vectoriel engendré par $\{v_1,\cdots,v_n\}$ et par G la matrice de coefficients $\langle v_j, v_k\rangle$. On se donne également une base orthonormée $\{e_1,\cdots,e_m\}$ de V. On identifie les applications linéaires de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^n$ et leurs matrices dans des bases canoniques respectives. Soit $A = \{a_{jk}\}$ la matrice définie par $v_j = \sum_{1\le k\le m} a_{jk}e_k$.*
1) Montrer que $G = AA^\star$ où $A^\star$ désigne l'adjoint de A. En déduire que $G \geq 0$ et que $\det G \geq 0$
2) Montrer que $\{v_1,\cdots,v_n\}$ est un système libre si et seulement si $\det G > 0$.
3) On suppose maintenant que $\{v_1,\cdots,v_n\}$ est un système libre. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale de V, $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$, telle que pour tout $1 \le k \le n$ on a

$$\varepsilon_k = \sum_{1\le j\le k} \alpha_{kj}v_j, \quad \text{avec} \quad \alpha_{kk} = 1.$$

4) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2\left([0,\infty[, \mathrm{e}^{-x}dx\right)$.
a) Montrer que le système $\{x^k, k \geq 0\}$ est total dans H.
Indication *: Fixer $\lambda > 1/2$ et considérer la fonction $F(\lambda,t) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{x(-\lambda+it)}dx$ où f est orthogonale à tous les x^k, que l'on interprétera comme une transformée de Fourier.*
b) Déduire de ce qui précède l'existence d'une base orthonormée $\{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ de H où φ_k est un polynôme de degré k.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 21 *On considère la suite de fonctions* $s_n(x) = \sin(\pi n x)$, n *entier* ≥ 1. *(i) Déterminer l'orthogonal de l'ensemble* $\{s_n; n \geq 1\}$ *dans* $L^2([-1,1])$.

On travaille désormais dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$.

(ii) Montrer que la suite (s_n) *est orthogonale dans* H *et calculer* $\|s_n\|$. *On pose* $b_n = s_n/\|s_n\|$.

(iii) Montrer que $(b_n)_{n\geq 1}$ *est une base hilbertienne de* H. *(On pourra utiliser (i)).*

(iv) Déterminer les coefficients de Fourier de $f(x) = \mathrm{e}^x$ *dans* $(b_n)_{n\geq 1}$, *puis en déduire que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(\mathrm{e} - (-1)^n)^2}{(1 + \pi^2 n^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4\pi^2}.$$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 22 *On considère l'espace de Hilbert* $\ell^2(\mathbb{N})$ *des suites de nombres complexes* $x = \{x_n\}_{\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$ *munit de la norme*

$$\|x\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

Montrer qu'une partie A *de* $\ell^2(\mathbb{N})$ *est relativement compacte si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes*

(i) A *est bornée*

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N_ε *tel que pout tout* $x \in A$ *on a*

$$\sum_{n\geq N_\varepsilon} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2$$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 23 *Soit* Ω *un espace muni d'une tribu* $\mathcal{A}$ *et d'une mesure de probabilité* P. *On suppose que* $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N$ *avec* $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall 1 \leq n \leq N$ *et* $P(A_n \cap A_m) = 0$ *si* $n \neq m$. *On désigne par* F *les sous-espace de* $L^2 = L^2(\Omega, P)$ *(sur* $\mathbb{R}$*) engendré par les fonctions indicatrices* $\mathbb{1}_{A_n}$, $\forall 1 \leq n \leq N$.
Déterminer la projection orthogonale sur F *et en déduire la meilleure approximation de* $f \in\in L^2$ *par* $\{\sum_{1\leq n\leq N} \lambda_n \mathbb{1}_{A_n}$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 24 *On désigne par* D *le disque de* $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x,y),\ x^2 + y^2 < 1\}$ *et par* $L^2(D)$ *l'espace de Hilbert complexe des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de Lebesgue sur* D. *On utilisera les coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \in]0,1[$, $\theta \in [0, 2\pi[$.
On pose $(Uf)(r,\theta) = \sqrt{r} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
1) Montrer que U *est une isométrie de* $L^2(D)$ *sur* $L^2([0,1] \times [0,2\pi])$.
Pour tout $f \in L^2(D)$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$ *on pose*

$$f_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (Uf)(r,\theta) d\theta$$

2) Montrer que l'on a

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 r|f_n(r)|^2 dr.$$

On désigne par Rad l'ensemble des fonctions $f \in L^2(D)$ *invariantes par rotation i.e de la forme* $f(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}$.
Montrer que Rad est un sous espace fermé de $L^2(D)$.
3) Montrer que f *est invariante par rotation si et seulement si* $\forall n \neq 0$, $f_n(r) = 0$ *pour presque tout* $r \in]0,1[$. *En déduire que le projecteur orthogonal* Π_{Rad} *sur le sous-espace Rad est donné par*

$$(\Pi_{Rad} f)(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta$$

indications♠ ;Corrigé♣

Indications 14 *utiliser la densité de* $\mathcal{C}[0,1]$ *dans* $L^2[0,1]$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 15 *montrer que ces deux systèmes sont totaux.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 16 *1) Appliquer le théorème de Stone-Wierstrass.*
2) Suivre le texte.
3) montrer que les polynômes $p_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ *sont orthogonaux et calculer* $\int_{-1}^{1} |p_n(x)|^2 dx$ *par des intégrations par parties.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 17 *utiliser la condition d'orthogonalité* $\langle u - \Pi_F u, v\rangle = 0$, $\forall v \in F$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 18 *1) utiliser la transformation de Fourier.*
2) montrer que $u \star g$ *est analyique et calculer ses dérivées successives en 0.*
3) appliquer le procédé de Schmidt.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 19 *1) expliciter les produits scalaires* $a_j k$ *dans base* $\{e_j\}$.
2) revoir l'algèbre lináire.
3) idem.
4) mr̂e méthode que pour l'exercice (19).

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 20 *(i) jouer avec les fonctions paires et impaires.*
(ii) calculer avec des formules trigonométriques adaptées.
(iii) prolonger par parité.
(iv) appliquer le théorm̀e de Parseval.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 21 *s'inspirer de la preuve du théorm̀e d'Ascoli (utiliser la précompacité).*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 22 *remarquer que les fonctions* $\mathbb{1}_{A_j}$ *sont deux à deux orthogonales.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 23 *1) calculer l'intégrale en coordonnées polaires.*
2) formule de Parseval.
3) utiliser 2).

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Correction 14 *On sait que l'espace $L^2[0,1]$ est complet pour la norme hilbertienne $\|\bullet\|_2$ définie par $\|u\|_2 = (\int_0^1 |u(x)|^2 dx)^{1/2}$. $\mathcal{C}[0,1]$ étant dense dans $L^2[0,1]$ on en déduit le résultat.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 15 *i) Soit $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Posons $X_N = \sum_{|n|\leq N} x_n u^n$. On a alors $\|X_N - x\|_2^2 = \sum_{|n|N} |x_n|^2$. Par conséquent*

$$\lim_{N\to+\infty} \|X_N - x\|_2 = 0$$

Il en résulte que la famille orthonormée $\{u^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale.
ii) Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies des e_k. Il résulte du théorème de Césaro que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}_\sharp$ des fonctions continues et périodiques sur $[0,2\pi]$ pour la norme $\|\bullet\|_\infty$. Ce résultat peut aussi se démontrer en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à la sous-algèbre $\mathcal{P}_\sharp$ des plynômes trigonométriques.
Soit donc $u \in L^2[0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe v fonction continue sur $[0,1]$, à support dans $]0,1[$, telle que $\|u-v\|_2 \leq \varepsilon$. D'autre part il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\|v-p\|_\infty \leq \|v-p\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ce qui implique : $\|u-p\| \leq 2\varepsilon$. La suite est donc totale.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 16 *1) on adapate sans difficulté la démonstration de l'exercice (15).*
2) on met en oeuvre la procédure d'orthogonalisation de Schmidt dans difficulté.
3) désignons par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace des polynômes de degráu plus n. L'orthogonal de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_{n+1}$ étant de dimension 1, la suite de polynômes déterminés dans 2) est unique à des constantes arbitraires près. Or les p_n dont des polynômes de degré n. Ils sont ortghogonaux car pour $m < n$ on a, en intégrant par parties, $\int_{-1}^1 p_n(x)x^m dx = 0$.
Calculons $\|p_n\|_2$.
En intégrant par parties, on a

$$\int_{-1}^1 p_n(x)^2 dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$$

Or on a

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^\pi \sin^{2n+1} t dt$$

En notant que $\sin^{2n+1} t = \sin^{2n-1} t(1-\cos^2 t)$, et en intégrant par parties, on obtient la relation de récurrence $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$. Ce qui implique

$$I_n = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

et donc

$$c_n^2 = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{n+1}(n!)^2}.$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 17 *Les espaces de Hilbert sont supposés sur $\mathbb{R}$.*
On sait (voir cours) que Π_u est l'unique élément de F tel que $\langle u - \Pi_F u, v\rangle = 0$, $\forall v \in F$.
On a donc $\int_{1/2}^1 u(x)v(x)dx = \int_{1/2}^1 \Pi_F u(x)v(x)dx$, $\forall v \in F$ d'où $\Pi_F u = u$ sur $[1/2,1]$. Par définition de F, $\Pi_F u = 0$ sur $[0,1/2]$. On a donc obtenu que Π_F est l'opérateur de multiplication par la fonction indicatrice de F i.e $\Pi_F u = \mathbb{1}_F u$, $\forall u \in F$.
Par un raisonnement identique on obtient dans le 2ème cas que Π_F est l'application qui à une fonction associe sa partie paire, i.e

$$\Pi_F u(t) = \frac{u(t)+u(-t)}{2}$$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 18 *1) Si $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier (voir et revoir l'Annexe Intégration) on a $\mathcal{F}(u\star g) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(g)$. Or on sait que $\mathcal{F}(g)(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$. Donc si $u\star g = 0$ alors $\mathcal{F}(u) = 0$ et $\mathcal{F}$ étant injective sur $L^2(\mathbb{R})$ on a $u = 0$.*
2) On a

$$u\star g(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x)g(t-x)dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{e}^{-(t-x)^2/2} dx$$

On utilise alors le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (Annexe Intégration, corollaire du théorème de convergence dominée) pour montrer que $u\star g(x)$ est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout n entier il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que

$$\frac{d^n u\star g}{dt^n}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x)P_n(x-t)\mathrm{e}^{-(t-x)^2/2}dx$$

Par conséquent si $\int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}u(x)dx = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ alors $\frac{d^n u\star g(t)}{d^n}(0) = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Montrons maintenant que $u\star g(t)$ est analytique sur $\mathbb{R}$.
On fixe un réel $T>0$ et on suppose que $|t|\le T$. Il suffit de montrer que la fonction $f(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{xt}dx$ est analytique dans $]-T,T[$. Pour cela on développe e^{xt} en série entière, on repporte dans l'intégrale et on montre que l'on peut intégrer terme à terme. On en déduit alors que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!}t^n$$

avec $a_n = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}x^{2n}dx$.
On pourra également remarquer que $|a_n|^2 \le Cn!$, $\forall n\in N$ où C est indépendante de n. $f(t)$ est donc la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.
Il résulte donc des propriétés des fonctions analytiques que $u\star g = 0$ et donc $u=0$ d'après la question 1).
3) Cette question est une application standard du procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 19 *1) On a*

$$\langle v_j, v_k\rangle = \sum_{\ell} a_{j\ell}\overline{a_{k\ell}}$$

Or $A^\star = \{\overline{a_{\ell k}}$. D'où on a bien $G = AA^\star$. eG est donc un endomorphisme hermitien positif de V. En particulier ses valeurs propres sont positives et $\det G \ge 0$.
2) Si le système est libre alors A est inversible d'où $\det A \neq 0$ $\det G = |\det A|^2 > 0$.
Inversement si $\det G > 0$ alors A est un endomorphisme injevtif de V donc bijectif (V est de dimension finie). Le système $\{v_1,\cdots,v_n\}$ étant l'image par A d'un système libre est donc libre.
3) Résulte du procédé d'orthogonalisation de Schmidt et d'une remarque faite dans l'exercice (17).
4) On suit la même méthode que dans l'exercice (19).

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 20 *(i) Les fonctions s_n sont impaires. Elles engendrent dans $L^2[-1,1]$ le sous-espace des fonctions impaires. On vérifie facilement que l'orthogonal de l'espace des fonctions impaires est l'espace des fonctions paires.*
(ii) Rappelons la formule trigonométrique :

$$\sin(n\pi x)\sin(n'\pi x) = 1/2(\cos((n-n')\pi x) - \cos((n+n')\pi x).$$

On en déduit que $/int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(n'\pi x)dx = 0$ si $n\neq n'$.
Un calciul élémentaire donne $\|s_n\|^2 = 1/2$.
(iii) Soit $u\in L^2[0,1]$, f orthogonal à tous les b_n. Prolongeons u en une fonction paire (presque-partout), $\tilde u$, sur $[-1,1]$. D'après (i) $\tilde u$ est dans le sous-espace des fonctions impaires, on a donc $\tilde u = 0$ presque partout sur $[-1,1]$ et donc $u=0$ presque partout sur $[0,1]$. Par conséquent $\{b_n\}$ est un système orthonormale et totale donc une base de $L^2[0,1]$.
(iv) On applique le théorème de Parseval. On a d'une part $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}dx = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$ et d'autre part le calcul des coefficients de Fourier est donné par

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \sin(\pi n x)dx = \frac{\pi n}{\pi^2n^2+1}(1-(-1)^n\mathrm{e})$$

La formule en résulte.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 21 *Soit A une partie relativement compacte de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un recouvrement de A par un nombre fini de boules $B(a_j,\varepsilon/2)$, $1\le j\le J$. On en déduit que A est bornée.*
Soit $x\in A$. Il existe j tel que $\|x-a_j\|\le\varepsilon$.
Soit un entier N_ε à déterminer. Appliquons l'inégalité triangulaire

$$\left(\sum_{n\ge N_\varepsilon}|x_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{n\ge N_\varepsilon}|x_n-a_{j,n}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n\ge N_\varepsilon}|a_{j,n}|^2\right)^{1/2}$$

Or pour tout j, $1 \leq j \leq J$, il existe $N_{j,\varepsilon}$ tel que

$$\left(\sum_{n \geq N_{j,\varepsilon}} |a_{j,n}|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon/2$$

On choisit alors $N_\varepsilon = \max_{1 \leq j \leq J} N_{j,\varepsilon}$. On a ainsi

$$\left(\sum_{n \geq N_\varepsilon} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in A$.
Supposons maintenant les conditions (i) et (ii) satisfaites. Montrons que A est précompacte. On pose $N = N_\varepsilon$.
Désignons par Π_N la projection de ℓ^2 sur $\mathbb{C}^N$ définie par $\Pi_N(x) = (x_1, \cdots, x_N)$. $\Pi(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{C}^N$ donc précompacte. Il existe donc un recouvrement de $\Pi_N(A)$ par un nombre fini de boules de $\mathbb{C}^N$, $B_{\mathbb{C}^N}(a_j, \varepsilon)$, $1 \leq j \leq J$. On pose alors $\tilde{a}_{j,n} = a_{j,n}$ si $1 \leq n \leq N$ et $\tilde{a}_{j,n} = 0$ si $n > N$. Soit alors $x \in A$. Il existe j, $1 \leq j \leq J$, tel que $\Pi_N x \in B_{\mathbb{C}^N}(a_j, \varepsilon)$. On a alors

$$\|x - \tilde{a}_j\|_2^2 = \|\Pi_N x - a_j\|^2 + \sum_{n > N} |x_n|^2 \leq 2\varepsilon^2$$

A est donc recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon\sqrt{2}$. ε étant quelconque, A est précompact.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 22 *F est un sous-espace de dimension N et $\mathbb{1}_{A_n}$, $1 \leq n \leq N$ est une base orthogonale de F. F est donc un sous-espace fermé. Soit g la projection orthogonale de f sur F. Posons $g = \sum_{1 \leq n \leq N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$. Alors $\langle f - g, \mathbb{1}_{A_n}\rangle = 0$, $\forall 1 \leq n \leq N$ si et seulement on a*

$$\alpha_n = \frac{\int_{A_n} f(x)dP(x)}{P(A_n)}.$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 23 *1) Le calcul d'une intégrale en coordonnées polaires donne*

$$\iint_D |f(x,y)|^2 dxdy = \iint_{]0,1[\times[0,2\pi[} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$$

U est donc bien une isométrie.
2) Il résulte du théorème de Fubini que pour presque tout $r \in]0,1[$, la fonction $\theta \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est localement de carré intégrable et 2π périodique. Les théorme de Parseval, de Fubini et de convergence monotone entrainent que

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 r|f_n(r)|^2 dr.$$

Montrons que Rad est fermé. On travaille en coordonnées polaires. Soit f_n une suite de $L^2]0,1[$. Si la suite $\tilde{f}_n(r,\theta) = f_n(r)$ converge dans $L^2]0,1[\times[0,2\pi[$ alors elle converge dans $L^2]0,1[$ et les limites coïncident. On en déduit donc que Rad est fermé.
3) f est invariante par rotation si et seulement si pour presque tout $r \in]0,1[$ le développement en série de Fourier en θ est réduit au terme constant, ce qui veut dire que $f_n(r) = 0$ pour presque tout $r \in]0,1[$ et tout $n \neq 0$.
Soit $g \in L^2(D)$ une fonction radiale quelconque. Appliquons 2) à la différence $f - g$ on constate que $\|f - g\|_2^2$ est minimale si et seulement si $g = f_0$ d'où

$$(\Pi_{Rad} f)(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Chapitre 3. Applications linéaires et Espaces de Hilbert

3.1 Propriétés Générales

Proposition 3.1 *Soient 2 espaces de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ et A une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. On a alors :*
A est unitaire si et seulement si $A^\star = A^{-1}$.

Démonstration :
Rappelons que A unitaire signifie que A est une isométrie surjective, donc vérifie, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle$$

ce qui équivaut à $A^\star A = AA^\star = \mathbb{1}$. □

Proposition 3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ étant un espace de Hilbert complexe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) A est auto-adjoint
ii) $\forall u \in \mathcal{H}$, $\langle Au|u\rangle \in \mathbb{R}$

Démonstration :
A est auto-adjoint si et seulement si $\forall u, v \in \mathcal{H}$ on a

$$\langle Au|v\rangle = \overline{\langle u|Av\rangle}.$$

On a donc en particulier ii).
Supposons ii) vérifiée. Il en résulte alors que l'on a pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$\langle (A - A^\star)u|u\rangle = 0.$$

Pour en conclure que $A = A^\star$ on utilise le lemme suivant

Lemme 3.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et b une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Alors b s'annule identiquement sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ si et seulement si b s'annule sur la diagonale de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$.*

Démonstration :
Ce lemme est une conséquence de la formule de polarisation suivante :

$$\begin{aligned} b(u,v) = \frac{1}{4}[&b(u+v,u+v) - b(u-v,u-v) + \\ &ib(u+iv,u+iv) - ib(u-iv,u-iv)] \end{aligned} \tag{3.31}$$

On en déduit la proposition en utilisant le lemme pour la forme sesquilinéaire

$$b(u,v) = \left\langle \frac{A - A^\star}{2i} u|v \right\rangle. \tag{3.32}$$

□

Proposition 3.4 *Soient 2 espaces de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ et A une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. On a alors :*

$$\ker A = (\mathrm{Im} A^\star)^\perp, \ \ker A^\star = (\mathrm{Im} A)^\perp \tag{3.33}$$

$$\overline{\mathrm{Im} A} = (\ker A^\star)^\perp, \ \overline{\mathrm{Im} A^\star} = (\ker A)^\perp \tag{3.34}$$

En particulier si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ et si A est autoadjoint, alors

$$\ker A = (\mathrm{Im} A)^\perp, \ \overline{\mathrm{Im} A} = (\ker A)^\perp \tag{3.35}$$

Et

$$A \text{ est bijectif} \Longleftrightarrow \{A \text{ est injectif d'image Im(A) fermée}\} \tag{3.36}$$

Démonstration :
C'est une conséquence facile de ce qui précède.□

Proposition 3.5 (norme d'un opérateur auto-adjoint) *soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint. On alors :*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Au|u\rangle| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle Au|u\rangle| \tag{3.37}$$

Démonstration :
Posons $N_A = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle Au|v\rangle|$. On a facilement $N_A = \sup_{\|u\|=1} |\langle Au|u\rangle|$.
L'inégalité $\|A\| \leq N_A$ résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par ailleurs pour $u, v \in \mathcal{H}$ on a

$$\langle A(u+v)|u+v\rangle \leq N_A\|u+v\|^2, \ \text{ et } \ \langle A(u-v)|u-v\rangle \geq -N_A\|u-v\|^2$$

Il résulte de l'identité du parallélogramme que

$$2(\langle Au|v\rangle + (\langle Av|u\rangle \leq 2N_A(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Supposons $Au \neq 0$. En appliquant l'inégalité précédente à $v = \frac{Au}{\|Au\|}\|u\|$on obtient $\|Au\| \leq N_A\|u\|$. □

Il est important pour les applications de distinguer plusieurs modes de convergence pour les suites de $\mathcal{H}$ et les suites de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 3.6 (convergences fortes et faibles) *i) On dit que qu'une suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ converge* fortement *vers $v \in \mathcal{H}$ si elle converge pour la norme de $\mathcal{H}$.*
On dit que cette suite converge faiblement *vers v si pour tout $w \in \mathcal{H}$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n|w\rangle = \langle v|w\rangle$$

ii) Soit $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. On dit que cette suite converge vers A :

- *en norme si*
$$\lim_{n\to+\infty} \|A - A_n\| = 0.$$
- *fortement si pour tout $u \in \mathcal{H}$, $A_n u$ converge fortement dans $\mathcal{K}$ vers Au.*
- *faiblement si pour tout $u \in \mathcal{H}$, $A_n u$ converge faiblement dans $\mathcal{K}$ vers Au.*

3.2 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Il est utile d'introduire sur l'ensemble des opérateurs auto-adjoints une relation d'ordre partiel naturelle.

Définition 3.7 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, auto-adjoints. On dira que $A \leq B$ si, pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a $\langle Au|u\rangle \leq \langle Bu|u\rangle$. On dit que A est positif si $A \geq 0$.*

Proposition 3.8 *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, auto-adjoint.*
i) Le spectre $\sigma(A)$ de A est réel et vérifie $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$.
ii) Si $m\mathbb{1} \leq A \leq M\mathbb{1}$ ($m, M \in \mathbb{R}$) alors $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.

Démonstration :
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Posons $\delta = |\Im z|$. Montrons que $A - z\mathbb{1}$ est inversible. Pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a
$$\Im[\langle Au|u\rangle] \geq \delta\|u\|^2$$
On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|(A - z\mathbb{1})u\| \geq \delta\|u\| \tag{3.38}$$

Il en résulte que $A - z\mathbb{1}$ est injectif. De même en remplaçant z par $\bar{z}$ on obtient que $A - \bar{z}\mathbb{1}$ est injectif d'où il résulte que l'image de $A - z\mathbb{1}$ est dense dans $\mathcal{H}$.
Or l'inégalité (3.38) entraîne également que l'image de $A - z\mathbb{1}$ est fermée. En effet si Au_n converge vers f dans $\mathcal{H}$, on déduit de (3.38) que u_n est une suite de Cauchy, donc converge vers un $u \in \mathcal{H}$ et A étant continue on a $Au = f$. L'inclusion dans i) résulte du chapitre précédent.
La preuve de ii) se fait par la même méthode. Soit z réel tel que $z < m$. On a alors $|\Re[\langle Au|u\rangle]| \geq \delta\|u\|^2$ avec $\delta = m - z$. On obtient comme ci-dessus l'inégalité (3.38) d'où l'on déduit que $z \in \rho(A)$. On procède de même si $z > M$.□

Théorème 3.9 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur positif. Il existe alors un unique opérateur positif B tel que $B^2 = A$. On note $B = \sqrt{A}$.*

Démonstration :
Notons qu'en dimension finie ce résultat s'obtient par diagonalisation de A dans une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Pour le moment nous ne savons pas diagonaliser en dimension infinie (on le fera plus loin pour les opérateurs compacts).
Notons que par hypothèse $0 \leq A \leq \mathbb{1}\|A\|$. Quitte à multiplier A par une constante, on se ramène au cas où $0 \leq A \leq \mathbb{1}$.
Posons $Y = \mathbb{1} - A$ et $X = \mathbb{1} - B$. L'équation $B^2 = A$ équivaut à

$$X = \frac{1}{2}(Y + X^2) \tag{3.39}$$

On essaie de résoudre l'équation (3.39) par itérations en définissant la suite
$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(Y + X_n^2), \quad X_0 = 0.$$
On montre facilement par récurrence que $0 \leq X_n \leq \mathbb{1}$ puis que X_n est un polynôme en Y (de degré $\leq 2^n$), dont les coefficients sont réels et positifs. Ensuite, de l'identité

$$X_{n+1} - X_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})(X_n - X_{n-1})$$

il résulte que la suite X_n est croissante. On a donc, pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$0 \leq \langle X_n u|u\rangle \leq \langle X_{n+1}u|u\rangle \leq \|u\|^2$$

On peut donc définir
$$q(u) = \lim_{n\to+\infty} \langle X_n u|u\rangle$$

En utilisant le lemme de polarisation, on définit alors

$$b(u,v) = \lim_{n\to+\infty} \langle X_n u|v\rangle$$

et on montre que b est une forme hermitienne, continue sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Il résulte du théorème de Riesz, qu'il existe $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $b(u,v) = \langle Xu|v\rangle$. Montrons alors que $X_n u$ converge vers Xu dans $\mathcal{H}$. Posons $Z_{n,p} = X_{n+p} - X_n$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme hermitienne positive $h(u,v) = \langle Z_{n,p}u|v\rangle$ on obtient

$$\|Z_{n,p}u\|^4 \le \langle Z_{n,p}u|u\rangle \|u\|^2$$

D'où il résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n u$ existe et est égale à Xu.
On peut alors passer à la limite dans l'égalité

$$\langle X_{n+1}u|v\rangle = \frac{1}{2}(\langle Yu|v\rangle + \langle X_n u|X_n v\rangle)$$

pour en déduire que X vérifie (3.39).
Montrons maintenant que $B^2 = A$ a une solution et une seule. La solution B que l'on a construite commute avec A et commute avec tout $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui commute avec A. En effet si C commute avec A, il commute avec toute puissance de A donc avec toute fonction polynômiale $p(A)$. Or B est limite forte d'une X_n ou X_n est un polynôme en A. On peut donc passer à la limite dans l'égalité $CX_n u = X_n Cu$, $\forall u \in \mathcal{H}$.
Soit alors $D \ge 0$ vérifiant $D^2 = A$. D commute avec A donc avec B. Posons $v = (B-D)u$, $u \in \mathcal{H}$. On a

$$\langle (B+D)v|v\rangle = \langle (B^2 - D^2)u|v\rangle = 0$$

d'óù

$$\langle Bv|v\rangle = \langle Dv|v\rangle$$

Or d'après la première partie, il existe $E \ge 0$ tel que $E^2 = B$ et on a alors $Ev = 0$ et $Bv = 0$. De même on obtient $Dv = 0$. Or on a $\|(B-D)^2u\|^2 = \langle (B-D)v|u\rangle = 0$, d'où $D = B$. □

Corollaire 3.10 (décomposition polaire) *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Posons $|A| = \sqrt{A^\star A}$.*
Il existe alors $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant :
i) $U = 0$ sur $\ker A$, U est une isométrie sur $(\ker A)^\perp$.
ii) $A = U|A|$.
De plus cette décomposition de A est unique. Si $A = VB$ avec $B \ge 0$ avec $V = 0$ sur $\ker A$, V isométrique sur $\mathrm{Im}B$ alors $B = |A|$ et $V = U$.

Démonstration :
Pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a

$$\||A|u\|^2 = \langle A^\star Au|v\rangle = \|Au\|^2$$

En particulier $\ker A = \ker |A|$ et $\overline{\mathrm{Im}|A|} = (\ker A)^\perp$. Cela permet donc de définir U de la manière suivante : sur $\mathrm{Im}|A|$ on pose $U|A|u = Au$. Cette isométrie se prolonge par continuité à $\overline{\mathrm{Im}|A|}$ et par 0 sur le supplémentaire orthogonal.
Montrons l'unicité. Si $A = VB$ on a $A^\star = BV^\star$ et $A^\star A = BV^\star VB$. Or $V^\star V = \mathbb{1}$ sur $\mathrm{Im}B$ d'où $B = |A|$. On en déduit ensuite que $V = U$.□

3.3 Espaces de Hilbert et Mécanique Quantique

La théorie des espaces de Hilbert s'est développée sous l'impulsion de D. Hilbert et de von Neumann en grande partie pour les besoins de la mécanique quantique. Nous allons dans cette section expliquer brièvement pourquoi.
Le cadre mathématique qui a peu à peu émergé autour des années 1930 pour décrire le comportement des particules quantiques (par exemple l'électron) est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les éléments représentent les différents états possibles de la particule. Dans le cas d'une particule isolée on considère $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ pour le produit scalaire usuel. Les fonctions de $\mathcal{H}$ sont alors les fonctions d'onde introduites par de Broglie. L'interprétation communément admise (École de Copenhague) est la suivante : si ψ est la fonction d'onde normalisée ($\|\psi\|_2 = 1$) de la particule alors on peut affirmer que la particule se trouve dans une partie mesurable B de $\mathbb{R}^3$ avec la probabilité

$$P_\psi[B] = \int_B |\psi(x)|^2 dx.$$

La deuxième notion importante pour décrire les système quantiques est celle d'observable : comment représenter une mesure effectuée par un appareil ?
En Mécanique quantique un appareil de mesure est représenté par une application linéaire auto-adjointe $\mathcal{H} \xrightarrow{A} \mathcal{H}$. Assez souvent l'observable A sera seulement définie sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de $\mathcal{H}$, ce qui crée une difficulté mathématique que nous n'approfondirons pas ici. Pour simplifier, on suppose dans la suite que les observables sont partout définies et continues sur $\mathcal{H}$.
Le résultat d'une mesure effectuée par l'observable A sur la particule

dans l'état ψ est alors le nombre réel $\langle A\rangle_\psi = \langle \psi, A\psi\rangle$. Plus exactement $\langle A\rangle_\psi$ est une mesure moyenne, conformément à l'interprétation probabiliste expliquée ci-dessus. Il y a donc lieu d'introduire la variance $\mathbb{V}_\psi(A)$ naturellement définie par

$$\mathbb{V}_\psi(A) = \langle (A - \langle A\rangle_\psi \mathbb{1})^2\rangle_\psi.$$

Or on a également

$$\mathbb{V}_\psi(A) = \|(A - \langle A\rangle_\psi \mathbb{1})\psi\|^2$$

La mesure moyenne est donne donc un résultat déterministe (presque sûr, au sens probabiliste) si et seulement si $A\psi = \langle A\rangle_\psi \psi$. C'est à dire si et seulement si ψ est vecteur propre de A. On développera dans les exercices les applications de la théorie des opérateurs à la mécanique quantique. Mentionnons ici l'une des principales difficultés de cette théorie : l'ordre dans lequel on effectue les mesures a une importance. En effet si l'on effectue 2 mesures représentées par des observables A et B on a alors en général $\langle AB\rangle_\psi \neq \langle BA\rangle_\psi$ car en général $AB \neq BA$ (c'est déjà le cas pour des matrices !). Il en résulte en particulier le fameux *principe d'incertitude d'Heisenberg* que l'on détaillera en exercice. Ceci est l'une des grandes différences entre le monde quantique (microscopique) et le monde dans lequel nous vivons. A notre échelle ce phénomène n'est pas visible, car la constante de Planck est trop petite.
Soient A, B deux opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On pose $\{A, B\} = i(AB - BA)$. Le principe d'incertitude est contenu dans l'inégalité suivante dont une preuve est proposée en exercice.

$$\mathbb{V}_\psi(A)\mathbb{V}_\psi(B) \geq 4|\langle\{A, B\}\rangle|_\psi. \tag{3.40}$$

3.4 Problèmes variationnels

Nous allons voir que la formulation variationnnelle de certains problèmes aboutit à l'étude d'opérateurs entre epaces de Hilbert.
Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert complexe et $B : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue. On suppose de plus qu'il existe $E > 0$ telle que

$$\Re(B[u, u]) \geq E\|u\|^2_{\mathcal{V}}, \ \ \forall u \in \mathcal{V}. \tag{3.41}$$

On dit alors que B est elliptique, de constante d'ellipticité E.
On désigne par $\mathcal{V}'^{,a}$ l'espace des formes anti-linéaires continues sur $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$.

Remarque 3.11 *i) $\mathcal{V}'^{,a}$ et $\mathcal{V}'$ sont des espaces isométriques via l'application $f \mapsto \bar{f}$ où $\bar{f}(u) = \overline{f(u)}$.*
ii) Ici, nous ne faisons pas l'identification de $\mathcal{V}'^{,a}$ avec $\mathcal{V}$ via le théorème de Riesz pour des raisons qui seront vues plus loin.

Voici le résultat principal

Théorème 3.12 (Lax-Milgram) [6] *Sous les hypothèses précédentes (en particulier (3.41)), pour toute $f \in \mathcal{V}'^{,a}$,* il existe $u \in \mathcal{V}$, unique, *tel que*

$$B[u, v] = f(v), \ \ \forall v \in \mathcal{V}. \tag{3.42}$$

Démonstration :
On désigne par τ l'isomorphisme défini par le théorème de Riesz. $\mathcal{V}'^{,a} \xrightarrow{\tau} \mathcal{V}$. Posons $Au(v) = B[u, v]$ et $\tilde{A} = \tau A$. Il est facile de voir que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'^{,a})$ et $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Nous allons montrer que $\tilde{A}$ est une application bijective, d'inverse continu, de $\mathcal{V}$ dans lui-même. Il en résultera que A est une bijection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'^{,a}$). Or le problème (3.42) est équivalent à $Au = f$.
Or d'après (3.41) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, $\forall u \in \mathcal{V}$,

$$\|\tilde{A}u\|\|u\| \geq \Re(\langle\tilde{A}u|u\rangle) \geq E\|u\|^2$$

et

$$\|\tilde{A}u\| \geq E\|u\| \tag{3.43}$$

On en déduit que $\tilde{A}$ est injectif et que son image est fermée.
Ensuite, considérons la forme hermitienne conjuguée

$$B^*[u, v] = \overline{B[v, u]}$$

B^* est elliptique (de même constante d'ellipticité E). On désigne par A^* l'opérateur associé à B^*. On vérifie facilement que $\tilde{A^*} = \tilde{A}^\star$. Il en résulte donc (3.43)

$$\|\tilde{A}^\star u\| \geq E\|u\|.$$

On en déduit que $\tilde{A}^\star$ est injective et donc que $\mathrm{Im}\tilde{A}$ est dense dans $\mathcal{V}$. Par conséquent $\tilde{A}$ est bijective et A également. D'autre part (3.43) entraîne que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{E}.$$

□

[6] Peter Lax est un mathématicien contemporain, américain. Il vient de recevoir le prix Abel (janvier 2005) pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles

Définition 3.13 (opérateur de Green) *On appelle opérateur de Green du problème variationnel (3.42) l'opérateur $G = A^{-1}$. C'est l'opérateur solution du problème.*

On vérifiera en exercice que le théorème de Lax-Milgram est encore valide pour les espaces de Hilbert réels et que $u \in \mathcal{V}$ est solution du problème variationnel (3.42) si et seulement si u minimise l'énergie $\mathcal{E}$.

Nous allons maintenant considérer un exemple qui nous servira de modèle dans la suite.
Il s'agit de résoudre une équation diff́erentielle, appelée équation de Sturm-Liouville, de la forme

$$-u'' + (q-\lambda)u = f. \tag{3.44}$$

Les fonctions q et f sont des fonctions données sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, λ est un paramètre réel (ou complexe), u est une fonction inconnue, sur laquelle on impose des conditions aux extrémités a, b de l'intervalle. Résoudre le problème (3.44) c'est déterminer les valeurs de λ (appelées valeurs régulières) pour lesquelles le problème admet une unique solution pour tout f et lorsque λ n'est pas régulière, déterminer les conditions sur f permettant de déterminer toutes les solutions.
Nous allons montrer dans la suite du cours que les méthodes de l'analyse fonctionnelle permettent de répondre complètement à ces questions. Ici nous traiterons les cas de conditions périodiques. D'autres cas seront étudiés en exercice, comme par exemple la condition de Dirichlet $(u(a) = u(b) = 0)$. Pour simplifier les notations on suppose que $a = 0$ et $b = 1$ et $\lambda = 0$
On se donne donc une fonction q, continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$. On suppose que $q(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On lui associe la forme hermitienne

$$B_q[u,v] = \int_0^1 (u'\overline{v'} + qu\overline{v})dx$$

pour u, v fonctions continûment dérivables et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$. Le lien entre B_q et le problème (3.44) résulte de la formule d'intégration par parties suivante, en supposant que u est de classe C^2,

$$B_q[u,v] = -\int_0^1 (u''\overline{v} + qu\overline{v})dx. \tag{3.45}$$

Introduisons les notations suivantes. Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $C^k_\sharp$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques. On vérifiera que $C^k_\sharp$ est un espace de Banach pour la norme

$$|u|_k = \sup_{x\in\mathbb{R},\, 0\le j\le k} \left|\frac{d^j u(x)}{dx^j}\right|.$$

Pour se placer dans le cadre du théorème de Lax-Milgram, on introduit un autre famille d'espaces qui sont des espaces de Hilbert. Voici leur définition. Soit u un fonction localement de carré intégrable, 1-périodique sur $\mathbb{R}$. On désigne par $\{c_n(u)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier. On dit alors que $u \in H^k_\sharp$ $(k \ge 0)$ si et seulement si on

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^k |c_n(u)|^2 < +\infty$$

On notera $L^2_\sharp = H^0_\sharp$. Rappelons que $u \in L^2_\sharp$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u)|^2 < +\infty$ et le théorème de Parseval donne $\|u\|^2_\sharp = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u)|^2$.
Notons également l'inégalité suivante qui s'obtient par des intégrations par parties. Pour tout $k \ge 0$, $u \in C^k_\sharp$, $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|(2\pi n)^k c_n(u)| \le |u|_k$$

Il en résulte que $C^k_\sharp \subseteq H^k_\sharp$ et l'injection est continue.
On introduit également l'espace vectoriel $\mathcal{P}_\sharp$ des polynômes trigonométriques 1-périodiques sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}_\sharp$ est donc l'espace vectoriel complexe engendré par $e_n(x) = e^{2i\pi n x}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 3.14 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H^k_\sharp$ est un espace vectoriel. La forme sesquilinéaire suivante est un produit scalaire sur $H^k_\sharp$.*

$$\langle u|v\rangle_k := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^k c_n(u)\overline{c_n(v)}$$

et $H^k_\sharp$, pour ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.
De plus $\mathcal{P}_\sharp$ est dense dans $H^k_\sharp$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

Démonstration :
Il est commode de considérer un espace de suites canoniquement isométrique à $H^k_\sharp$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit l'ensemble $\ell_{k,2}$ des suites $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^k |x_n|^2 < +\infty$. L'étude des séries de Fourier nous apprend que l'application $\Phi\ : u \mapsto \{c_n(u)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie de $L^2_\sharp$ sur $\ell_2 = \ell_{0,2}$. D'autre part les espaces $\ell_{k,2}$ sont isomorphes à ℓ_2 via l'isométrie J_k définie

pour toute suite $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $u \in \ell_2$, par $J_k(u)_n = \dfrac{u_n}{(1+n^2)^{k/2}}$. On en déduit donc la première partie du théorème.
Or $\{e_n\}$ est une base orthonormée de $L^2_\sharp$ qui est transformée en une base orthonormée de $H^k_\sharp$ par l'isométrie $J_k \circ \Phi^{-1}$. Il en résulte que $\mathcal{P}_\sharp$ est dense dans $H^k_\sharp$. □

Nous allons approfondir la dualité des espaces de Hilbert sur les exemples précédents. Pour un espace de Hilbert fixé et considéré seul, le théorème de dualité de Riesz règle le problème. Dans les problèmes variationnels, on considère simultanément deux espaces de Hilbert et leurs duaux (ou anti-duaux). On ne peut donc pas les identifier via la même isométrie. Pour l'un des espaces, appelé espace pivot, on fait l'identification avec son anti-dual et pour l'autre on construit un isomorphisme. Illustrons cela sur le couple d'espaces de Hilbert $(\ell_{1,2};\ell_2)$. Notons que $\ell_{1,2} \subseteq \ell_2$, $\ell_{1,2}$ est dense dans ℓ_2 et l'injection est continue de norme 1.

Proposition 3.15 *$f \in \ell'^{,a}_{1,2}$ si et seulement si il existe $\tau^1(f) \in \ell_{-1,2}$ tel que*

$$f(v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau^1(f)_n \overline{v_n} \tag{3.46}$$

L'application $f \mapsto \tau^1(f)$ est une isométrie de $\in \ell'^{,a}_{1,2}$ sur $\ell_{-1,2}$.

Démontration :
Soit $f \mapsto \tau(f)$ l'application définie sur $\ell'^{,a}_2$ par le théorème de Riesz (on peut, sur cet exemple, retrouver directement le résultat).
Soit $f \in \ell'^{,a}_{1,2}$. Posons $g = f \circ \Phi$. Alors $g \in \ell'^{,a}_2$. Posons $v = \tau^1(g)$. On vérifie facilement que $\tau^1(f) = \Phi^{-1}v$ convient et que les propriétés énoncées sont satisfaites. □

Il résulte de cette proposition que ℓ_2 s'identifie à un sous-espace vectoriel dense de $\ell'^{,a}_{1,2}$, ce dernier étant identifié à $\ell_{-1,2}$. En utilisant l'isomorphisme Φ , on peut alors identifiér $L^2_\sharp$ à un sous-espace dense de $(H^1_\sharp)'^{,a}$. On a donc des suites d'injections de 3 espaces de Hilbert, d'images denses

$$\ell_{1,2} \to \ell_2 \to \ell'^{,a}_{1,2} \tag{3.47}$$

$$H^1_\sharp \to L^2_\sharp \to (H^1_\sharp)'^{,a}. \tag{3.48}$$

Il est aisé de voir que la flèche $L^2_\sharp \to (H^1_\sharp)'^{,a}$ est simplement l'application $u \mapsto L_u$, où $L_u(v) = \int_0^1 u\overline{v}dx$.
L'espace $(H^1_\sharp)'^{,a}$ n'est pas encore vraiment explicite. Or cet espace joue un rôle dans l'application du théorème de Lax-Milgram à la forme sesquilinéaire B_q. Pour le clarifier il est nécessaire de faire appel à la théorie des distributions dont on donnera un aperçu dans le Chapitre 4 (Dualité et Applications Linéaires dans les espaces de Banach).

Revenons maintenant à la forme hermitienne $B_q[u,v]$, $u,v \in \mathcal{P}_\sharp$. Posons $M = \max q(x)$ et $m = \min q(x)$. On a les propriétés suivantes

$$\int_0^1 u'\overline{v'}dx = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(u)\overline{c_n(v)} \tag{3.49}$$

$$\left|\int_0^1 qu\overline{v}dx\right| \le M\|u\|_2\|v\|_2 \tag{3.50}$$

La première égalité résulte d'un calcul sur les polynômes trigonométriques. L'inégalité s'obtient à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Il en résulte que B_q est continue sur $\mathcal{P}_\sharp \times \mathcal{P}_\sharp$:

$$|B_q[u,v]| \le (4\pi^2 + M)\|u\|_{2,1}\|v\|_{2,1}. \tag{3.51}$$

B_q se prolonge donc par densité en une forme hermitienne continue sur $H^1_\sharp \times H^1_\sharp$.
D'autre part pour tout $u \in \mathcal{P}_\sharp$ on a

$$B_q[u,u] \ge \min\{4\pi^2, m\} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)|c_n(u)|^2 \tag{3.52}$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont donc satisfaites. On note par G_q l'opérateur de Green associé à B_q. Supposons maintenant que $q, f \in C^1_\sharp$ et admettons que la solution $u = G_q f$ du problème variationnel associé soit de classe C^2. On a alors, pour tout $v \in \mathcal{P}_\sharp$,

$$\int_0^1 (u'\overline{v'} + qu\overline{v})dx = \int_0^1 f\overline{v}dx \tag{3.53}$$

u étant de classe C^2 et périodique on peut intégrer par parties pour obtenir

$$\int_0^1 u'\overline{v'}dx = -\int_0^1 u''\overline{v}dx$$

On a donc, pour tout $v \in \mathcal{P}_\sharp$,

$$\int_0^1 (-u'' + qu - f)\overline{v}dx = 0$$

$\mathcal{P}_\sharp$ étant dense dans $L^2_\sharp$, on en déduit

$$-u'' + qu = f, \;\; u, \; 1-\text{périodique} \tag{3.54}$$

On a donc établi l'existence et l'unicité de la solution de cette équation de Sturm-Liouville dont l'étude sera approfondie dans le Chapitre 5.

Nous allons maintenant revenir dans le cadre général des problèmes variationnels.
On se donne deux espaces de Hilbert, $\mathcal{V}, \mathcal{H}$, tels que $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ soit une injection continue, d'image dense (que l'on identifiera à une inclusion).

Lemme 3.16 *Pour $u \in \mathcal{H}$ posons $L_u(v) = \langle u|v\rangle_{\mathcal{H}}$. Alors $u \mapsto L_u$ est une injection continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}'^{,a}$.*
L'espace de Hilbert $\mathcal{V}'^{,a}$ est unitairement équivalent à $\mathcal{V}$ via l'isométrie Λ définie par l'égalité : $f(v) = \langle \Lambda f|v\rangle_{\mathcal{V}}$, pour $f \in \mathcal{V}'^{,a}$, $v \in \mathcal{V}$.

Démonstration :
Il résulte de la continuité de l'injection de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qu'il existe $C > 0$ telle que

$$L_u(v) \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{V}}$$

L_u est donc une forme antilinéaire continue sur $\mathcal{V}$.
D'autre part, si $L_u(v) = 0$, $\forall v \in \mathcal{V}$ alors $u = 0$ car $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{H}$. $u \mapsto L_u$ est donc injective. Posons $\widetilde{\mathcal{H}} = \{L_u,\ \ u \in \mathcal{H}\}$ et montrons que $\widetilde{\mathcal{H}}$ est dense dans $\mathcal{V}'^{,a}$.
Pour cela montrons que si $f \in \mathcal{V}'^{,a}$ vérifie $\langle L_u|f\rangle_{\mathcal{V}'^{,a}} = 0$, $\forall u \in \mathcal{H}$ alors $f = 0$.
On a

$$\langle u|\Lambda f\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Lambda L_u|\Lambda f\rangle_{\mathcal{V}} = \langle L_u|f\rangle_{\mathcal{V}'^{,a}} \tag{3.55}$$

D'où l'on déduit $\Lambda f = 0$ puis $f = 0$.
La suite du Lemme est une conséquence du théorème de dualité de Riesz ($\Lambda = \tau^{-1}$).□
Dans la suite *on identifiera* les espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\widetilde{\mathcal{H}}$ par l'isomorphisme précédent. On a alors l'égalité

$$\langle u|\Lambda f\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u|f\rangle_{\mathcal{V}'^{,a}} \tag{3.56}$$

Lemme 3.17 *L'opérateur Λ possède les propriétés suivantes :*
i) $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
ii) $\Lambda \geq 0$ *sur* $\mathcal{H}$.
iii) $\sqrt{\Lambda}$ *est une isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{V}$ et se prolonge en un isomorphisme isométrique de $\mathcal{V}'^{,a}$ sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration :
Λ est clairement une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.
Il résulte de (3.56) que pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a

$$\langle u|\Lambda u\rangle_{\mathcal{H}} = \|u\|^2_{\mathcal{V}'^{,a}}.$$

Λ étant positif, il admet une unique racine carrée positive. On a alors, pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$\|\sqrt{\Lambda}u\|^2_{\mathcal{H}} = \|u\|^2_{\mathcal{V}'^{,a}}.$$

Il en résulte que $\sqrt{\Lambda}$ se prolonge en une isométrie de $\mathcal{V}'^{,a}$ dans $\mathcal{H}$. Montrons qu'elle est surjective. L'image étant fermée, il suffit de montrer qu'elle est dense dans $\mathcal{H}$, ce qui résulte de l'inclusion $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Im}(\sqrt{\Lambda})$.
Montrons maintenant que $\sqrt{\Lambda}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{V}$. $\Lambda^{-1/2}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{V}$. Or on a

$$\|\sqrt{\Lambda}u\|^2_{\mathcal{H}} = \|\Lambda^{-1/2}u\|_{\mathcal{V}'^{,a}} = \|u\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.57}$$

On en déduit que $\sqrt{\Lambda}$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}$. Elle est surjective car Λ l'est.□

Remarque 3.18 *Il n'est pas difficile de voir que Λ est l'opérateur de Green associé à la forme hermitienne $B[u,v] = \langle u|v\rangle_{\mathcal{V}}$.*

Proposition 3.19 *On se place sous les hypothèse du Théorème de Lax-Milgram. Soit G l'opérateur de Green associé à B. On note par B_* la forme bilinéaire conjuguée définie par $B_*[u,v] = \overline{B[v,u]}$. B_* vérifie également les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram. On désigne par G_* l'opérateur de Green associé. On a alors $G_* = G^\star$ sur $\mathcal{H}$ (adjoint de G). En particulier G est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ si et seulement si B est une forme hermitienne sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Dans ce cas on a $G \geq 0$ et $\sqrt{G}$ définit une bijection linéaire, bicontinue de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{V}$ et par prolongement de $\mathcal{V}'^{,a}$ sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration :
Soit $f \in \mathcal{H}$. On a, pour tout $u, v \in \mathcal{H}$,

$$B_*[G_*u, Gv] = \langle u|Gv\rangle_{\mathcal{H}},\ \overline{B[Gv, G_*u]} = \overline{\langle v|G_*u\rangle_{\mathcal{H}}}. \tag{3.58}$$

D'où il résulte

$$\langle u|Gv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle G_*u|v\rangle_{\mathcal{H}}$$

et par conséquent G_* est l'adjoint de G. La dernière partie de la Proposition résulte du Lemme (3.17) appliqué au produit scalaire B sur $\mathcal{V}$.□

Corollaire 3.20 *L'opérateur de Green G_q du problème de Sturm-Liouville périodique est auto-adjoint sur $L^2_\sharp$ et $\sqrt{G_q}$ définit une bijection linéaire bicontinue de $L^2_\sharp$ sur $H^1_\sharp$.*

3.5 Diagonalisation des Opérateurs compacts auto-adjoints

3.5.1 Propriétés générales des opérateurs compacts

Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ des espaces de Hilbert complexes séparables. On désigne par $B_\mathcal{H}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}$.

Définition 3.21 *On dit qu'une application linéaire T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ est compacte si $T(B_\mathcal{H})$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{K}$.*

Remarque 3.22 *Une partie relativement compacte étant bornée, une application compacte est automatiquement continue. Dans une terminologie ancienne on disait complètement continue pour compacte. (Riesz et Nagy)*

Exemple 3.23 *Si T est de rang fini, c'est à dire si $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors T est compacte*

Proposition 3.24 *T est compact si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*
(i) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie de vecteurs de $\mathcal{K}$, $\{v_i\}_{1\leq i\leq N}$, tel que

$$T(B_\mathcal{H}) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq N} B_\mathcal{K}(v_i, \varepsilon)$$

où $B_\mathcal{K}(v, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de $\mathcal{K}$ de centre v et rayon ε.
(ii) Pour toute suite bornée $\{u_n\}$ de $\mathcal{H}$ il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que la suite $\{Tu_{n_k}\}_{k\geq 1}$ soit convergente dans $\mathcal{K}$.

Démonstration :
Il s'agit d'une application directe des critères de compacité dans un espace métrique complet. La condition (ii) porte le nom de précompacité.□

On désigne par $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. On notera $\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ La proposition suivante résume les principales propriétés de cet ensemble

Proposition 3.25 *$\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. En particulier la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact et si $\{T_n\}_{n\geq 1}$ est une suite d'opérateurs compacts convergeant* au sens de la norme des opérateurs *vers T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ alors T est compact.*

Démonstration :
La caractérisation par les suites permet de montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.
Pour établir la stabilité de la compacité par convergence en norme d'opérateurs, on utilisera le critère de précompacité.
Il existe n_ε tel que $\|T_{n_\varepsilon} - T\| \leq \varepsilon$. Or T_{n_ε} étant compact, il existe une famille finie de vecteurs de $\mathcal{K}$, $\{v_i\}_{1\leq i\leq N}$, tel que

$$T_{n_\varepsilon}(B_\mathcal{H}) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq N} B_\mathcal{K}(v_i, \varepsilon)$$

Il résulte alors de l'inégalité triangulaire,

$$T(B_\mathcal{H}) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq N} B_\mathcal{K}(v_i, 2\varepsilon)$$

d'où l'on déduit que T est compact (Proposition(3.24). □

En utilisant le critère par les suites, on obtient également la *propriété d'idéal* de $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Proposition 3.26 *Soient $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty, \mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{K}_\infty)$. Alors $BTA \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_\infty, \mathcal{K}_\infty)$. Autrement dit le produit d'un opérateur borné et d'un opérateur compact, entre espaces de Hilbert, est compact.*

On va expliciter maintenant un condition suffisante de compacité.

Définition 3.27 *Soit T une application linéaire de $\mathcal{H}$ dans lui-même. On dit que T est de classe Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée $\{e_j\}_{j\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{n\geq 1} \|Te_j\|^2 < +\infty$.*

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$.

Proposition 3.28 *Si $\sum_{n\geq 1} \|Te_j\|^2 < +\infty$ et si $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ est une autre base orthonormée alors*

$$\sum_{n\geq 1} \|Te_j\|^2 = \sum_{n\geq 1} \|T\varphi_j\|^2$$

Démonstration :
On applique le théorème de Parseval :

$$\|Te_j\|^2 = \sum_{k\geq 1} |\langle Te_j|\varphi_k\rangle|^2 \tag{3.59}$$

puis dans la double somme en j et k obtenue on inverse l'ordre des sommations.□
Les principales propriétés de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 3.29 *$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel. Il possède en outre les propriétés suivantes :*
i)

$$T \mapsto \|T\|_{HS} := \left(\sum_{n\geq 1} \|Te_j\|^2\right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Cette norme est associée au produit scalaire :

$$(T, S) \mapsto \langle T|S\rangle_{HS} := \sum_{n\geq 1} \langle Te_j|Se_j\rangle.$$

ii) On a l'inégalité

$$\|T\| \leq \|T\|_{HS}, \quad \forall T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}) \tag{3.60}$$

iii) $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour la norme $\| \bullet \|_{HS}$.
iv) Soit $\mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert séparable, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$, $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ alors $BTA \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}_1)$ et on a l'inégalité

$$\|ATB\|_{HS} \leq \|A\|\|B\|\|T\|_{HS} \tag{3.61}$$

v) L'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ des opérateurs de rang fini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. En particulier tout opérateur de classe Hilbert-Schmidt est compact

Démonstration :
i) Soient $T, S \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. On a

$$\|(T + S)e_j\|^2 \leq 2(\|Te_j\|^2 + \|Se_j\|^2).$$

Il en résulte que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel.
Il est facile de montrer que $(T, S) \mapsto \langle T|S\rangle_{HS}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ qui devient donc un espace préhilbertien donc normé.
ii) Soient $u, v \in \mathcal{H}$. Décomposons u sur la base $\{e_j\}$. On a $u = \sum_{j\geq 1} u_j e_j$.
D'où

$$\langle Tu|v\rangle = \sum_{j\geq 1} u_j\langle Te_j|v\rangle$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle Tu|v\rangle| \leq \|u\| \left(\sum_{j\geq 1} |\langle Te_j|v\rangle|^2\right)^{1/2} \leq \|u\|\|v\|\|T\|_{HS}$$

D'où résulte (3.60).
iii) Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est complet. La procédé est standard. Nous donnons le point de départ, et laissons le lecteur écrire les détails. Soit $\{T_n\}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. C'est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'après (3.60). Ce dernier espace étant complet (Chapitre 1), la suite $\{T_n\}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (c'est à dire en norme d'opérateurs). Le lecteur montrera en Exercice que $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ et que $\{T_n\}$ converge vers T en norme Hilbert-Schmidt.
iv) A faire en Exercice (facile).
v) Il est commode d'introduire la famille suivante d'opérateurs de rang 1. On pose $E_{j,k}u = \langle u|e_j\rangle_k$ pour $j, k \geq 1$. On vérifie facilement que $\{E_{j,k}\}_{j,k\geq 1}$ est un système orthonormal de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Montrons qu'il est total (on aura ainsi une base orthonormée). Or on a

$$\langle T|E_{j,k}\rangle_{HS} = \langle Te_j|e_k\rangle.$$

Si $\langle T|E_{j,k}\rangle_{HS} = 0$ pour tout $j, k \geq 1$ alors $\langle Te_j|e_k\rangle = 0$ pour tout $j, k \geq 1$ et donc $T = 0$. □

Exemple 3.30 (Exemple fondamental) *Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, espace des fonctions de carré intégrable pour l'espace mesuré σ-fini Ω. Alors $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ si et seulement si il existe $K \in L^2(\Omega^2, \mathcal{B}^{(2)}, \mu^{(2)})$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a*

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)d\mu(y). \tag{3.62}$$

On a alors

$$\|T\|_{HS} = \left(\int_{\Omega^2} |K(x, y)|^2 d\mu^{(2)}(x, y)\right)^{1/2} \tag{3.63}$$

$\mu^{(2)}$ désigne la mesure produit sur $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$. On l'écrit aussi sous la forme habituelle $d\mu^{(2)}(x,y) = d\mu(x)d\mu(y)$ Pour simplifier les notations on écrira plus simplement $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega^2, \mathcal{B}^{(2)}, \mu^{(2)}) = L^2(\Omega^2)$. (le lecteur non familier avec la théorie de la mesure pourra considérer qu'il s'agit de la mesure de Lebesgue sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ ou consulter l'appendice Intégration).

Démonstration
La mesure étant σ-finie, $L^2(\Omega)$ est séparable et admet une base orthonormée $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$.
Supposons d'abord que T soit défini par (3.62) avec $K \in L^2(\Omega^2)$. Il résulte du Théorème de Fubini que l'expression (3.62) a bien un sens presque partout sur Ω. En effet l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne, $\forall u, v \in L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega^2} |K(x,y)u(y)v(x)|d\mu(x)d\mu(y) \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|K\|_{L^2(\Omega^2)}$$

Il en résulte en particulier que T est défini et borné sur $L^2(\Omega)$.
On a vu en Exercice (Chapitre 2) que $\varphi_{j,k}(x,y) = \varphi_j(x)\overline{\varphi_k(y)}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega^2)$. Or on a, en appliquant le théorème de Fubini,

$$\langle T\varphi_j|\varphi_k\rangle = \iint_{\Omega^2} K(x,y)\varphi_j(y)\overline{\varphi_k(x)}d\mu(x)d\mu(y) = \langle K|\varphi_{j,k}\rangle.$$

Il résulte de (3.59) que l'on a

$$\sum_{j\geq 1} \|Te_j\|^2 = \sum_{j,k\geq 1} |\langle K|\varphi_{j,k}\rangle|^2$$

T est donc de classe Hilbert-Schmidt et l'égalité de Parseval nous donne l'égalité (3.63).
Inversement si T est de classe Hilbert-Schmidt, les calculs précédents montrent que l'on peut définir une fonction $K \in L^2(\Omega^2)$ en posant

$$K(x,y) = \sum_{j,k\geq 1} \langle T\varphi_j|\varphi_k\rangle \varphi_{j,k}(x,y).$$

On vérifiera en Exercice que K vérifie bien (3.63). On dit alors que K est *le noyau intégral* de T.
Les noyaux intégraux de carré intégrables donnent donc des exemples non triviaux d'opérateurs de classe Hilbert-Schmidt donc compacts.□

Exercice 25 *Considérons le problème de Sturm-Liouville périodique avec $q(x) = a$, $a > 0$ étant une constante. Soit $e_j(x) = \mathrm{e}^{2i\pi jx}$, $j \in \mathbb{Z}$ base orthonormée de $\mathcal{H} = L^2_\sharp$.*
i) calculer $u_j = G_a e_j$.
Indication *: Résoudre l'équation différentielle $-u" + u = e_j$, en développant u en série de Fourier.*
ii) En déduire que $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$G_a e_j = \frac{e_j}{4\pi^2 j^2 + a}$$

et que l'opérateur de Green G_a est de classe Hilbert-Schmidt dans $L^2_\sharp$, compact dans $L^2_\sharp$.
iii) Montrer que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de G_a.

3.5.2 Diagonalisation

Soit T un opérateur auto-adjoint, compact, dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Commençons par énoncer quelques propriétés.

Proposition 3.31 *i) Les valeurs propres de T sont réelles.*
ii) Pour tout $\mu \neq 0$, $\ker(T - \mu\mathbb{1})$ est de dimension finie (les valeurs propres non nulles de T sont de multiplicité finie).
iii) Soient φ_1 et φ_2 deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes. On a alors $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0$.
iv) Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ et si $T(F) \subseteq F$ alors $T(F^\perp) \subseteq F^\perp$.
v) Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé de vecteurs propres de T, $T\varphi_n = \mu_n\varphi_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0$.

Démonstration :
i) Si $T\varphi = \mu\varphi$ alors $\langle T\varphi|\varphi\rangle = \mu\|\varphi\|^2$. T étant auto-adjoint $\langle T\varphi|\varphi\rangle \in \mathbb{R}$, donc si $\varphi \neq 0$ $\mu \in \mathbb{R}$.
ii) D'après le Chapitre 1, il suffit de montrer que la boule unité de $\ker(T - \mu\mathbb{1})$ est relativement compacte. Soit u_n telle que $\|u_n\| \leq 1$ et $Tu_n = \mu u_n$. T étant compact, Il existe une sous-suite u_{n_k} telle que Tu_{n_k} converge. Puisque $\mu \neq 0$, la suite u_{n_k} converge également.
iii) Soit $T\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, $n = 1, 2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. On a

$$\langle T\varphi_1|\varphi_2\rangle = \mu_1\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1|T\varphi_2\rangle = \mu_2\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle$$

On en déduit $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0$.
iv) Si $u \in F^\perp$ et $v \in F$ on a alors $Tv \in F$ et $\langle Tu|v\rangle = \langle u|Tv\rangle = 0$.
v) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers n_k et $\delta > 0$ telle que $|\mu_{n_k}| \geq \delta$, $\forall k \geq 1$. Posons $u_k = \frac{\varphi_{n_k}}{\mu_{n_k}}$. Alors la suite u_k est bornée et $Tu_k = \varphi_{n_k}$. T étant compacte, on peut alors extraire une sous-suite convergente de la suite $\{\varphi_{n_k}\}$. Ce qui n'est pas possible pour un système orthonormé car on a $\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = 2$ si $n \neq m$.$\square$

La diagonalisation de T démarre par la détermination de la valeur propre de plus grand module (c'est la plus grande si $T \geq 0$). Ensuite on itère le procédé puis on montre que l'on a obtenu toutes les valeurs propres possibles.

Proposition 3.32 *Sous les hypothèses précédentes, si $T \neq 0$, alors l'un des deux nombres, $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T. Autrement dit, il existe $\varphi_1 \in \mathcal{H}$, $\|\varphi_1\| = 1$, tel que $T\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$, où $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| = \|T\|$.*

Démonstration :
On a vu dans la section 4 que

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu|u\rangle|$$

Il existe donc une suite u_n de $\mathcal{H}$, $\|u_n\| = 1$, telle que $\lim_{n\to+\infty} |\langle Tu_n|u_n\rangle| = \|T\|$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer de plus que $\lim_{n\to+\infty} \langle Tu_n|u_n\rangle = \mu_1$ où $\mu_1 = \pm\|T\|$ et, T étant compact, on peut également se ramener au cas où Tu_n converge vers un élément $v \in \mathcal{H}$.
On a

$$\|Tu_n - \mu_1 u_n\|^2 = \|Tu_n\|^2 + \mu_1^2 - 2\mu_1\langle Tu_n|u_n\rangle \leq \|T\|^2 + \mu_1^2 - 2\mu_1\langle Tu_n|u_n\rangle$$

D'où il résulte que

$$\lim_{n\to+\infty}(Tu_n - \mu_1 u_n) = 0.$$

Or $T \neq 0$ donc $\mu_1 \neq 0$, par conséquent u_n converge dans $\mathcal{H}$ vers un vecteur φ_1 vérifiant $T\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$, $\|\varphi_1\| = 1$. $\square$

Poursuivons la construction précédente en considérant l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1 = \{u \in \mathcal{H},\ \langle u|\varphi_1\rangle\} = 0$ et T_1 la restriction de T à $\mathcal{H}_1$. T_1 est un opérateur compact, auto-adjoint dans $\mathcal{H}_1$ et $\|T_1\| \leq \|T\|$. Si $T_1 = 0$ on s'arrête (T n' a qu'une valeur propre non nulle de multiplicité 1). Sinon par le procédé ci-dessus, on obtient un vecteur φ_2 orthogonal à φ_1, de valeur propre μ_2, $|\mu_2| \leq |\mu_1|$. Ainsi par récurrence sur n on obtient un système orthormal $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$, fini ou infini, de vecteurs propres associés à une suite $\{\mu_j\}$ de valeurs propres non nulles telles que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_j| \geq \cdots$.

Notons par V_n le sous-espace vectoriel engendré par $\{\varphi_j,\ 1 \leq j \leq n\}$, $\mathcal{H}_n = V_n^\perp$ et T_n la restriction de Tà $\mathcal{H}_n$. La construction s'arrête dès que l'on arrive à $T_n = 0$; et alors T est de rang fini. Sinon T est de rang infini, ce que l'on suppose dans la suite.
Désignons par Π_n la projection orthogonale sur V_n et $\Pi_n^\perp = \mathbb{1} - \Pi_n$. On a donc $|\mu_{n+1}| = \|T_n\|$. Or $\|T_n\| = \|\Pi_n^\perp T\Pi_n^\perp\|$. Mais T commute avec Π_n. On en déduit donc

$$\|T - T\Pi_n\| = |\mu_{n+1}| \tag{3.64}$$

Or on a vu ci-dessus que μ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc que $T\Pi_n$ converge en norme d'opérateur vers T. Or pour tout $u \in \mathcal{H}$, on a

$$T\Pi_n u = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j\langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j \tag{3.65}$$

La conjonction des égalités (3.64) et (3.65) est une expression de la diagonalisation de T. Pour avoir une base orthonormée de $\mathcal{H}$ il faut compléter le système $\{\varphi_j\}$ par une base orthonormée de $\ker T$. On a donc prouvé les résultats suivants.

Théorème 3.33 *Soit T un opérateur auto-adjoint, compact, dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il existe donc un système orthonormé (fini ou dénombrable) de vecteurs propres, $\{\varphi_j\}$, associé aux valeurs propres non nulles de T, $\{\mu_j\}$ telle que pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a*

$$Tu = \sum_{j\geq 1} \mu_j\langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j \tag{3.66}$$

$$\|Tu - \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j\langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j\| \leq \mu_{n+1}\|u\| \tag{3.67}$$

Corollaire 3.34 *Sous les hypothèses précédentes, le spectre de l'opérateur est constitué d'une suite de valeurs non nulles de multiplicité finie et de 0, qui est toujours dans le spectre de T si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie.*
Les valeurs propres non nulles sont celles obtenues par l'algorithme du théorème précédent.

Démonstration :
Montrons que T ne possède pas d'autres valeurs propres non nulles que celles obtenues dans le théorème. Supposons alors qu'il existe $\mu \neq \mu_j$, $\forall j \geq 1$ $\mu \neq 0$ et $\varphi \neq 0$ tel que $T\varphi = \mu\varphi$. Alors φ étant orthogonal à tous les φ_j on touve que $T\varphi = 0$ et donc $\varphi = 0$.
D'autre part si 0 n'est pas dans le spectre de T, T est inversible donc $TT^{-1} = \mathbb{1}$ et d'aprés la propriété d'idéal des opérateurs compacts, $\mathbb{1}$ est compact et donc $\mathcal{H}$ est de dimension finie d'après le théorème de Riesz.□

Remarque 3.35 *Si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, un opérateur compact peut être injectif mais il ne peut pas être surjectif. T est injectif si et seulement si T admet une base orthonormée de vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles.*

Corollaire 3.36 *Si T est un opérateur compact et positif alors $\sqrt{T}$ est compact.*

Démonstration :
On vérifie que l'opérateur S défini par

$$Su = \sum_{j\geq 1} \sqrt{\mu_j}\langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j, \ \ \forall u \in \mathcal{H}.$$

est un opérateur positif et que $S^2 = T$. L'unicité de la racine carrée entraîne que $S = \sqrt{T}$. D'autre part on obtient facilement l'inégalité

$$\|Su - \sum_{1\leq j\leq n} \sqrt{\mu_j}\langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j\| \leq \sqrt{\mu_{n+1}}\|u\|$$

d'où l'on déduit que que S est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini donc compact.□

Corollaire 3.37 *Tout opérateur compact est limite, en norme d'opérateur, d'une suite d'opérateurs de rang fini. Plus explicitement, si $\{s_j\}$ désigne la suite décroissante des valeurs propres non nulles de l'opérateur positif compact $|T| = \sqrt{T^\star T}$ et si $\{\varphi_j\}$ est le système orthonormé des vecteurs propres correspondants, alors il existe une système orthonormé $\{\psi_j\}$ tel que*

$$Tu = \sum_{j\geq 1} s_j\langle u|\varphi_j\rangle\psi_j, \ \ \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.68}$$

Démonstration :
Le résultat est une conséquence du précédent et de la décomposition polaire : $T = U|T|$. T étant compact, $T^\star T$ l'est ainsi que sa racine carrée. Il suffit alors de diagonaliser $|T|$ est de se souvenir que U est une isométrie sur l'image de $|T|$. On définit alors $\psi_j = U\varphi_j$. Posons pour $N \geq 1$,

$$T_N u = \sum_{1\leq j\leq N} s_j\langle u|\varphi_j\rangle\psi_j, \ \ \forall u \in \mathcal{H}$$

En utilisant deux fois l'inégalité de Bessel on obtient

$$\|(T - T_N)u\| \leq s_{N+1}\|u\|, \ \ \forall u \in \mathcal{H}.$$

Or s_{N+1} tend vers 0 si N tend vers l'infini. □

Il est commode d'avoir une expression des valeurs propres sans référence explicite aux vecteurs propres car ces derniers sont en général plus difficiles à calculer. Cette expression est connue sous le nom de principe du minimax.
Désignons par $\mathcal{F}_j$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}$ de dimension au plus j. Pour tout opérateur T borné et positif sur $\mathcal{H}$. Introduisons la suite décroissante de nombres réels positifs $\{\nu_j(T)\}$, définie pour $j \geq 1$, comme suit.

$$\nu_j(T) = \inf_{F\in\mathcal{F}_{j-1}} \left\{ \sup_{u\in F^\perp, \|u\|=1} \langle Tu|u\rangle \right\} \tag{3.69}$$

Théorème 3.38 (principe du mini-max) *Si T est un opérateur compact et positif sur $\mathcal{H}$ et si $\{\mu_j(T)\}$ désigne la suite décroissante de ses valeurs propres (avec multiplicités), on a $\mu_j(T) = \nu_j(T)$, $\forall j \geq 1$.*
De plus les bornes sont atteintes pour les espaces $F = V_{j-1}$ engendrés par les $j-1$ premiers vecteurs propres $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}\}$ (avec la convention $V_0 = \{0\}$) .

Démonstration :
Pour $j = 0$ l'égalité a été prouvée dans la proposition (3.70).
Posons, pour $j \geq 1$,

$$\theta(F) = \sup_{u\in F^\perp, \|u\|=1} \langle Tu|u\rangle$$

Il résulte de ce précède que l'on a $\theta(V_{j-1}) = \mu_j(T)$. Il suffit donc de prouver que pour tout $F \in \mathcal{F}_{j-1}$ on a $\mu_j(T) \leq \theta(F)$.

A cause des dimensions, il existe $u \in V_j$, $\|u\| = 1$, et $u \in F^\perp$. Or il résulte de l'expression de la diagonalisation de T que l'on a

$$\langle Tu|u\rangle = \sum_{1\leq k\leq j} \mu_k(T)|\langle u|\varphi_k\rangle|^2$$

La suite $\{\mu_k(T)\}$ étant décroissante on en déduit que $\theta(F) \geq \mu_j(T)$. □

Le résultat est une conséquence directe des formules de minimax.

Corollaire 3.39 *Soient T, S deux opérateurs compacts, positifs sur $\mathcal{H}$ tels que $T \leq S$. On a alors $\mu_j(T) \leq \mu_j(S)$, $\forall j \geq 1$.*

Nous allons appliquer les résultats précédents aux opérateurs de Green des problèmes variationnels. On se place sous les hypothèses de la section Problèmes variationnels. On suppose que B est hermitienne. On suppose de plus que l'injection de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$ est compacte (hypothèse vérifiée pour le problème de Sturm-Liouville périodique).

Proposition 3.40 *L'opérateur de Green G engendré par B est un opérateur auto-adjoint, positif, compact et injectif de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Il admet donc une base orthonormée de vecteurs propres, $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$, $G\varphi_j = \mu_j\varphi_j$, $\forall j \geq 1$ où $\{\mu_j\}$ est la suite décroissante des valeurs propres de T (répétées selon leur multiplicité) et tendant vers 0.*

Démonstration :
G est injectif en raison de sa définition.
Montrons que G est compact comme opérateur de $\mathcal{H}$ dans lui-même. Désignons par j l'injection de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$. désignons provisoirement par G', l'application G considérée de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et par G'' l'application G considérée de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}$. On a $G' = j \circ G''$, j étant compact, G'' continue, on en déduit que $G\prime$ est compact. Les autres propriétés sont alors une conséquence des résultats précédents.□

Lorsque $T = G$, G opérateur de Green provenant d'une forme B il est souhaitable d'avoir une expression des valeurs propres de G directement en fonction de B. Posons $\lambda_j = \mu_j^{-1}$. On a alors pour les λ_j l'analogue des formules du mini-max

Théorème 3.41

$$\lambda_1 = \min_{u\in V, \|u\|_{\mathcal{H}}=1} B[u,u] \tag{3.70}$$

Pour tout $j \geq 2$,

$$\lambda_j = \max_{F\in\mathcal{F}_{j-1}} \left\{ \min_{\substack{u\in V, \|u\|_{\mathcal{H}}=1 \\ u\in F^\perp}} B[u,u] \right\} \tag{3.71}$$

Démonstration :
Les égalités $G\varphi_j = \mu_j\varphi_j$ impliquent que $\varphi_j \in \mathcal{V}$ et que $B[\varphi_j, \varphi_k] = \lambda_j\delta_{j,k}$. Autrement dit $\{\lambda_j^{-1/2}\varphi_j\}$ est un système orthonormé de $\mathcal{V}$ pour le produit scalaire B. Montrons que c'est une base hilbertienne de $\mathcal{V}$. Soit $u \in \mathcal{V}$. Posons $u_n = \sum_{1\leq j\leq n} \langle u|\varphi_j\rangle\varphi_j$ Pour tout $p \geq 1$ on a

$$B[u_{n+p}, u_{n+p}] = \sum_{n+1\leq j\leq n+p} \lambda_j|\langle u|\varphi_j\rangle|^2$$

Or d'après l'inégalité de Bessel on a

$$\sum_{j\geq 1} |\langle u|\varphi_j\rangle|^2 < +\infty$$

Il en résulte que $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{V}$. Soit v sa limite. Or $\{u_n\}$ converge naturellement vers u dans $\mathcal{H}$, on a donc $v = u$ et $\psi_j = \lambda_j^{-1/2}\varphi_j$ est bien une base orthonormée de $\mathcal{V}$. On a également la décomposition de B comme somme de carrés

$$B[u,u] = \sum_{j\geq 1} \lambda_j|\langle u|\varphi_j\rangle|^2 \tag{3.72}$$

On en déduit facilement (3.70). (3.71) se démontre comme les formules du minimax.
On a facilement

$$\lambda_j = \min_{\substack{u\in\mathcal{V}, \|u\|_{\mathcal{H}}=1 \\ u\in V_{j-1}{}^\perp}} B[u,u] \tag{3.73}$$

Si F est un sous-espace de $\mathcal{V}$ de dimension au plus $j-1$. Il existe alors $u \in V_j$, $u \in F^\perp$ tel que $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$. On a alors $B[u,u] \leq \lambda_j$.□

Remarque 3.42 *Dans les problèmes variationnels, la condition d'ellipticité peut être remplacée par la condition plus générale suivante. Il existe $E > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\Re B[u,u] \geq E\|u\|_{\mathcal{V}} - \gamma\|u\|_{\mathcal{H}}^2, \forall u \in \mathcal{V} \tag{3.74}$$

Dans ce cas on dit que B est coercive. *On se ramène à une forme elliptique en considérant $B_\gamma[u,u] = B[u,u] + \gamma\|u\|_{\mathcal{H}}^2$. On en déduit une réduction de B à une somme de carrés à partir de celle de B_γ. On a alors*

$$B[u,u] = \sum_{j\geq 1} \lambda_j|\langle u|\varphi_j\rangle|^2$$

avec $\lambda_j = \lambda_j^\gamma - \gamma$, $\{\lambda_j^\gamma\}$ étant la suite des valeurs propres associées à B_γ.

Corollaire 3.43 *Soient B_1 et B_2 sont deux formes hermitiennes coercives. On désigne par $\{\lambda_j^{(1)}\}$ et $\{\lambda_j^{(2)}\}$ leurs valeurs propres respectives ordonnées par ordre croissant. Supposons que $B_1[u,u] \leq B_2[u,u]$, $\forall u \in \mathcal{V}$. On a alors :*
$\lambda_j^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\forall j \geq 1$.

td3

Exercice 26 *Soit A un opérateur auto-adjoint. Montrer que l'opérateur $U = (A-i)(A+i)^{-1}$ est unitaire.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 27 *[le théorème de moyenne ergodique de Birkhoff] Soit U un opérateur unitaire dans $\mathcal{H}$.*
i) Montrer que $\ker(U-\mathbb{1}) = \ker(U^\star - \mathbb{1})$ et que $\ker(U-\mathbb{1})^\perp = \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$.
ii) Montrer que si $f \in \mathrm{Im}(U-\mathbb{1})$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq j\leq n} U^j f = 0$$

et que cette égalité se prolonge (par densité) à $f \in \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$.
iii) On désigne par π_1 le projecteur orthogonal sur $\ker(U-\mathbb{1})$.
Déduire de ce qui précède que pour tout $f \in \mathcal{H}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq j\leq n} U^j f = \pi_1 f$$

iv) On suppose maintenant que $\mathcal{H} = L^2[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. En appliquant ce qui précède à $Uf(x) = f(x-\alpha)$ montrer que l'on a, au sens de la convergence en moyenne quadratique,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq j\leq n} f(x-j\alpha) = \int_0^1 f(t)dt$$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 28 *Montrer que sur un espace de Hilbert la convergence forte entraine la convergence faible et que la réciproque est vraie si et seulement si l'espace est de dimension finie.*
On pourra considérer une suite de vecteurs orthonormés.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 29 *Montrer qu'une suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ converge fortement vers v si et seulement si elle converge faiblement vers v et la suite $\{\|u_n\|\}_{n\geq 1}$ converge vers $\|v\|$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 30 *Soient A, B deux opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On pose $\{A, B\} = i(AB - BA)$.*
i) Montrer que l'opérateur $\{A, B\}$ est autoadjoint.
Soit $\psi \in \mathcal{H}$. On se propose de montrer l'inégalité (revoir les notations dans le cours)

$$\mathbb{V}_\psi(A)\mathbb{V}_\psi(B) \geq 4|\langle\{A, B\}\rangle|_\psi. \tag{3.75}$$

ii) On suppose d'abord que $\langle A\rangle_\psi = \langle B\rangle_\psi = 0$. On pose $f(\lambda) = \|A\psi + i\lambda B\psi\|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire de l'étude du trinôme f l'égalité (3.75) dans ce cas.
iii) Déduire de ce qui précède l'inégalité (3.75) dans le cas général (remplacer A par $A - a\mathbb{1}$ et B par $B - b\mathbb{1}$ pour a, b convenables.).

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 31 *Vérifier que le théorème de Lax-Milgram est encore valide pour les espaces de Hilbert réels.*
On suppose que B est une forme bilinéaire réelle et symétrique. Posons alors $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}B[v, v] - f(v)$ où B vérifie (3.41). $\mathcal{E}(v)$ s'interprète comme une énergie.
Montrer que $u \in \mathcal{V}$ est solution du problème variationnel (3.42) si et seulement si u minimise l'énergie $\mathcal{E}$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 32 *Sur l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$ on considère l'application linéaire*

$$Au(t) = \int_0^t u(s)ds.$$

a) Montrer que A est une application continue de $L^2[0,1]$ dans lui-même. Donner un majorant de sa norme.
b) Montrer que A est un opérateur de classe Hilbert-Schmidt.
c) Déterminer l'adjoint A^* de A

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 33 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'espace*

$$H^1(I) = \{f \in L^2(I),\ \exists g \in L^2(I),\ \forall x, y \in I,\ f(y) = f(x) + \int_x^y g(t)dt\}\,.$$

1. *Montrer que si $f \in H^1(I)$, alors g est unique. On posera $f' = g$.*
2. *Montrer que $|x| \in H^1(-1,1)$.*
3. *Pour $f \in H^1(I)$, on pose $||f||^2 = ||f||^2_{L^2} + ||f'||^2_{L^2}$. Montrer que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.*
4. *Montrer que si I est borné alors*
   (i) l'injection de $C^1(I)$ dans $H^1(I)$ est continue.
   (ii) l'injection de $H^1(I)$ dans $C^0(I)$ est continue.
   (iii) l'injection de $H^1(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte.
5. *Soit $H^1_0(a,b) = \{f \in H^1(a,b),\ f(a) = f(b) = 0\}$. Montrer que $H^1_0(a,b)$ est un sous-espace fermé de $H^1(a,b)$.*
   Montrer que pour tout $u \in H^1_0(a,b)$ on a $\|u\|_2 \leq (b-a)\|u'\|_2$. En déduire que $u \mapsto \|u'\|_2$ est une norme sur $H^1_0(a,b)$ équivalente à la norme initiale.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 34 *Soit f et q deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $q > 0$. On considère l'équation différentielle*

$$u \in C^2([a,b]),\ -u'' + qu = f,\ u(a) = u(b) = 0\,. \tag{E}$$

Pour u et v dans $H^1_0(a,b)$, on pose $a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)dx$ et $Lu = \int_a^b f(x)u(x)dx$.

1. *Montrer que si u est solution de (E), alors*

$$\forall v \in H^1_0(a,b),\ a(u,v) = Lv \tag{E'}$$

2. *Montrer que L est une forme linéaire continue sur $H^1_0(a,b)$.*
3. *Montrer que a est une forme bilinéaire symétrique continue elliptique.*
4. *En déduire qu'il existe un unique u dans $H^1_0(a,b)$ solution de (E').*
5. *En admettant que (E) admet une solution, en déduire que cette solution est unique et coïncide avec la solution de (E').*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 35 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ et $H = L^2(a,b)$.*

1. *On définit, pour $f \in H$, $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in (a,b)$. Montrer que T est un opérateur autoadjoint de H et $\sigma(T) = [a,b]$.*
2. *Soit $s \in C([a,b])$ un fonction à valeurs réelles. On définit $S(f)(x) = s(x)f(x)$. Vérifier que S est autoadjoint dans H et que $\sigma(S) = [\min_{x\in[a,b]} s(x), \max_{x\in[a,b]} s(x)]$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 36 *Soit U un opérateur unitaire d'un espace de Hilbert H dans H. Montrer qu'alors $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 37 *(i) Soit $H = l^2(\mathbb{N})$ et (a_n) une suite complexe. On définit l'application linéaire u par $(u(x))_n = a_n x_n$. Montrer que u est continue ssi (a_n) est bornée.*
(ii) Quel est le spectre de u ? A quelle condition u est-il auto-adjoint ?

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 38 *(i) Soit $I =]0,+\infty[$. On définit sur $\mathbb{R}$, pour $f \in L^2(I)$, $F(f)(x) = e^{\frac{x}{2}} f(e^x)$ et sur I, $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. Montrer que $T(f) \in C(I)$ et que sa limite est nulle à l'infini. Montrer que F définit un isomorphisme isométrique de $L^2(I)$ sur $L^2(\mathbb{R})$.*
(ii) Soit $g(x) = e^{-\frac{x}{2}} 1_I(x)$. Montrer que pour tout $f \in L^2(I)$, $F^{-1}(F(f) \star g) = T(f)$. En déduire que T est un opérateur linéaire de $L^2(I)$ et que $||T|| \leq 2$.

indications♠ ;Corrigé♣

Indications 24 *comparer $U^\star$ et U^{-1}.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 25 *i) utiliser $U^\star = U^{-1}$.*
ii) calculer $U^n f$.
iii) décomposer f.
iv) on rappelle que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets soit denses. Dans le cas discret ils sont engendrés par un élément.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 26 *Dans un sens utiliser la continuité du produit scalaire. Dans l'autre sens raisonner par l'absurde et noter qu'une suite infinie de vecteurs orthormés converge faiblement vers 0.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 27 *développer $\|u_n - v\|^2$.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 28 *s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 29 *Adapter au cas réel la preuve faite dans le cas complexe. Calculer les différentielles première et seconde de $\mathcal{E}$.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 30 *a) sans difficulté.*
b) Expliciter le noyau intégral de A.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 31 *1) sans difficulté*
2) distinguer $x < 0$ et $x \geq 0$.
3) utiliser la méthode standard pour montrer que $H^1(I)$ est complet.
4) Pour (iii) penser au théorème d'Ascoli.
5) utiliser 4), (i).

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 32 *1. intégrer par parties.*
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. sans difficulté.
4. Lax-Milgram.
5. sans difficulté.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 33 *1. Déterminer $T^\star$. Étudier l'inversibilité de $T - \lambda\mathbb{1}$.*
2. Même démarche que dans la question 1.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 34 *Commencer par montrer que* $U - z\mathbb{1}$ *est inversible pour* $|z| \geq 1$

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 35 *sans difficulté.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 36 *arguments classiques pour le début.*
On rappelle l'inégalité de Young concernant le produit de convolution :
$\|h \star g\|_2 \leq \|g\|_1 \|h\|_2$ *pour tous* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Correction 24 *On utilise la propriété* $(AB)^\star = B^\star A^\star$.
D'où $U^\star = (A-i)^{-1}(A+i)$. *Or* $A-i$ *et* $(A+i)^{-1}$ *commutent (à vérifier).*
D'où $UU^\star = U^\star U = \mathbb{1}$.$\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 25 *i) Soit* $v \in \mathcal{H}$ *On a* $Uv = v$ *si et seulement si* $U^{-1}v = v$.
Or $U^\star = U^{-1}$, *d'où* $\ker(U-\mathbb{1}) = \ker(U^\star - \mathbb{1})$.
On sait d'après le cours que $\ker(U^\star - \mathbb{1})^\perp = \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$, *il résulte de ce qui précède que* $\ker(U-\mathbb{1})^\perp = \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$.
ii) Soit $f = (U-\mathbb{1})g$. *On alors* $U^j f = U^{j+1}g - U^j g$ *et* $\sum_{1\le j\le n} U^j f = U^{n+1}g + Ug$. *D'autre part,* U *étant unitaire, on a* $\|U^{n+1}g + Ug\| \le 2\|g\|$. *On a donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le j\le n} U^j f = 0 \tag{3.76}$$

Soit maintenant $f \in \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $h \in \mathrm{Im}(U-\mathbb{1})$ *tel que* $\|f-h\| \le \varepsilon$. *On a alors* $\|\sum_{1\le j\le n} U^j(f-h)\| \le n\varepsilon$. *On en déduit alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,*

$$\|\frac{1}{n}\sum_{1\le j\le n} U^j f - \| \le 2\varepsilon$$

et (3.76) est donc vérifiée pour f.
iii) Soit $f \in \mathcal{H}$. *On a* $f - \pi_1 f \in \overline{\mathrm{Im}(U-\mathbb{1})}$ *et on peut donc lui appliquer (3.76). D'autre part* $U^j\pi_1 = \pi_1$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$. *Il en résulte donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le j\le n} U^j f = \pi_1 f \tag{3.77}$$

iv) Identifions $L^2[0,1]$ *aux fonctions localement de carré intégrables et 1-périodiques. Déterminons* $\ker(U-\mathbb{1})$. *Si* $Uf = f$ *alors* α *est une période de* f. *Le groupe*G_f *des périodes de* f *contient* α *et 1.* α *étant irrationnel,* G_f *est donc dense. D'autre part* G_f *est fermé (à vérifier). On en déduit que* f *est la fonction constante et donc que* $\pi_1 f = \int_0^1 f(t)dt$. *Par conséquent l'application de (3.77) donne le résultat.*$\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 26 *Soit* $\{u_n\}$ *une suite fortement convergente vers* a. *Pour tout* $v \in \mathcal{H}$ *on a*

$$|\langle u_n - a, v\rangle| \le \|u_n - a\|\|v\|$$

On en déduit que $\{u_n\}$ *converge faiblement vers* a.
Pour la réciproque, supposons $\mathcal{H}$ *de dimension infinie. Il existe alors une suite* $\{e_n\}$ *de vecteurs orthonormés. Cette suite n'est pas fortement convergente car, d'aprés le théorème de Pythagore,* $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ *si* $n \ne m$. *Cette suite converge faiblement vers 0 ; car en vertu de l'inégalité de Bessel on a,* $\forall v \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, v\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

On obtient donc une contradiction. $\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 27 *Si* $\{u_n\}$ *converge fortement vers* v, *on a vu dans l'exercice précédent que* $\{u_n\}$ *converge faiblement. Ensuite il résulte de l'inégalité triangulaire que l'on a*

$$|\|u_n\| - \|v\|| \le \|u_n - v\|$$

Donc $\|u_n\|$ *converge vers* $\|v\|$.
La réciproque résulte de l'égalité suivante :

$$\|u_n - v\|^2 = \|u_n\|^2 + \|v\|^2 - \langle u_n, v\rangle - \langle v, u_n\rangle$$

$\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 28 *i) On a* $(iAB)^\star = -B^\star A^\star = -BA$. *On en déduit donc que* $\{A,B\}^\star = \{A,B\}$.
ii) On a, en développant,

$$\|A\psi + i\lambda B\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + \lambda^2\|B\psi\|^2 + \lambda\langle\{A,B\}\psi,\psi\rangle$$

On obtient ainsi un trinôme du second degré en λ *de signe constant. On a donc*

$$\langle\{A,B\}\psi,\psi\rangle^2 \le 4\|A\psi\|^2\|B\psi\|^2 \tag{3.78}$$

Ce qui prouve (3.75) lorsque les moyenne de A *et* B *en* ψ *sont nulles.*
iii) Il suffit d'appliquer l'inégalité (3.78) à $\tilde{A} = A - <A>_\psi$ *et* $\tilde{B} = B - <B>_\psi$. $\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 29 *La preuve donnée dans le cours dans le cas complexe s'adapte sans difficulté au cas réel.*
Calculons les différentielles première et seconde de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{E}'_u(v) = B[u,v] - f(v)$ *et*

$$\mathcal{E}''_u(v,w) = B[v,w]$$

.
Donc u *est solution du problème variationnel si et seulement si* $\mathcal{E}'_u = 0$.
Dans ce cas, B *étant positive,* u *est un minimum de* $\mathcal{E}$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 30 *a)D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a*

$$|Au(t)|^2 \leq \|u\|^2,\ \forall t \in [0,1]$$

et après intégration $\|Au\| \leq \|u\|$. *D'où* $\|A\| \leq 1$.
b) A *a pour noyau intégral* $K(s,t) = \mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. K *est dans* $L^2([0,1]\times[0,1])$ *(*$\|K\|_2^2 = 1/2$*),* A *est donc de classe Hilbert-Schmidt (en particulier compact).*
c) Appliquons le théorème de Fubini.

$$\int_0^1 \left(\int_0^t u(s)ds\right)\overline{v(t)}dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 \overline{v(t)}\right)u(s)ds$$

On a donc établi que

$$A^\star v(s) = \int_s^1 v(s)ds.$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 31 *1. Soient* g_1 *et* g_2 *telles que*

$$f(y) = f(x) + \int_x^y g_1(t)dt = f(x) + \int_x^y g_2(t)dt,\ \forall x,y \in I.$$

Alors

$$\int_x^y [g_1(t) - g_2(t)]dt = 0,\ \forall x,y \in I$$

L'ensemble des fonctions en escalier étant dense dans $L^2(I)$ *on en déduit que* $g_1 = g_2$.
2. On vérifie que $x \mapsto f(x) := |x|$ *satisfait la définition de* $H^1[-1,1[$ *avec* $f'(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $f'(x) = -1$ *si* $x < 0$.
3. Soit $\{f_n\}$ *une suite de Cauchy dans* $H^1(I)$. *Alors* $\{f_n\}$ *et* $\{f'_n\}$ *sont deux suites de Cauchy de* $L^2(I)$. $L^2(I)$ *étant complet, il existe* $f, g \in L^2(I)$ *telles que* $\{f_n\}$ *converge vers* f *et* $\{f_n{}'\}$ *converge vers* f' *dans* $L^2(I)$.
Il nous faut montrer que $f \in H^1(I)$ *et que* $f' = g$ *pour conclure.*
Admettons provisoirement la propriété (ii) de la question 4. Alors La suite $\{f_n\}$ *est une suite de fonctions continues, convergeant vers* f *uniformément sur tout sous-intervalle borné de* I. *On peut passer à la limite dans l'égalité*

$$f_n(y) = f_n(x) + \int_x^y f_n{}'(t)dt$$

et on obtient

$$f(y) = f(x) + \int_x^y g(t)dt$$

D'où le résultat.
4. (i) Si f *est* C^1 *on a facilement que* $f \in H^1(I)$ *et* f' *est la dérivée usuelle.*
(ii) Si $f \in H^1(I)$ *il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on*

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|f'\|_2,\ \forall x,y \in I. \tag{3.79}$$

f *est donc continue sur* I. *Soit* $I = [a,b]$.
On a également

$$|f(x)| \leq |f(y)| + \sqrt{|x-y|}\|f'\|_2,\ \forall x,y \in I$$

Intégrons cette inégalité sur I *par rapport à* y *et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient*

$$|f(x)|\|eq(b-a)^{-1/2}\|f\|_2 + (b-a)^{1/2}\|f'\|_2$$

Si donc $C = \max\{(b-a)^{-1/2}, (b-a)^{1/2}\}$ *alors*

$$\|f\|_\infty \leq C(\|f\|_2 + \|f'\|_2) \tag{3.80}$$

L'injection de $H^1(I)$ *dans* $\mathcal{C}(I)$ *est donc continue.*
(iii) Montrons que la boule unité B_1 *de* $H^1(I)$ *est relativement compacte dans* $L^2(I)$.

Il résulte de (3.79) et (3.80) et du théorème d'Ascoli que B_1 est relativement compact dans $\mathcal{C}(I)$. Or l'injection de $\mathcal{C}(I)$ dans $L^2(I)$ est continue. On en déduit que B_1 est relativement compacte dans $L^2(I)$.
5. Soit $I = [a,b]$. Il résulte de (3.80) que les applications $f \mapsto f(a)$ et $f \mapsto f(b)$ sont continues sur $H^1(I)$. $H^1_0(I)$ est donc un sous-espace fermé de $H^1(I)$.
Pour tout $u \in H^1_0(a,b)$ on a $u(x) = \int_a^x u'(t)dt$, d'où l'on tire : $|u(x)|^2 \le (b-a)\|u'\|_2$ puis en intégrant : $\|u\|_2 \le (b-a)\|u'\|_2$. On en déduit

$$\|u'\|_2 \le \|u\|_{2,1} \le c\|u'\|_2$$

avec $c^2 = 1 + (b-a)^2$, doù l'équivalence des normes. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 32 *1. Cela résulte simplement d'une intégration par parties.*
2. On $|Lu| \le \|f\|_2\|u\|_2 \le \|u\|_{2,1}$ où
$\|u\|_{2,1} = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right)^{1/2}$.
3. a est clairement bilinéaire et symétrique. La continuité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \le \|u'\|_2\|v'\|_2 + \|q\|_\infty\|u\|_2\|v\|_2 \le C\|u\|_{2,1}\|v\|_{2,1}.$$

L'ellipticité résulte de l'exercice précédent (5.) et de

$$a(u,u) \ge \int_a^b u'(x)^2dx \ge c^{-2}\|u\|_{2,1}$$

4. résulte immédiatement de ce qui précède et du théorème de Lax-Milgram.
5.Résulte de l'unicité de (E').

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 33 *1. Il est immédiat de voir que $T^\star(f)(x) = xf(x)$. Donc $T^\star = T$.*
Si $\lambda \notin [a,b]$ l'opérator R_λ défini par $R_\lambda(f)(x) = (x-\lambda)^{-1}f(x)$ est un opérateur linéaire continu sur H et on a $R_\lambda T = TR_\lambda = \mathbb{1}$. Par conséquent $\sigma(T) \subseteq [a,b]$.
Supposons qu'il existe $\lambda \in]a,b[$ telle que $(T-\lambda)$ soit un isomorphisme bicontinu de H dans H.
Il existerait alors $C > 0$ tel que $\forall f \in L^2(a,b)$, on ait

$$\int_a^b |f(x)|^2dx \le C\int_a^b |x-\lambda|^2|f(x)|^2dx$$

Soit $\delta > 0$ tel que $\delta < \lambda - a$. Testons l'inégalité précédente avec $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,\lambda-\delta]}(x)}{|x-\lambda|^{1/2}}$. On obtient alors

$$\int_a^{\lambda-\delta}\frac{dx}{\lambda - x} \le C(b-a)^2;\ \forall\delta > 0.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre δ vers 0.
Le spectre étant fermé on en déduit que $\sigma(T) = [a,b]$.
2. Le lecteur procédera selon la même méthode que dans 1.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 34 *On a $\|U\| = 1$. Il en résulte (cours) que si $|z| > 1$ alors $z \in \rho(U)$. On applique cela à U^{-1}. Si $|z| > 1$ alors $z \in \rho(U^{-1})$ donc $z^{-1} \in \rho(U)$. On en déduit que $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.*□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 35 *Posons $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ et $(a(u))_n = a_nu_n$*
(i) On a facilement

$$\|a(u)\| \le \|a\|_\infty\|u\|$$

Inversement s'il existe $C > 0$ telle que

$$\|a(u)\| \le C\|u\|,\ \ \forall u \in H,$$

appliquons cette inégalité aux suites $e^{-i\theta_m}\delta_n{}^m$ où $\delta_n{}^m = 0$ si $n \ne m$, $\delta_n^n = 1$, θ_m est l'argument de a_m. On obtient alors $|a_n| \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 36 *(i) Tf est clairement continue sur I. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne*

$$|Tf(x)| \le x^{-1/2}\|f\|_2$$

On a donc $\lim_{x\to+\infty} Tf(x) = 0$.

Il résulte d'un changement de variable que l'on a $\|F(f)\|_2 = \|f\|_2$ *Montrons que* F *est surjective. Un calcul élémentaire montre que* F *est inversible, d'inverse :* $F^{-1}(g)(u) = u^{-1/2}g(\log u)$.

(ii) On a $F(f) \star g(x) = e^{-x/2}\int_{y\leq x} e^y f(e^y)dy$. *Le changement de variable* $u = e^y$ *donne* $F(f) \star g = F(T(f))$. *D'après l'inégalité de Young on a* $\|h \star g\|_2 \leq \|h\|_2\|g\|_1$.

F *étant une isométrie on en déduit* $\|T\| \leq \|g\|_1 = 2$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Chapitre 4. Dualité et Applications linéaires

4.1 Topologies définies par des familles de semi-normes

Jusqu'à maintenant on a considéré des espaces vectoriels munis d'une norme. Or on rencontre fréquemment des espaces vectoriels dont la topologie est définie par des familles de semi-normes. Voici un exemple. Soit S l'ensemble des suites de nombres réels $x = \{x_k\}_{n\geq 1}$. On pose $p_k(x) = |x_k|$. Les p_k constituent une famille de semi-normes sur S (voir le chapitre 1) . On construit alors une distance sur S par :

$$d(x,y) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},\ x, y \in S. \tag{4.81}$$

On montrera en exercice que (S, d) est un espace métrique complet et que la topologie définie par d sur S admet pour base de voisinages de 0 les ensembles :

$$V_{J,\varepsilon} = \{x,\ p_n(x) < \varepsilon,\ \forall n \in J\}$$

où J parcourt l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$.

Cet exemple se généralise facilement.

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de semi-normes sur $\mathcal{E}$. On appelle topologie engendrée par cette famille la topologie définie par la base de voisinages en chaque point $u \in \mathcal{E}$,*

$$V_{J,\varepsilon}(u) = \{v,\ p_\lambda(v - u) < \varepsilon,\ \forall\lambda \in J\}$$

où J parcourt l'ensemble des parties finies de Λ et $\varepsilon > 0$.
Rappelons que cela signifie que $\mathcal{U}$ est un ouvert si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $\varepsilon > 0$ et une partie finie J de Λ tels que $V_{J,\varepsilon}(u) \subseteq \mathcal{U}$.
On dit que $\mathcal{E}$ est un espace de Fréchet si la topologie engendrée par la famille de semi-norme $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est métrisable, c'est à dire qu'elle peut être définie par une distance d et s'il est complet pour d.

On vérifiera en exercice que l'espace S du début est un espace de Fréchet.
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{E}'$ désigne le dual (topologique) de $\mathcal{E}$ c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{E}$, et $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Définition 4.2 *On appelle topologie faible sur $\mathcal{E}$ la topologie définie par la famille de semi-normes $p_f(u) = |f(u)|$ où f parcourt $\mathcal{E}'$.*
On appelle topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{E}'$ la topologie définie par la famille de semi-normes $p_u(f) = |f(u)|$ où u parcourt $\mathcal{E}$.

Notation Il est courant d'utiliser la notation $< f, u >$ pour $f(u)$ lorsque $u \in \mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{E}'$.

Définition 4.3 *On appelle topologie de la norme d'opérateurs sur $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ la topologie définie par la norme*

$$T \mapsto \|T\| = \sup_{\|u\|_{\mathcal{E}}\leq 1} \|Tu\|_{\mathcal{F}}$$

On appelle topologie forte sur $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ la topologie définie par la famille de semi-normes $p_u(T) = \|Tu\|$ où u parcourt $\mathcal{E}$.
On appelle topologie faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, la topologie définie par la famille de semi-normes $p_{u,f}(T) = |f(Tu)| = |< f, Tu >|$ où u parcourt $\mathcal{E}$.

Ces topologies sont comparables mais en général non équivalentes (voir exercice).

4.2 Propriété de Baire et applications linéaires

Théorème 4.4 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $\{U_n\}_{n\geq 1}$ est une famille dénombrable d'ouverts de E telle que U_n est dense dans E pour tout $n \geq 1$ alors $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ est dense dans E. Ou encore, de manière équivalente, si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de fermés, telle que F_n est d'intérieur vide pour tout $n \geq 1$ alors $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration :
Il suffit de démontrer que pour tout ouvert non vide U de E on a : $\bigcap_{n\geq 1} U_n \cap U \neq \emptyset$.
On va pour cela construire une suite convergente convenable.
U_1 étant dense, $\exists x_1 \in E$ et $0 < r_1 < 1$ tels que $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq U_1 \cap U$ où $\hat{B}(x, r)$[7] désigne la boule fermée de centre x et rayon r.

[7] on rappelle que dans un espace métrique une boule fermée n'est pas nécessairement égale à l'adhérence de la boule ouverte correspondante

U_2 étant dense il existe de même $x_2 \in E$ et $0 < r_2 < 1/2$ tels que $\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq U_2 \cap \hat{B}(x_1, r_1)$.
Par récurrence sur n on construit $x_n \in E$ et $0 < r_n < 1/2^n$ tels que $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq U_n \cap \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$. En particulier, pour tout n on a $d(x_n, x_{n-1}) \leq 2^{1-n}$.

On en déduit que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans E car celui-ci est complet. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a alors $x \in \bigcap_{n\geq 1} \hat{B}(x_n, r_n)$ et par conséquent $x \in \bigcap\limits_{n\geq 1} U_n \cap U$.□

Parmi les nombreuses applications de la propriété de Baire en voici une concernant les suites d'applications linéaires.

Théorème 4.5 (Banach-Steinhaus) *Soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach et $\mathcal{F}$ un espace vectoriel normé. Soit $\{T_j\}_{j\in J}$ une famille d'applications linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ où J est un ensemble d'indices quelconque. On alors l'alternative suivante :*
ou bien :

$$\sup_{j\in J} \|T_j\| < +\infty \tag{4.82}$$

ou bien : il existe une famille dénombrable d'ouverts $\{U_n\}_{n\geq 1}$ telle que U_n est dense dans $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 1$ tel que pour tout $x \in \bigcap\limits_{n\geq 1} U_n$ on a

$$\sup_{j\in J} \|T_j(x)\| = +\infty \tag{4.83}$$

où $\bigcap\limits_{n\geq 1} U_n$ est dense dans $\mathcal{E}$.

Corollaire 4.6 *Sous les hypothèses précédentes, si pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a $\sup\limits_{j\in J} \|T_j(x)\| < +\infty$ alors $\sup\limits_{j\in J} \|T_j\| < +\infty$.*
En particulier, si $\{T_n\}$ est une suite telle que pour tout $u \in \mathcal{E}$, $T_n u$ a une limite dans $\mathcal{F}$ alors la suite $\{T_n\}$ converge fortement vers $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et on a

$$\|T\| \leq \sup_{n\geq 1} \|T_n\|.$$

Démonstration du Théorème :
Introduisons la fonction auxiliaire, définie sur $\mathcal{E}$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$.

$$\varphi(x) = \sup_{j\in J} \|T_j(x)\|$$

On vérifie facilement que pour tout $n \geq 1$ l'ensemble :

$$U_n = \{x \in \mathcal{E},\ \varphi(x) > n\}$$

est un ouvert de $\mathcal{E}$. Deux cas se présentent alors.
1. Il existe n_0 tel que U_{n_0} n'est pas dense dans $\mathcal{E}$. Dans ce cas il existe $u_0 \in \mathcal{E}$, $r > 0$ tels que

$$\|u\| < r \Rightarrow u_0 + u \notin U_{n_0} \Rightarrow \varphi(u_0 + u) \leq n_0.$$

On a donc

$$\|u\| < r \Rightarrow \|T_j(u)\| \leq \|T_j(u_0)\| + \|T_j(u - u_0)\| \leq 2n_0$$

On est alors dans le premier cas de lénoncé.
2. Sinon, pour tout n, U_n est dense dans $\mathcal{E}$ et d'après le théorème de Baire, $\bigcap\limits_{n\geq n} U_n$ est dense dans $\mathcal{E}$. Or, $\forall u \in \bigcap_{n\geq n} U_n$ on a $\varphi(u) = +\infty$, on est donc dans le deuxième cas de l'énoncé.□

4.3 Applications ouvertes et conséquences

Théorème 4.7 (Application ouverte) *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de Banach, T une application linéaire continue et* surjective *de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$. Alors T est une application ouverte, c'est à dire que l'image directe par T de tout ouvert de $\mathcal{E}$ est un ouvert de $\mathcal{F}$.*

Démonstration :
En utilisant les translations et les homothéties il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{\mathcal{F}}(O, r) \subseteq T(B_{\mathcal{E}}(O, 1)) \tag{4.84}$$

où $B_{\mathcal{F}}(O, r)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{F}$ de centre O et rayon r.
On commence par montrer quil existe $r > 0$ tel que

$$B_{\mathcal{F}}(O, 2r) \subseteq \overline{T(B_{\mathcal{E}}(O, 1))}. \tag{4.85}$$

Pour cela posons $F_n = n\overline{T(B_{\mathcal{E}}(O, 1))}$. Puisque T est surjective on a $\bigcup_{n\geq 1} F_n = \mathcal{F}$. D'après le théorème de Baire, il existe n_0 tel que l'intérieur $\mathrm{int}(F_{n_0})$ de F_{n_0} soit non vide. On en déduit donc que $\mathrm{int}(\overline{T(B_{\mathcal{E}}(O, 1))}) \neq \emptyset$. Il existe donc $r > 0$ et $u_0 \in \mathcal{F}$ tel que $B_{\mathcal{F}}(u_0, 4r) \subseteq \overline{T(B_{\mathcal{E}}(O, 1))}$. Donc si $\|v\| \leq 2r$ on a $2v = (2v - u_0) + u_0$ d'où l'on déduit (4.85).
Pour démontrer (4.84) on part de $v \in \mathcal{F}$, $\|v\| < r$ et on cherche à résoudre

l'équation $Tu = v$ dans $B_{\mathcal{E}}(O,1)$. On va procéder par approximations successives. En utilisant (4.85), il existe $u_1 \in \mathcal{E}$ tel que $\|u_1\| < 1/2$ et $\|v - Tu_1\| < r/2$.
On recommence l'opération en remplaçant v par $v - Tu_1$, on trouve alors $u_2 \in \mathcal{E}$, $\|u_2\| < 1/4$ tel que $\|v - Tu_1 - Tu_2\| < r/4$. Par récurrence sur n on construit ainsi une suite u_n de $\mathcal{E}$ telle que $\|u_n\| < 1/2^n$ et $\|v - Tu_1 - Tu_2 - \cdots - Tu_n\| < r/2^n$. $\mathcal{E}$ étant complet on peut donc définir $u = \sum_{n\geq 1} u_n$ qui vérifie bien l'égalité $v = Tu$ avec $\|u\| < 1$.□

Corollaire 4.8 *Sous les hypothèses du théorème de l'application ouverte, on suppose de plus que T est injective. Alors T^{-1} est continue. Autrement dit toute application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach est bicontinue.*

Corollaire 4.9 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel muni de deux normes $\|\bullet\|_1$ et $\|\bullet\|_2$. On suppose $\mathcal{E}$ complet pour chacune de ces deux normes et qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_2 \leq C\|u\|_1,\ \forall u \in \mathcal{E}$$

Alors les deux normes sont équivalentes.

Démonstration :
Désignons par $\mathcal{E}_i$ l'espace de Banach $\mathcal{E}$ muni de la norme $\|\bullet\|_i$. L'identité $\mathbb{1}$ est linéaire continue de $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{E}_2$. Or son inverse est $\mathbb{1}$ de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}_1$ qui est donc continue d'après le corollaire précédent. On en déduit donc qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\|u\|_1 \leq c\|u\|_2,\ \forall u \in \mathcal{E}.$$

Les normes sont donc équivalentes.□

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 4.10 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de Banach, T une application linéaire de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$. On suppose que son graphe $G(T) = \{(u, Tu),\ u \in \mathcal{E}\}$, est fermé dans le produit $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Alors T est continue. (la réciproque est vraie pour toute application continue entre espaces métriques).*

Démonstration :
Posons $\|u\|_1 = \|u\|_{\mathcal{E}}$ et $\|u\|_2 = \|u\|_{\mathcal{E}} + \|Tu\|_{\mathcal{F}}$. Il est aisé de montrer que, sous l'hypothèse du Théorème, $\mathcal{E}$ est complet pour la norme $\|\bullet\|_2$. D'après le corollaire précédent, il existe donc $c > 0$ tel que

$$\|Tu\|_{\mathcal{F}} \leq \|Tu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{E}} \leq c\|u\|_{\mathcal{E}}.$$

□

4.4 Le Théorème de Hahn-Banach

Il s'agit d'un résultat général sur le prolongement d'applications linéaires qui a de multiples applications.

Théorème 4.11 (forme analytique du théorème de Hahn-Banach) *Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p une application de $\mathcal{E}$ dans $[0, +\infty[$ telle que $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in [0, +\infty[$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et ℓ une forme linéaire sur F. On suppose que*

$$\ell(u) \leq p(u),\ \ \forall u \in F. \tag{4.86}$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur $\mathcal{E}$, prolongeant ℓ, vérifiant

$$\tilde{\ell}(u) \leq p(u),\ \ \forall u \in \mathcal{E}. \tag{4.87}$$

Le résultat s'étend aux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ sous la forme suivante. Supposons que p est une semi-norme et que sur le sous-espace F de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{C}$ on a

$$|\ell(u)| \leq p(u),\ \ \forall u \in F. \tag{4.88}$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur $\mathcal{E}$, prolongeant ℓ, vérifiant

$$|\tilde{\ell}(u)| \leq p(u),\ \ \forall u \in \mathcal{E}. \tag{4.89}$$

Avant d'en donner une démonstration, examinons quelques conséquences.

Corollaire 4.12 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, F un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et ℓ une forme linéaire continue sur F. Il existe alors $\tilde{\ell} \in \mathcal{E}'$ prolongeant ℓ telle que $\|\ell\| = \|\tilde{\ell}\|$.*

Démonstration du corollaire 4.12 :
Il suffit d'appliquer le Thérème à $p(u) = \|\ell\|\|u\|$. □

Corollaire 4.13 *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit $u \in \mathcal{E}$, $u \neq 0$. Il existe alors $\ell \in \mathcal{E}'$ telle que $\|\ell\| = 1$ et $\ell(v) = \|v\|$. En particulier on a*

$$\|u\| = \sup_{\ell \in \mathcal{E}', \|\ell\|=1} |\ell(u)| \tag{4.90}$$

et l'application $u \mapsto J_u$ où $J_u(\ell) = \ell(u)$, est une isométrie linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}''$. Autrement dit on a une isométrie naturelle de $\mathcal{E}$ dans son bidual $\mathcal{E}''$.

Démonstration du corollaire 4.13 :
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par u. On définit ℓ sur F par $\ell(\lambda u) = \lambda\|u\|$ et on applique le théorème de Hahn-Banach.
L'inégalité (4.90) est une conséquence facile et l'on en déduit l'injection naturelle de $\mathcal{E}$ dans son bidual $\mathcal{E}'' = (\mathcal{E}')'$.□

Définition 4.14 *On dit qu'un espace de Banach est réflexif si l'injection canonique J de $\mathcal{E}$ dans son bidual $\mathcal{E}''$ est surjective.*

Corollaire 4.15 *Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel* fermé *et $u \in \mathcal{E}$, $u \notin F$. Il existe alors $f \in \mathcal{E}'$ tel que $f(u) = 1$ et $f(v) = 0$, $\forall v \in F$.*

Démonstration du corollaire 4.15 :
On applique le corollaire 4.12 à l'espace quotient $\mathcal{G} = \mathcal{E}/F$, muni de la norme quotient $|||\bullet|||$. Il existe alors $\ell \in \mathcal{G}'$ telle que $\ell(\dot{u}) = 1$ et $f(v) = \ell(\dot{v})$ possède les propriétés voulues.□

Corollaire 4.16 *Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel. On a alors*

$$\overline{F} = \bigcap_{f\in\mathcal{E}', F\subseteq \ker f} \ker f. \tag{4.91}$$

En particulier F est dense dans $\mathcal{E}$ si et seulement si toute forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$ qui s'annule sur F est identiquement nulle sur $\mathcal{E}$.

Démonstration du corollaire 4.16 :
Posons

$$G = \bigcap_{f\in\mathcal{E}', F\subseteq \ker f} \ker f$$

On a clairement $\overline{F} \subseteq G$, G étant fermé. Soit alors $u \in \mathcal{E}$, $u \notin \overline{F}$, alors d'après le corollaire 4.15 on eut trouver $\ell \in \mathcal{E}'$ telle que $\ell(u) = 1$ et $\ell = 0$ sur F. Ce qui entraîne $u \notin G$. Il en résulte donc $G \subseteq \overline{F}$ et $G = \overline{F}$.□

Pour démontrer le Théorème de Hahn-Banach nous allons utiliser le Lemme de Zorn qui est une forme sophistiquée du raisonnement par récurrence (dite transfinie).

Définition 4.17 *Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée "$\leq$". On dit que cet ensemble ordonné est inductif si toute partie totalement ordonnée de E admet un majorant.*

Le résultat suivant est démontré dans les livres d'algèbre et est équivalent à l'axiome du choix.

Lemme 4.18 (Zorn) *Tout ensemble ordonné, inductif, possède un élément maximal*

Démonstration du théorème de Hahn-Banach :
On considère d'abord le cas réel. Dans un premier temps on va établir la propriété lorsque F est de codimension 1.
Soit $v \in \mathcal{E}$, $v \notin F$. Posons $F_1 = F + \mathbb{R}v$. On cherche à prolonger ℓ à F_1 en préservant l'inégalité. Pour cela on cherche un réel a tel que $\ell_1(u + tv) = \ell(u) + ta$, $u \in F$, $t \in \mathbb{R}$, soit un prolongement de ℓ vérifiant

$$\ell_1(u + tv) \leq p(u + tv), \ \forall u \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{R}.$$

En notant que $\ell(u+tv) = t(\ell(u/t)+v)$ si $t \neq 0$, il suffit de trouver a pour que

$$\ell(u) + a \leq p(u + v) \ \text{ et } \ell(u) - a \leq p(u - v) \ \forall u \in F. \tag{4.92}$$

ou, de manière équivalente

$$\ell(u) - p(u - v) \leq a \leq p(u + v) - \ell(u) \ \forall u \in F \tag{4.93}$$

Or, pour tout $y, z \in F$ on a

$$\ell(y) + \ell(z) \leq p(y + z) \leq p(y + v) + p(z - v)$$

soit :

$$\ell(z) - p(z - v) \leq p(y + v) - \ell(y), \ \forall y, z \in F.$$

Il en résulte que pour avoir (4.93) il suffit de choisir a dans l'intervalle non vide

$$[\sup_{u\in F}(\ell(u) - p(u - v)), \inf_{u\in F}(-\ell(u) + p(u + v))].$$

Si le sous-espace F était de co-dimension finie on pourrait terminer la preuve par récurrence. Mais la force du Théorème de Hahn-Banach est sa grande généralité. On va maintenant terminer la preuve par un argument de récurrence transfinie à l'aide du Lemme de Zorn.
On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ constitué des couples (K, m) où K est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenant F et m est une forme linéaire sur K vérifiant $m(u) \leq p(u)$, $\forall u \in K$.
$\mathcal{M}$ est ordonné par la relation d'ordre suivante : $(K, m) \leq (K', m')$ signifie que $K \subseteq K'$ et m' est un prolongement de m.

Vérifions que $\mathcal{M}$ est inductif. Si $(K_j, m_j)_{j\in J}$ est une famille totalement ordonnée de $\mathcal{M}$, on obtient un majorant pour cette famille en définissant $K = \bigcup_{j\in J} K_j$ et $m(u) = m_j(u)$ si $u \in K_j$ (le lecteur vérifiera que cela a bien un sens).
Appliquons le Lemme de Zorn : $\mathcal{M}$ contient un élément maximal que l'on note $(\tilde{F}, \tilde{\ell})$. Montrons alors que $\tilde{F} = \mathcal{E}$. Supposons le contraire : il existerait alors $v \in \mathcal{E}$, $v \notin \tilde{F}$ et on pourrait appliquer le raisonnement fait au début. On obtiendrait un prolongement de $\tilde{\ell}$ à $\tilde{F} + v\mathbb{R}$ contredisant ainsi le caractère maximal de $(\tilde{F}, \tilde{\ell})$.
Extension au cas complexe :
Ce cas va se déduire du cas réel dans le cas où p est une semi-norme.
Soit donc f une forme linéaire sur F, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{E}$ tel que $|f(u)| \leq p(u)$, $\forall u \in F$. On pose $f_1(u) = \Re f(u)$. Notons que l'on a

$$f(u) = f_1(u) - i f_1(iu),\ \forall u \in \mathcal{E}$$

Or on a $f_1(u) \leq p(u)$, $\forall u \in F$. f_1 se prolonge donc en une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\tilde{f}_1$ sur $\mathcal{E}$ telle que $\tilde{f}_1(u) \leq p(u)$, $\forall u \in \mathcal{E}$. Posons alors $\tilde{f}(u) = \tilde{f}_1(u) - i\tilde{f}_1(iu)$. $\tilde{f}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{E}$.
Si θ est l'argument de $\tilde{f}(u)$ ($\tilde{f}(u) \neq 0$) on a

$$|\tilde{f}(u)| = \tilde{f}(\mathrm{e}^{-i\theta}u) = \Re\tilde{f}(\mathrm{e}^{-i\theta}u) \leq p(u),\ \forall u \in \mathcal{E}.$$

□

Le théorème de Hahn-Banach a une forme géométrique concernant les ensembles convexes. On suppose pour cela que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 4.19 *On appelle hyperplan de $\mathcal{E}$ toute partie H de $\mathcal{E}$ définie par $H = \{x \in \mathcal{E},\ f(x) = h\}$, où f est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, $f \neq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On appelle demi-espace fermé toute partie D définie par l'inégalité $D = \{u \in \mathcal{E},\ f(u) \geq h\}$ et D est un demi-espace ouvert si $D = \{u \in \mathcal{E},\ f(u) > h\}$.*

Proposition 4.20 *L'hyperplan H est fermé si et seulement si il est défini par une forme linéaire f continue.*

Démonstration :
Si f est continue il est connu que H est fermé. Inversement supposons H fermé. $\mathcal{E}\backslash H$ est un ouvert non vide de $\mathcal{E}$. Soit $u_0 \in \mathcal{E}$ tel que $f(u_0) < h$. Il existe une boule centrée en u_0 et de rayon $r > 0$ telle que $B(u_0, r) \subseteq \mathcal{E}\backslash H$. On a alors $f(u) < h$, $\forall u \in B(u_0, r)$ car sinon on pourrait trouver $u_1 \in B(u_0, r)$ tel que $f(u_1) = h$ et on aurait une contradiction.
On a alors $f(u_0 + rv) < h$, $\forall v, \|v\| < 1$. D'où l'on déduit

$$\|v\| < 1 \Rightarrow f(v) \leq \frac{h - f(u_0)}{r}$$

et remplaçant v par $-v$ on en déduit

$$\|v\| < 1 \Rightarrow |f(v)| \leq \frac{h - f(u_0)}{r}$$

f est donc continue.□

Corollaire 4.21 *Soient F un sous-espace fermé et G un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{E}$. Alors $F + G$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}$.*

Démonstration :
En raisonnant par récurrence sur la dimension de G il suffit de supposer que G est de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. Soit $G, = \mathbb{R}u_0.$, $u_0 \notin F$. Pour tout $u \in F + G$, on a $u = v + \lambda(u)u_0$. Cette décomposition est unique et λ est une forme linéaire. Or $\ker\lambda = F$ et d'aprés la proposition précédente, λ est continue sur $F + G$.
Soit alors $u \in \overline{F + G}$ et $\{u_n\}$ une suite de $F+G$, $u_n = v_n + \lambda(u_n)$, $v_n \in F$, convergent vers u. $\{\lambda(u_n)\}$ étant une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \lambda(u_{n_k}) = \mu$.
D'où v_{n_k} tend vers $u - \mu u_0$, et F étant fermé, on en déduit que $u - \mu u_0 \in F$ et donc $u = v + \mu u_0$ avec $v \in F$ i.e $u \in F + G$.□

Définition 4.22 *Soient A et B deux parties de $\mathcal{E}$. On dit que l'hyperplan H d'équation $f(x) = h$ sépare A et B au sens large si $f(x) \leq h$, $\forall x \in A$ et $f(x) \geq h$, $\forall x \in B$. On dit que la séparation est stricte s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq h - \varepsilon$, $\forall x \in A$ et $f(x) \geq h + \varepsilon$, $\forall x \in B$.*

Théorème 4.23 (Hahn-Banach Géométrique) *Soient A et B deux parties convexes non vides et disjointes de l'espace vectoriel normé réel $\mathcal{E}$. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

Pour démontrer ce théoreme on introduit la jauge d'un convexe ouvert contenant $\{O\}$.

Définition 4.24 *Soit K une partie convexe ouverte de $\mathcal{E}$ telle que $O \in K$. On appelle jauge de K la fonction p_K définie sur $\mathcal{E}$ par*

$$p_K(u) = \inf\{\lambda \in]0, +\infty[, \ u \in \lambda K\} \tag{4.94}$$

Lemme 4.25 *La jauge p_K vérifie les propriétés suivantes :*
i) Il existe $M > 0$ tel que $0 \leq p_K(u) \leq M\|u\|$, $\forall u \in \mathcal{E}$.
ii) $K = \{u, \ u \in \mathcal{E}, \ p_K(u) < 1\}$.
iii) $p_K(\lambda u) = \lambda p_K(u)$, $p_K(u+v) \leq p_K(u) + p_K(v)$, $\forall u, v \in \mathcal{E}$, $\lambda \geq 0$.

Démonstration :
Remarquons pour commencer qu'il résulte des hypothèses que si $\lambda^{-1}u \in K$ alors $\mu^{-1}u \in K$, $\forall \mu \geq \lambda$. Par hypothèse il existe une boule ouverte telle que $B(O,r) \subseteq K$, $r > 0$. D'où il résulte $p_K(u) \leq \frac{1}{r}\|u\|$, $\forall u \in \mathcal{E}$.
Soit $u \in K$. K étant ouvert, par continuité il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $(1+\varepsilon)u \in K$. D'où $p_K(u) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1$. Inversement si $p_K(u) < 1$, il existe $0 < \lambda < 1$ tel que $\frac{u}{\lambda} \in K$. On en déduit par convexité, $u = \lambda(\frac{u}{\lambda}) + (1-\lambda)O \in K$.
On obtient facilement $p_K(\lambda u) = \lambda p_K(u)$. Montrons pour terminer que $p_K(u+v) \leq p_K(u) + p_K(v)$. Utilisons la définition d'une borne inférieure. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $(p_K(u)+\varepsilon)^{-1}u \in K$ et $(p_K(v)+\varepsilon)^{-1}v \in K$. Donc pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$t(p_K(u)+\varepsilon)^{-1}u + (1-t)(p_K(v)+\varepsilon)^{-1}v \in K.$$

Appliquons cette propriété avec $t = \frac{p_K(u)+\varepsilon}{p_K(u)+p_K(v)+2\varepsilon}$.
On obtient alors que $(p_K(u)+p_K(v)+2\varepsilon)^{-1}(u+v) \in K$ d'où

$$p_K(u+v) \leq p_K u) + p_K(v) + 2\varepsilon$$

et on obtient iii) en faisant tendre ε vers 0.□

Lemme 4.26 *Soit K une partie convexe ouverte non vide de l'espace vectoriel normé réel $\mathcal{E}$. Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{E}$, $u_0 \notin K$, il existe une forme linéaire continue f sur $\mathcal{E}$ telle que $f(u) < f(u_0)$, $\forall u \in K$. En particulier l'hyperplan d'équation $\{f(x) = f(u_0)\}$ sépare K et $\{u_0\}$.*

Démonstration :
Quitte à faire une translation on peut supposer que $O \in K$. On applique alors la forme analytique du théorème de Hahn-Banach avec $p = p_K$ (jauge de K), $F = \mathbb{R}u_0$, $\ell\lambda u_0) = \lambda$. On a alors $\ell(u) \leq p_K(u)$, $\forall u \in F$ car $u_0 \notin K$. Il existe donc un prolongement $\tilde{\ell}$ de ℓ à F tel que $\tilde{\ell}(u) \leq p_K(u)$, $\forall u \in \mathcal{E}$. Ainsi, utilisant le Lemme 4.25 on a $\tilde{\ell}(u_0) = 1$ et $\tilde{\ell}(u) < 1$ sur K.□

Démonstration du Théorème de Hahn-Banach Géométrique :
Introduisons l'ensemble $K = \{u - v, \ u \in A, \ v \in B\}$. K est un ouvert convexe de $\mathcal{E}$ et $O \notin K$ car $A \cap B = \emptyset$. D'après le Lemme 4.26 il existe $f \in \mathcal{E}'$ telle que $f(u) < 0$, $\forall u \in K$ $(f(O) = 0)$. On en déduit alors que $f(u) < f(v)$, $\forall u \in A$, $\forall v \in B$. Choisissons alors $h \in [\sup_{u \in A} f(u), \inf_{v \in B} f(v)]$. Par construction l'hyperplan $\{f(x) = h\}$ sépare A et B au sens large. □

Corollaire 4.27 *On suppose que A et C sont deux convexes disjoints de $\mathcal{E}$ tels que A est fermé et C est compact. Alors il existe un hyperplan fermé séparant strictement A et B.*

Démonstration :
On introduit les familles d'ouverts convexes suivantes : $A_\varepsilon = A + B(O,\varepsilon)$ et $C_\varepsilon = C + B(O,\varepsilon)$. En raisonnant par l'absurde, utilisant la compacité de C, on montre que $A_\varepsilon \cap C_\varepsilon = \emptyset$ pour $0 < \varepsilon$ assez petit. D'après la forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan $\{f(x) = h\}$ séparant A_ε et B_ε. On a donc

$$f(u + \varepsilon w') \leq h \leq f(v + \varepsilon w), \ \forall u \in A, \forall v \in C, \forall w, w' \in B(O,1)$$

ce qui entraîne

$$f(u) + \varepsilon/2\|f\| \leq h \leq f(v) - \varepsilon/2\|f\|$$

Puisque $0 < \varepsilon/2\|f\|$, la séparation stricte est démontrée.□

Corollaire 4.28 *Toute partie convexe et fermée de $\mathcal{E}$ est égale à l'intersection des demi-espaces fermés la contenant.*

Démonstration :
Posons :

$$\mathrm{conv}(A) = \bigcap_{\substack{D \text{ demi-espace fermé} \\ A \subseteq D}} D$$

$\mathrm{conv}(A)$ est un convexe fermé comme intersection de convexes fermés. Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathrm{conv}(A)$, $u_0 \notin A$. D'après le Corollaire 4.27, il existe un hyperplan séparant strictement A et $\{u_0\}$. On obtient alors une contradiction.□

4.5 Topologie faible et convergence faible

Dans cette section $\mathcal{E}$ désigne un espace vectoriel normé réel. La topologie faible sur $\mathcal{E}$ est parfois appelée topologie $\sigma(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ et la topologie $\star$-faible sur $\mathcal{E}'$ par $\star - \sigma(\mathcal{E}',\mathcal{E})$. Il faut remarquer que si $\mathcal{E}$ n'est pas réflexif, la topologie faible-*star* sur $\mathcal{E}'$ est distincte de la topologie faible sur $\mathcal{E}'$ (voir exercices pour des exemples).

Proposition 4.29 *La topologie faible sur $\mathcal{E}$ est séparée.*

Démonstration :
Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{E}$, $u_1 \neq u_2$. D'après le théorème de Hahn-Banach géométrique il existe un hyperplan d'équation $\{f(x) = h\}$ séparant strictement u_1 et u_2 i.e on a $f(u_1) < h < (f(u_2)$. Posons $U_1 = \{x, f(x) < h\}$ et $U_2 = \{x, f((x) > h\}$. On a alors $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $u_i \in U_i$, $i = 1, 2.\Box$

Voici quelques propriétés concernant les limites pour la topologie faible

Proposition 4.30 *Soient $\{u_n\}$ une suite de $\mathcal{E}$, $u \in \mathcal{E}$.*
i) $\{u_n\}$ converge vers u faiblement si et seulement si $\forall f \in \mathcal{E}'$, $\{< f, u_n >\}$ converge vers $< f, u >$.
ii) Si $\{u_n\}$ converge vers u faiblement alors la suite $\{\|u_n\|\}$ est bornée et $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.
iii) Si $\{u_n\}$ converge vers u faiblement et si f_n converge fortement vers f dans $\mathcal{E}'$ alors $\{< f_n, u_n >\}$ converge vers $< f, u >$.

Exercice 39 *Démontrer la Proposition 4.30*

Théorème 4.31 *Soit C une partie de $\mathcal{E}$. Si C est faiblement fermée alors C est fortement fermée. Si C est fortement fermée et convexe alors C est faiblement fermée.*

Démonstration :
Supposons C faiblement fermée. Alors $\mathcal{E}\backslash C$ est faiblement ouvert. Si $u_0 \in \mathcal{E}\backslash C$ il existe $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{E}'$ telles que $\|f_j\| \leq 1$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que si $u \in \mathcal{E}$ vérifie $| < f_j, u_0 - u > | < \varepsilon$ pour tout $1 \leq j \leq N$ alors $u \in \mathcal{E}\backslash C$. Il en résulte que $B(u_0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{E}\backslash C$. C est donc fortement fermé.
Supposons maintenant C convexe et fortement fermée. D'après le Corollaire 4.28, C est une intersection de demi-espaces fermés donc faiblement fermés d'où C est faiblement fermé.$\Box$

Théorème 4.32 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach et T une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Alors T est continue pour les topologies fortes sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ si et seulement si T est continue pour les topologies faibles sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.*

Démonstration :
Supposons T continue pour les topologies fortes. Il suffit de vérifier la continuité pour la topologie faible en 0. C'est un exercice de topologie laissé au lecteur.
Supposons T continue pour les topologies faibles. Alors le graphe $G(T)$ de T est faiblement fermé dans $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Or $G(T)$ est convexe donc fortement fermé d'après le Théorème 4.31, T est donc continue pour les topologies fortes d'après le Théorème du graphe fermé. $\Box$

Le transposé d'une application linéaire se définit de manière analogue à l'adjoint dans le cas hilbertien, le produit scalaire étant remplacé par le crochet de dualité $<,>$.
Soit T une application linéaire, fortement continue, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. On a alors :

$$| < f, Tu > | \leq \|T\|\|u\|\|f\|$$

Définition 4.33 *On définit alors une unique application linéaire fortement continue $\tilde{T}$ de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{E}'$ par l'égalité suivante :*

$$< f, Tu >=< \tilde{T}f, u >, \ \ \forall f \in \mathcal{F}', u \in \mathcal{E}. \tag{4.95}$$

$\tilde{T}$ est appelée la transposée de T.

Proposition 4.34 *Avec les notations précédentes, on a*

$$\|T\| = \|\tilde{T}\|.$$

Démonstration :
Il résulte de l'égalité (4.95) que

$$| < \tilde{T}f, u > | \leq \|T\|\|u\|\|f\|$$

d'où $\|\tilde{T}f\| \leq \|T\|\|f\|$ et $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.
Pour l'autre inégalité on considère les biduaux et le double transposé de T. On constate que $\tilde{\tilde{T}}$ est un prolongement de T à $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}$ étant identifié à son image dans $\mathcal{E}''$ par l'isométrie J. On en déduit alors

$$\|T\| \leq \|\tilde{\tilde{T}}\| \leq \|\tilde{T}\|.$$

On a donc montré que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.□

Etudions maintenant les propriétés de la topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{E}'$.

Proposition 4.35 *La topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{E}'$ est séparée.*

La démonstration de la Proposition 4.35 est laissée en exercice.

Proposition 4.36 *Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{E}'$ continue pour la topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{E}'$. Il existe alors un unique $u \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(f) =< f, u >, \forall f \in \mathcal{E}'$.*

Pour démontrer cette proposition on va utiliser un lemme classique d'algèbre linéaire

Lemme 4.37 *Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_N$ des formes linéaires sur X. On suppose que*

$$\bigcap_{1\leq j\leq N} \ker \varphi_j \subseteq \ker \varphi_0$$

On a alors $\varphi_0 = \sum_{1\leq j\leq N} \lambda_j \varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Démonstration du Lemme :
Posons $F(u) = (\varphi_0(u), \varphi_1(u), \cdots, \varphi_N(u))$. F est une application linéaire de X dans $\mathbb{R}^{N+1}$, son image est fermée et par hypothèse, $a = (1, 0 \cdots, 0) \notin \mathrm{Im}(F)$. Il existe donc une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^{N+1}$ telle que $f(a) = 1$ et $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{Im}(F)$. Il suffit alors d'expliciter f sous la forme : $f(x) = \sum_{0\leq j\leq N} \mu_j x_j$.□

Démonstration de la Proposition :
Il existe un voisinage V de 0 pour la topologie $\star$-faible tel que $f \in V$ implique $|\varphi(f)| < 1$. Il en résulte que si $f \in \lambda V$ alors $|\varphi(f)| < \lambda$, $\forall \lambda > 0$. On peut choisir V de la forme

$$V = \{f \in \mathcal{E}', \ | < f, x_j > | \leq \varepsilon, \ 1 \leq j \leq N\}$$

où $x_1, \cdots, x_N \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. On en déduit que si $< f, x_j >= 0$ pour $j = 1, \cdots, N$ alors $\varphi(f) = 0$. On conclut alors à l'aide du Lemme.□

Nous allons maintenant étudier plus en détail la dualité les espaces vectoriels normés séparables.

Théorème 4.38 (Banach-Alaoglou-Bourbaki) *Supposons donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, séparable. On désigne par $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ la boule unité fermée de $\mathcal{E}'$. Alors $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ est un espace topologique métrisable et compact pour la topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{E}'$.*

Démonstration :
Montrons d'abord que, pour la topologie $\star$-faible, $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ est métrisable.
Soit $\{u_n\}_{n\geq 1}$ un suite fortement dense dans $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$. (dans un espace métrique séparable, tout sous espace est séparable). On définit sur $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ la distance

$$d(f, g) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} | < f - g, u_n > |.$$

Montrons que la topologie $\star$-faible coïncide sur $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ avec la topologie définie par la distance d.
Cette distance d étant invariante par translation il suffit de montrer que les deux topologies ont les mêmes voisinages de O. Posons $D_\varepsilon = \{f, \ d(f, O) < \varepsilon\}$. Soit N tel que $2^{-N} < \varepsilon/2$ et considérons l'ensemble $W_\varepsilon = \{f, \ | < f, u_j > | \leq \varepsilon/2, \ 1 \leq j \leq N\}$. On a alors $\hat{B}_{\mathcal{E}'} \cap W_\varepsilon \subseteq D_\varepsilon$.
Inversement considérons un voisinage du type $V_\delta = \{f, \ | < f, v_j > | \leq \delta, \ 1 \leq j \leq M\}$. On peut toujours supposer que $\|v_j\| \leq 1$, $1 \leq j \leq M\}$. Pour tout j il existe n_j tel que $\|v_j - u_{n_j}\| \leq \delta/2$. Posons alors $N = \max\{n_1, \cdots, n_M\}$ et $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$. On obtient ainsi $D_\varepsilon \subseteq \hat{B}_{\mathcal{E}'} \cap V_\delta$.
Il en résulte que les voisinages pour les deux topologies sont les mêmes.
Il résulte donc de ce qui précède que pour pour établir la compacité de $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$ on peut utiliser le critère de Bolzano-Weierstrass par les suites.
Soit $\{f_n\}$ une suite de $\hat{B}_{\mathcal{E}'}$. Nous allons montrer par le procédé diagonal, que l'on peut en extraire une sous-suite $\star$-faiblement convergente.
Pour tout $u \in \mathcal{E}$, $\{< f_n, u >\}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$, on peut donc en extraire une sous-suite convergente. On fait cette opération successivement pour $u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$.. On désigne par $\{f_{k+1,n}\}_{n\geq 1}$ la sous-suite extraite de $\{f_{k,n}\}_{n\geq 1}$ possédant les propriétés suivantes :
$\{< f_{1,n}, u_1 >\}_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ_1.
$\{< f_{2,n}, u_i >\}_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ_i, $i = 1, 2$.
$\{< f_{k,n}, u_i >\}_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ_i, $1 \leq i \leq k$.
Posons $g_n = f_{n,n}$. Alors $\{< g_n, u_i >\}_{n\geq 1}$ converge vers ℓ_i pour tout $i \geq 1$ et par densité on en déduit que $\{< g_n, u >\}_{n\geq 1}$ converge pour tout $u \in \mathcal{E}$.
Posons alors $f(u) = \lim_{n\to+\infty} < g_n, u >$. f est linéaire et il résulte du théorème de Banach-Steinhaus que f est continue sur $\mathcal{E}$.□

Corollaire 4.39 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*

i) La boule unité fermée de $\mathcal{H}$ est faiblement compacte.
ii) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors T est un opérateur compact si et seulement si T transforme les suites faiblement convergentes de $\mathcal{H}$ en suites fortement convergentes de $\mathcal{H}$.

Démonstration :
i) résulte du fait qu'il existe une application isométrique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ donnée par le théorème de Riesz.
Supposons d'abord T compact. On sait que T est limite, en norme, d'opérateurs de rang finis. Par approximation il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de rang fini. On a alors $Tu = \sum_{1\leq j\leq N} s_j\langle u, \varphi_j\rangle\psi_j$.
On obtient facilement alors que T transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes.
Inversement supposons que T transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée de $\mathcal{H}$. D'après la propriété i), il existe une sous-suite $\{u_{n_j}\}$ faiblement convergente. Or par hypothèse $\{T(u_{n_j})\}$ est fortement convergente. T est donc compact.□

4.6 Une introduction aux distributions

Nous allons exposer les premiers rudiments de cette théorie dans des cas particuliers, pour en donner une première idée comme application des notions d'analyse fonctionnelle étudiées dans ce cours. Cette théorie sera approfondie dans l'option du deuxième semestre Equations aux Dérivées Partielles.
La théorie générale est due au mathématicien français Laurent Schwartz (1915-2002). Les idées essentielles reposent sur la dualité dans les espaces vectoriels munis de topologies adéquates. La motivation est d'obtenir un cadre mathématique pour généraliser la notion de dérivée aux fonctions non dérivables. C'est un outil très utile pour résoudre des équations aux dérivées partielles. On peut comparer celà à l'invention des nombres complexes pour résoudre des équations polynômiales. Avant L. Schwartz, le mathématicien Russe S.L.Sobolev et le français (nantais!) Jean Leray avaient déjà, dans les années 1930, introduit la notion de dérivée faible d'un fonction telle qu'elle sera expliquée plus loin.

On a introduit dans le chapitre 3 les espaces de Sobolev périodiques $H^k_\sharp$. On va introduire des espaces plus généraux, en restant à une variable pour simplifier.

Soit I un intervalle ouvert de l'axe réel $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$. Introduisons l'espace noté $\mathcal{D}(I)$ des fonctions φ indéfiniment dérivables sur I et à support compact dans I. Pour motiver ce qui suit, rappelons la formule d'intégration par parties, pour $u \in C^1(I)$ (fonction de classe C^1 sur I),

$$\int_I u'(x)\varphi(x)dx = -\int_I u(x)\varphi'(x)dx,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(I). \tag{4.96}$$

Définition 4.40 *On dit que $u \in W^{1,p}(I)$ si $u \in L^p(I)$ et s'il existe $v \in L^p(I)$ telle que*

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I v(x)\varphi'(x)dx,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(I). \tag{4.97}$$

Remarque 4.41 *On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $L^p(I)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Il en résulte que l'élément v introduit dans la Définition 4.40 est unique. Par conséquent, on a $C^1_0(I) \subseteq W^{1,p}(I)$ où $C^1_0(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I, à support compact dans I.*

Définition 4.42 *Si $u \in W^{1,p}(I)$ on note $v = u' = \frac{du}{dx}$ l'unique élément vérifiant (4.97). v' s'appelle la dérivée faible de u ou encore dérivée de u au sens des distributions.*
Plus généralement, on dit que u admet une dérivée faible d'ordre j, j entier ≥ 1, s'il existe $v_j \in L^p(I)$, telle que

$$\int_I u(x)\varphi^{(j)}(x)dx = (-1)^{-j}\int_I v_j(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(I). \tag{4.98}$$

On pose, par abus de notation, $v_j = u^{(j)} = \frac{d^j u}{dx^j}$. On définit alors les espaces $W^{m,p}(I)$ pour $m \geq 1$, m entier, comme l'espace des fonctions $u \in L^p(I)$ telles que u admet des dérivées faibles dans L^p d'ordre k, pour tout $k \leq m$.

Proposition 4.43 *$W^{m,p}(I)$ est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq j\leq m} \|u^{(j)}\|_p^p\right)^{1/p}$$

Pour $p = 2$, $W^{m,2}(I)$ est un espace de Hilbert noté encore $H^2(I)$.
Si $p < +\infty$ $W^{m,p}(I)$ est séparable.

Démonstration :
Pour simplifier, considérons le cas $m = 1$. Par l'application $u \mapsto (u, u')$ on montre que $W^{1,p}(I)$ s'identifie à un sous- espace fermé de $L^p(I) \times L^p(I)$. Les propriétés en résultent. En particulier si $p < +\infty$, $L^p(I)$ est séparable, tout produit fini d'espaces séparables étant séparable et tout sous espace fermé d'un espace séparable étant séparable, on en déduit que $W^{m,p}(I)$ est séparable. □

Proposition 4.44 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, et tout réel $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R})$.*
L'application $u \mapsto u'$ est l'unique prolongement par continuité à $W^{1,p}(\mathbb{R})$ de la dérivée usuelle définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration :
On utilise le procédé de régularisation par une famille régularisante R_ε (voir Annexe, Proposition 5.2). Soit $u \in W^{m,p}$. On sait alors que $R_\varepsilon \star u$ tend vers u dans $L^p(\mathbb{R})$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, $R_\varepsilon \star (u^{(j)}) = (R_\varepsilon \star u)^{(j)}$. D'où $R_\varepsilon \star u$ converge vers u dans $W^{m,p}(\mathbb{R})$.□

La notion de dérivée faible n'est pas toujours suffisante. On peut essayer d'étendre cette notion en utilisant la dualité dans les espaces de Hilbert $H^m(\mathbb{R})$. Notons par $H^{-m}(\mathbb{R})$ le dual de $H^m(\mathbb{R})$, en faisant les identifications du Chapitre 3, section 4. Désignons par ∂ l'opération de dérivation d'ordre 1. On a vu que $\partial \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ donc par transposition $\tilde{\partial} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), H^{-1}(\mathbb{R}))$. On peut alors prolonger naturellement ∂ par continuité à $L^2(\mathbb{R})$ (on pourra donc dériver toute fonction de carré intégrable !).
Rappelons que $\tilde{\partial}$ désigne la transposée de ∂. On a donc l'égalité

$$< \tilde{\partial} u, v >=< u, \partial v >, \ \forall u \in L^2(\mathbb{R}), \forall v \in H^1(\mathbb{R}) \tag{4.99}$$

Or par densité et continuité on a

$$< u, \partial v >= - < \partial u, v >, \ \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}) \tag{4.100}$$

Comparant (4.99) et (4.100) on en déduit que $-\tilde{\partial}$ et l'unique prolongement par continuité de la dérivation ∂ à $L^2(\mathbb{R})$ (noter que $H^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$). On a donc justifié l'abus de notation $\partial = -\tilde{\partial}$ et alors $\partial \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Voici, dans le cas particulier d'un intervalle, le point de départ de la théorie des distributions crée par L. Schwartz. On aimerait pouvoir dériver toute fonction continue ou même seulement localement intégrable en prolongeant par continuité, pour des topologies adaptées, la dérivation usuelle. Pour cela on considère sur $\mathcal{D}(I)$ les semi-normes, pour J sous intervalle borné de I et $k \in \mathbb{N}$,

$$p_{J,k}(\varphi) = \sup\{|\varphi^{(j)}(x)|, \ x \in J, \ 0 \leq j \leq k\}$$

Définition 4.45 *On dit que u est une distribution sur I si :*
i) u est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I)$.
ii) Pour tout sous-intervalle borné et fermé J de I il existe une semi-norme $p_{J,k}$ et $C > 0$ tels que

$$|u(\varphi)| \leq C p_{J,k}(\varphi), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \ \mathrm{supp}\varphi \subseteq J \tag{4.101}$$

On désigne par $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I.

Proposition 4.46 *On a les propriétés suivantes :*
i) $\mathcal{D}'(I)$ est un espace vectoriel.
ii) $L^1_{loc}(I) \subseteq \mathcal{D}'(I)$, via l'injection $f \mapsto u_f$ définie par $u_f(\varphi) = \int_I f(x)\varphi(x)dx$.

Démonstration :
i) est un exercice facile. ii) résulte de la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $L^1(I)$.□

Proposition 4.47 *Pour toute $u \in \mathcal{D}'(I)$ l'application $\varphi \mapsto - < u, \varphi' >$ définit une distribution sur I, appelée dérivée de u au sens des distributions, notée u'. On a donc $< u', \varphi >= - < u, \varphi' >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$.*

Démonstration :
La linéarité est évidente ainsi que l'inégalité (4.101).□

Définition 4.48 (convergence des suites de distributions) *Soit $\{u_j\}$ une suite de distributions sur l'intervalle I. On dit que u_j converge vers la distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ on a*

$$\lim_{j \to +\infty} < u_j, \varphi >=< u, \varphi > . \tag{4.102}$$

On dira donc qu'une suite $\{u_j\}$ de fonctions localement intégrables converge vers $u \in \mathcal{D}'(I)$ au sens des distributions *si*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_I u_j(x)\varphi(x)dx =< u, \varphi > . \tag{4.103}$$

Voici un exemple fondamental de convergence au sens des distributions (voir détails en exercice). Soit $f_n(x) = 2n$ si $x \in [-1/n, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $|x| > 1/n$. Alors $\{f_n\}$ converge, au sens des distributions, vers la distribution de Dirac δ_0 définie par $\varphi \mapsto \varphi(0)$. Cela justifie la définition intuitive suivante de la distribution de Dirac : "δ_0 est un fonction valant $+\infty$ en 0, nulle en dehors de 0 et d'intégrale égale à 1". Avant l'invention des distributions cette définition n'avait pas de sens mathématique maintenant on sait comment l'interpréter. Le lecteur est invité à y réfléchir et à faire un dessin.

Les méthodes de dualité permettent d'étendre la tranformation de Fourier à des espaces de distributions.

Pour simplifier nous choisissons ici une approche hilbertienne. (voir le cours EDP et distributions pour le cas général). Nous utiliserons les propriétés de la transformation de Fourier, notée $\mathcal{F}$, figurant dans l'appendice d'intégration.

$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même (Théorème de Plancherel). Utilisant les formules reliant dérivation et transformation de Fourier, on montrera en exercice que $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue (et bijective) de l'espace $L^{2,m}(\mathbb{R})$ dans $H^m(\mathbb{R})$ où $L^{2,s}(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, est l'espace des fonctions de carré intégrables pour la mesure $(1+x^2)^s dx$. D'autre part on montrera également que le dual topologique de $L^{2,s}(\mathbb{R})$ s'identifie, à $L^{2,-s}(\mathbb{R})$, $\forall s \in \mathbb{R}$ (exercice). Or on sait que la transformation de Fourier est égale à sa transposée, ce qui se traduit dans la formule

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)(\mathcal{F}v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)(\mathcal{F}u)(x)dx, \tag{4.104}$$

en supposant que $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ On en déduit alors que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une application linéaire et continue de $H^{-m}(\mathbb{R})$ dans $L^{2,-m}(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $H^{-m}(\mathbb{R})$. On peut naturellemnt échanger les rôles de $H^{-m}(\mathbb{R})$ et $L^{2,-m}(\mathbb{R})$. Par conséquent on a démontré le résultat suivant.

Proposition 4.49 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la transformation de Fourier se prolonge par continuité en une unique application linéaire, bijective et bicontinue de $H^{-m}(\mathbb{R})$ dans $L^{2,-m}(\mathbb{R})$ et de $L^{2,-m}(\mathbb{R})$ dans $H^{-m}(\mathbb{R})$.*

td4

Exercice 40 *On utilise les notations du cours (4.81).*
Montrer que (S, d) *est un espace métrique complet.*
Soit $\{x^{(n)}\}$ *une suite de* S *et* $d \in S$*. Que signifie "*$x^{(n)}$ *converge vers* x*" pour la distance* d *?*
(noter que pour tout n*,* $x^{(n)}$ *est une suite* $\{x^{(n)}{}_k\}$ *de réels.*
Montrer que la topologie définie par d *sur* S *admet pour base de voisinages de 0 les ensembles :*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x,\ p_n(x) < \varepsilon,\ \forall n \in J\}$$

où J *parcourt l'ensemble des parties finies de* $\mathbb{N}$ *et* $\varepsilon > 0$*.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 41 *Vérifier que l'espace* S *de l'exercice 40 est un espace de Fréchet.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 42 *Vérifier que l'espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *(voir Appendice Intégration) est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes :*

$$p_n(f) = \sup_{k,\ell \le n,\ x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{d^\ell f}{dx^\ell}(x) \right|,\ n \in \mathbb{N}.$$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 43 *Comparer entre-elles les trois topologies définies sur l'espace des applications linéaires continues.*
Quand deux d'entre elles sont elles équivalentes ? Illustrer par des exemples et des contre-exemples.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 44 *Soit* $\{u_n\}$ *une suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Montrer que* $\{u_n\}$ *est fortement bornée, c'est à dire qu'il existe* $C > 0$ *telle que* $\|u_n\| \le C,\ \forall n \ge 1$*.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 45 *On considère le développement en série de Fourier des fonctions continues et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*. On note par* $c_n(f)$ *les coefficients de Fourier de* f *et on rappelle que*

$$P_N f(x) = \sum_{|n| \le N} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t) dt$$

où

$$D_N(u) = \frac{\sin((N + 1/2)u)}{\sin(u/2)}$$

On rappelle que $C_\sharp$ *est un espace de Banach pour la norme* $\| \bullet \|_\infty$*.*
On pose $L_N f = P_N f(0)$*.*
(i) Montrer que si f *est de plus de classe* C^1 *alors la suite* $L_N f$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$*.*
On se propose de montrer qu'il existe une suite $\{U_n\}$ *d'ouverts dense de* $C_\sharp$ *telle que*

$$\sup_{n \ge 1} |L_N f| = +\infty,\quad \forall f \in \bigcap_{n \ge 1} U_n \tag{4.105}$$

(ii) Montrer que $\|L_N\| = \|D_N\|_1$ *où*

$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)| du$$

(iii) Déduire de ce qui précède que $\lim_{n \to +\infty} \|L_N\| = +\infty$ *puis la conclusion (4.105).*
(iv) déduire de ce qui précède qu'il existe une partie dense $\triangle$ *de* $C_\sharp$ *telle que pour tout* $f \in \triangle$ *la série de Fourier* $P_N f(x)$ *diverge pour tout* $x \in \mathbb{Q}$*.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 46 *i) Montrer que les espaces de Hilbert sont réflexifs.*
Montrer que pour tout $p \in]1, +\infty[$*, le dual (topologique) de* ℓ_p *s'identifie à* ℓ_q *où* q *est défini par* $1/p + 1/q = 1$*. En d/'eduire que les espaces* ℓ_p *sont réflexifs pour tout* $p \in]1, +\infty[$*.*
ii) Montrer que les espaces ℓ_p *sont sépararables pour* $p \in [1, +\infty[$ *et que* ℓ_∞ *n'est pas séparable.*
Indication : pour ℓ_∞ *raisonner par l'absurde.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 47 *Pour $p \in [1, +\infty]$, on considère les espaces de suites ℓ_p des suites réelles $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ munis de leurs normes d'espaces de Banach ainsi que l'espace c_0 des suites convergeant vers 0.*
Montrer que ${c_0}' = \ell_1$ et ${\ell_1}' = \ell_\infty$.
En déduire que sur ℓ_1 la topologie faible-$\star$ est distincte de la topologie faible. Illustrer cela sur des suites d'éléments de ℓ_1

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 48 *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue notée λ. i) Montrer que l'espace $L^1(I)$ est séparable.*
ii) Montrer que le dual topologique de $L^1(I)$ est l'espace $L^\infty(I)$. On rappelle que $u \in L^\infty(I)$ si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que $\lambda\{x \in I,\ |f(x| \geq M\} = 0$ et on pose $\|f\|_\infty = \inf\{M,\ \lambda\{x \in I,\ |f(x| \geq M\} = 0\}$. En déduire que si f_n est une suite de fonctions mesurables telle que $\|f_n\| \leq M$, $\forall n \geq 1$ alors il existe $f \in L^\infty(I)$ et une sous-suite f_{n_j} telle, $\forall u \in L^1(I)$, on a que

$$\lim_{j\to+\infty} \int_I f_{n_j}(t)u(t)dt = \int_I f(t)u(t)dt$$

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 49 *Soit un réel $p \in]1, +\infty[$ et q son conjugué défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On considère les espaces de Banach $L^p(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Le but de l'exercice est d'étudier les propriétés de dualité de ces espaces.*
i) Rappeler l'inégalité de Hölder.
Soit $g \in L^q(I)$. On pose $\lambda_g(f) = \int_I f(x)g(x)dx$.
ii) Montrer que λ_g définit une forme linéaire continue sur $L^p(I)$ de norme $\|\lambda_g\| = \|g\|_q$. En déduire que $g \mapsto \lambda_g$ est une isométrie linéaire de L^q dans $(L^p)'$ et que cette application est surjective si $p = 2$.
iii) On suppose que I est borné et que $p \in]1, 2]$. Montrer que si $\ell \in (L^p)'$ alors il existe g_ℓ, unique, tel que $\ell = \lambda_{g_\ell}$ i.e λ est surjective.
Indication : utiliser le résultat précédent pour $p = 2$ (c'est vrai pour $p > 2$ mais la preuve est plus difficile).

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 50 *Donner les détails de la preuve de la Proposition 4.43.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 51 *Montrer que $x \mapsto |x|$ est dans $W^{1,2}(]-1,1[)$ et calculer sa dérivée faible.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 52 *Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définit une application bijective et bicontinue de $L^{2,m}(\mathbb{R})$ dans $H^m(\mathbb{R})$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 53 *Montrer que le dual topologique de $L^{2,s}(\mathbb{R})$ s'identifie, à $L^{2,-s}(\mathbb{R})$, $\forall s \in \mathbb{R}$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 54 *Calculer $\partial \mathbb{1}_{[0,1]}$.*
Montrer que $\partial \mathbb{1}_{[0,1]} \notin L^2(\mathbb{R})$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 55 *Démontrer la formule (4.104 et montrer qu'elle se prolonge à $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 56 *Montrer que $\varphi \mapsto \varphi(a)$ ($a \in I$) est une distribution, appelée distribution de Dirac en a, notée δ_a.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 57 *On considère la fonction de Heaviside définie par $Y(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $Y(x) = 0$ si $x < 0$. Calculer ∂Y et $\partial^2 Y$.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 58 *Soit $f_n = 2n$ si $x \in [-1/n, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $|x| > 1/n$. Montrer que $\{f_n\}$ converge, au sens des distributions, vers la distribution de Dirac δ_0. Interprétation graphique ?*
Montrer que δ ne peut pas être identifiée à une fonction localement intégrable.
Indication *: Supposer qu'il existe $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $\int u(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et aboutir à une contradiction.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 59 *i) Montrer que* $\delta_a \in H^{-1}(\mathbb{R})$ *et calculer* δ_0'.
ii) Calculer la transformée de Fourier de δ_a.
iii) Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :
$u(x) = 1,\ \ u(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.
Quelle remarque peut-on-faire ?

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 60 *a) Rappeler la définition d'un espace de Fréchet.*
Soient E *un espace de Fréchet et* T *une application linéaire continue de* E *dans lui-même. Soit* K *une partie convexe et compacte (non vide) de* E. *On suppose que* $T(K) \subseteq K$. *On cherche à montrer que* T *a un point fixe dans* K. *Pour cela on part d'un point* $x_0 \in K$ *et on forme les moyennes, pour* $n \geq 0$,

$$y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq j \leq n} T^j x_0.$$

b) Montrer que $y_n \in K$ *pour tout* $n \geq 0$ *et qu'il existe une suite strictement croissante* n_k *d'entiers et* $u \in K$, *tels que* $\lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = u$.
c) Montrer que $y_{n_k} - T(y_{n_k})$ *tend vers 0 lorsque que* k *tend vers l'infini et en déduire que* $Tu = u$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 61 *On considère l'espace de Banach* E *des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle* $[0,1]$. *Les éléments du dual topologique* E' *sont appelés mesures de Radon. Soit* $\mu \in E'$. *Si* $\mu(f) \geq 0$ *pour tout* $f \in E$, $f \geq 0$, *on dit que* μ *est une mesure de Radon positive et si de plus* $\mu(1) = 1$ *on dit que* μ *est une probabilité de Radon sur* $[0,1]$. *On désigne par* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des probabilités de Radon.*
a) Montrer que si μ *est une forme linéaire sur* E, *positive (* $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$*) telle* $\mu(1) = 1$ *alors* μ *est une probabilité de Radon.*
b) Montrer que la mesure de Lebesgue définit une probabilité de Radon sur $[0,1]$ *et que pour tout* $a \in [0,1]$, *l'égalité* $\delta_a(f) = f(a)$ *définit une probabilité de Radon sur* $[0,1]$ *(appelée masse de Dirac en* a*).*
On considère sur E' *la topologie faible-*$\star$ *dont on rappellera la définition.*
On note $\mathcal{M}_1 = \{\mu \in E', \|\mu\| \leq 1\}$.
c) Montrer que E' *est un espace de Fréchet. (on pourra remarquer que* E *est séparable, pourquoi ?)*
d) Montrer que $\mathcal{P}$ *est une partie convexe compacte de* E'.
Soit T *un homéomorphisme de* $[0,1]$ *sur lui même. On définit* $T(\mu)(f) = \mu(f \circ T)$ *pour tout* $\mu \in E'$ *et* $f \in E$. *Montrer, en utilisant le résultat de l'exercice précédent, qu'il existe* μ, *probabilité de Radon sur* $[0,1]$ *telle que* $T(\mu) = \mu$.

indications♠ ;Corrigé♣

Indications 37 *Revoir la définition d'une base de voisinages.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 38 *Suivre la démarche habituel pour montrer qu'un espace métrique est complet.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 39 *Imiter l'exercice précédent.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 40 *préciser les topologies en question et les notions de convergence qui vont avec.*
étudier les convergence faible et forte de la suite $u_n(x) = \mathrm{e}^{inx}u(x)$, $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 41 *Banach-Steinhaus*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 42 *(ii) On commencera par montrer que* $\|L_N\| \leq \|D_N\|_1$. *Pour l'autre inégalité on pourra utiliser une suite* f_j *de* $C_\sharp$ *telle que* $-1 \leq f_j \leq 1$, $\lim_{j\to+\infty} f_j(t) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ *où* g *est la fonction définie par* $g(t) = 1$ *si* $D_N(t) \geq 0$ *et* $g(t) = -1$ *si* $D_N(t) < 0$.
(iii) étudier le comportement de $\|D_N\|_1$ *lorsque* N *tend vers l'infini (minorer) puis penser au théorme de Banach-Steinhauss.*
(iv) Penser au théorme de Baire.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 43 *i) revoir le théorme de de dualité de Riezs.*
ii) considérer l'application $J_u(v) = \sum_{n\geq 1} u_n v_n$ *pour* $u \in \ell_q$ *et* $v \in \ell_p$ *et utiliser l'inégalité de Hölder (revoir td1). Pour* ℓ_∞ *on raisonnera par l'absurde.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 44 *On procédera comme dans l'exercice précédent. Supposer que les topologies faible et* $\star$*-faible coïncident.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 45 *i) utiliser les fonctions en escalier et les nombres rationnels ou encore le théorme de Stone-Wierstrass*
ii) utiliser, comme intermédiaire le théorème de dualité de Riesz.

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 46 *revoir le cas discret (50)*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 47 *revoir la proposition (4.43)*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 48 *intégrer par parties contre une fonction test.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 49 *revoir les propriétés de la transformation de Fourier : formule de Plancherel et relations entre dérivation et multiplication par des monomes.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 50 *ise ramener à* $s = 0$ *par un changement de fonction.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 51 *intégrer par parties contre une fonction test.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 52 *utiliser le théorème de Fubini puis prolonger par continuité.*

Exercice : ♠ ;Corrigé : ♣

Indications 53 *Définition d'une distribution.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 54 *intégrer par parties.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 55 *Appliquer la formule de Taylor en 0 à la fonction test.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 56 *définition par dualité de la transformation de Fourier des distributions.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 57 *relire le texte.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Correction 37 *$\{x^{(n)}\}_{n\geq 1}$ converge vers x signifie que, pour tout k (indice de coordonnée) $x_k^{(n)}$ converge vers x_k.*
Les semi-normes p_k étant continues, $V_{J,\varepsilon}$ est un ouvert contenant x donc un voisinage de x. Si J, J' sont finis et $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ alors on a

$$V_{J'',\varepsilon''} \subseteq V_{J,\varepsilon} \cup V_{J',\varepsilon'}$$

avec $J'' = J \cup J'$ et $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. On a donc bien une base de voisinage.
Soit $B(\delta)$ la boule ouvert de centre 0 et rayon $\delta > 0$ pour d. On peut trouver K assez grand et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $V(\{1, \cdots, K\}, \varepsilon) \subseteq B(\delta)$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 38 *Soit $\{x^{(n)}\}_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de S. Posons $x^{(n)} = \{x^{(n)}{}_k\}_{k\geq 1}$. Pour chaque k, $\{x_k^{(n)}\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc convergente. Posons $x_k = \lim_{n\to+\infty} x^{(n)_k}$ et $x = \{x_k\}_{k\geq 1}$. Pour conclure on montre alors facilement que $\lim_{n\to+\infty} d(x, x^{(n)}) = 0$.*
$\{x^{(n)}\}_{n\geq 1}$ converge vers x signifie que, pour tout k (indice de coordonnée) $x_k^{(n)}$ converge vers x_k.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 39 *On imite la preuve de l'exercice précédent en introduisant la distance*

$$d(f, g) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \frac{p_k(f-g)}{1 + p_k(f-g)},\ f, g \in \mathcal{S}.$$

Comme dans l'exercice précédent on montre que la topologie engendrée par la famille de semi-normes $p_n(f)$ coïncide avec la topologie définie par la distance d et que pour d l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est complet.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 40 *Désignons respectivement par $\mathcal{T}_u$, $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_f$, les topologies de la norme, forte, faible, sur l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ (espaces de Hilbert). Alors $\mathcal{T}_u$ est plus fine que plus $\mathcal{T}_s$ qui est plus fine que $\mathcal{T}_f$. En particulier on vérifie facilement que la convergence en norme implique la convergence forte et la convergence forte implique la convergence faible.*
Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont de dimension finie, les 3 topologies coïncident. On voit cela facilement en fixant des bases de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.
Supposons H de dimension infinie et $\mathcal{K} = \mathbb{C}$. Soit $\{e_n\}$ un système orthonormé de H. Alors la suite $T_n u = \langle e_n, u\rangle$ converge fortement vers 0 mais ne converge pas en norme.
Considérons dans $L^2(\mathbb{R})$ la suite $u_n(x) = \mathrm{e}^{inx}u(x)$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2 = 1$, , $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, cette suite converge faiblement vers 0. On a en effet

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{inx} u(x)v(x)dx = 0$$

pour tout $v \in L^2(\mathbb{R})$ (noter que $uv \in L^1(\mathbb{R})$).
Cette suite ne converge pas fortement (et n'a aucune sous-suite fortement convergente) car si c'était le cas, la limite forte ne peut être que 0, or tous les termes de la suite étant de norme 1, cela n'est pas possible.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 41 *Pour tout $v \in \mathcal{H}$ la suite $\langle x_n; v\rangle$ converge. en paticulier $\sup_{n\geq 1} |\langle x_n; v\rangle| < +\infty$. Le théorème de Banach-Steinhauss appliqué à la famille de formes linéaires $v \mapsto \langle x_n; v\rangle$ entraine alors que $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty$.*□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 42 *(i) La convergence ponctuelle résulte du théorème de Jordan-Dirichlet.*
f étant de classe C^1 on sait alors que la convergence est uniforme (revoir le cours de licence ou refaire la démonstration).
(ii) On a facilement l'inégalité $|L_N(f)| \leq \|f\|_\infty \|D_N\|_1$ d'où $\|L_N\| \leq \|D_N\|_1$.
Soit g la fonction définie dans l'indication et $-1 \leq f_j \leq 1$, $\lim_{j\to+\infty} f_j(t) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Il résulte du théorème de convergence dominée que l'on a

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(t) D_N(t) dt = 2\pi \|D_N\|_1.$$

Il en résulte que $\lim_{j\to+\infty} L_N f_j = \|D_N\|_1$. Or on a $|L_N f_j| \leq \|L_N\|$ car $\|f_j\|_\infty \leq 1$. D'où il résulte que $Vert_\infty \|D_N\|_1 \leq \|L_N\|$.

(iii) On utilise l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin)(N+1/2)t)|}{t}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{N+1/2} \frac{|\sin(u)|}{u}du \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin(u)| \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} \qquad (4.106)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{N\to+\infty}\|D_N\|_1 = \infty$. Par conséquent $\sup_N \|L_N\| = \infty$ et le théorème de Banach-Steinhauss implique (4.105).
(iv) Le raisonnement précédent d'applique à $L_n^r f = P_N f(r)$ pour tout réel r. En particulier pour tout $r \in \mathbb{Q}$ il existe une suite d'ouverts denses $U^(r)_n$ telle que $P_N f(r)$ diverge pour tout $f \in \cap_n U^(r)_n$. Il résulte du théorème de Baire que $\triangle := \bigcap_{n,r\in\mathbb{Q}} U^(r)_n$ est une partie dense de $C_\sharp$. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 43 *i) Montrons que l'application canonique $J_u(f) = f(u)$ est surjective ($u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}'$). Soit $F \in \mathcal{H}''$. Appliquons le théorème de Riesz. $F(f) = \langle v, f\rangle_{\mathcal{H}'}$, avec $v \in \mathcal{H}'$. Une autre application du théorème de Riesz donne $\langle v, f\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle u, w_f\rangle_{\mathcal{H}}$, avec $u \in \mathcal{H}$ et $f \mapsto w_f$ désignant l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}$. On a ainsi montré qu'il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que $F(f) = f(u)$ $\forall f \in \mathcal{H}'$.*
ii) En utilisant l'inégalité de Hölder (cf td1), on montre sans difficulté que l'application $u \mapsto J_u$ définie par

$$J_u(v)\sum_{n\geq 1} u_n v_n$$

est une isométrie de ℓ_q dans ${\ell_p}'$. Montrons que cette application est surjective. Soit alors $f \in {\ell_p}'$. Désignons par e_n la suite définie par $e_{n,m} = \delta_{n,m}$. Posons $u_n = f(e_n)$. Nous allons montrer que la suite $u = \{u_n\}$ est dans ℓ_q et que $f = J_u$.
On a, $\forall v \in \ell_p$,

$$|\sum_{1\leq n\leq N} u_n v_n| = |f(\sum_{1\leq n\leq N} e_n v_n)| \leq \|f\|\|v\|_p.$$

On a donc d'après td1, exercice 1, $\|u\|_q \leq \|f\|$.
On a clairement, par continuité, $f(v) = J_u(v)$, $\forall v \in \ell_p$.
iii) Avec les notations précédentes, on montre facilement que la famille $\{e_n\}$ est totale dans ℓ_p, pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Supposons ℓ_∞ séparable. Soit $\{u_n\}$ une suite dense dans $\ell_i nfty$. définissons alors la suite v de terme général v_n en posant $v_n = u_{n,n} + 1$ si $|u_{n,n}| \leq 1$ et $v_n = 0$ sinon. On alors clairement $v \in \ell_\infty$ et $\|v - u_n\|_\infty \geq 1$, $\forall n \geq 1$. On a donc obtenu une contradiction.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 44 *Pour les dualités nous renvoyons à l'exercice précédent puisque l'on raisonne de la même manière.*
Comparons les topologie $\star$-faible et faible sur ℓ_1. Supposons que ces topologies coïdent. Soit $f \in {\ell_1}'$. On sait que f s'identifie à un élément de ℓ_∞, encore noté f. mais alors f serait $\star$-faiblement continue et d'aprés le cours f s'identifierait à un élément de c_0. On en déduirait alors que $c_0 = \ell_\infty$ et donc une contradiction. Par conséquent sur ℓ_1 les topologies faible et $\star$-faible sont distinctes.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 45 *i) on peut supposer I fermé. On sait que l'ensemble des fonctions en escalier sur I est dense dans $L^1(I)$. On montre alors facilement que l'ensemble des fonctions en escalier définies par des subdivisions rationnelles et prenant des valeurs rationnelles est une partie dénombrable et dense dans $L^1(I)$.*
ii) Pour $f \in L^1(I)$ et $h \in L^{infty}(I)$ on pose $J_h(f) = \int_I f(x)h(x)dx$. On a $|J_h(f)| \leq \|f\|_1\|h\|_\infty$.
Soit $I_\varepsilon = \{x \in I,\ \|h\|_\infty \geq |h(x)| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon$. Posons alors

$$f(x) = sgn(g(x))\frac{1_{I_\varepsilon}(x)}{\lambda(I_\varepsilon)}$$

On a alors

$$\int_I h(x)f(x)dx \geq \|h\|_\infty - \varepsilon$$

D'où l'on déduit que J_h est une forme linéaire continue sur $L^1(I)$ de norme $\|J_h\| = \|h\|_\infty$.
Montrons maintenant que $h \mapsto J_h$ est surjective de $L^\infty(I)$ sur $(L^1(I))'$. Soit $\varphi \in (L^1(I))'$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on voit que

$\varphi \in (L^2(I))'$ et alors d'après le théorème de Riesz, il existe $h \in (L^2(I))'$ tel que $\varphi(f) = \int_I f(x)h(x)dx$, $\forall f \in L^2(I)$. Or il existe $C > 0$ telle que $\forall f \in L^2(I)$ on a

$$|\varphi(f)| = |\int_I f(x)h(x)dx| \leq C\|f\|_1$$

On va en déduire que $h \in L^\infty(I)$. Soit $K_M = \{x \in I,\ |h(x)| \geq M\}$. Supposons $\lambda(K_M) > 0$. On définit alors $f(x) = sgn(h(x))\frac{1_{K_M}}{\lambda(K_M)}$. On a

$$M \leq \int_I |h(x)|\frac{1_{K_M}(x)}{\lambda(K_M)} \leq C$$

On trouve alors que $M \leq C$ et il en résulte que $\|h\|_\infty \leq C$.
La boule unité de $L^\infty(I)$ étant compact pour la topologie $\star$-faible on en déduit qu' il existe $f \in L^\infty(I)$ et une sous-suite f_{n_j} telle que, $\forall u \in L^1(I)$,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_I f_{n_j}(t)u(t)dt = \int_I f(t)u(t)dt$$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 46 *revoir le corrigé (43) que l'on adapte ici sans difficulté.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 47 *sans difficulté.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 48 *. Tout d'abord si $f(x) = |x|$ alors $f \in L^2]-1,1[$.*
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. On a

$$\begin{aligned}
\int |x|\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)dx + \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^0 \varphi(x) + \varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)dx - \varphi(0) \\
&= \int_{-1}^0 \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(x)dx \qquad (4.107)
\end{aligned}$$

Par conséquent la dérivée faible ∂f de f est définie par $\partial f(x) = -1$ si $x < 0$ et $\partial f(x) = 1$ si $x > 0$. En particulier $\partial f \in L^2(]-1,1[)$ et donc $f \in W^{1,2}(]-1,1[)$. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 49 *. On utilise le propriétés standards de la transformation de Fourier (voir Annexe Intégration).*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 50 *. Posons $\Pi_s f(x) = (1+x^2)^{s/2}f(x)$. Par définition, Π_s est une isométrie de $L^{2,s}(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. On vérifie immédiatement que $(\Pi_s)^{-1} = \Pi_{-s}$.*
$L^{2,s}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (car, par exemple, $L^{2,s}(\mathbb{R})$ contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).
Soit $f \in L^{2,-s}(\mathbb{R})$ et $J_f(u) = \int_\mathbb{R} \bar{f}(x)u(x)dx$. On a encore

$$J_f(u) = \int_\mathbb{R} \overline{(\Pi_{-s}f)(x)}(\Pi_s u)(x)dx$$

Il en résulte que J_f définit une forme linéaire continue sur $L^{2,s}(\mathbb{R})$ et $\|J_f\| = \|f\|_{2,-s}$. Il nous reste à montrer que $f \mapsto J_f$ est une application surjective de $L^{2,-s}(\mathbb{R})$ sur $(L^{2,s}(\mathbb{R}))'$. Or si $\lambda \in (L^{2,s}(\mathbb{R}))'$, légalité $\nu(u) = \lambda(\Pi_s u)$ définit une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$ et d'aprés le théorme de Riesz, il existe $v \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(\Pi_s u) = \int u\bar{v}dx$. On en déduit alors $\lambda(w) = \int_\mathbb{R} w\overline{\Pi_{-s}v}dx$, $\forall w \in L^{2,s}$. Ce qui établit la surjectivité de J_f $(f = \overline{\Pi_{-s}v})$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 51 *. intégrons contre une fonction test :*

$$\int_0^1 \varphi'(x)dx = \varphi(1) - \varphi(0) = \delta_1(\varphi) - \delta_0(\varphi)$$

Cette égalité montre que $\partial 1\!\!1_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_1$.
Pour montrer que cette distribution n'est pas dans $L^2(I)$ on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on ait

$$\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) - \varphi(1)$$

Il en résulte alors que $f(x) = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ (voir Annexe Intégration). On obtient alors une contradiction en choisissant φ telle $\varphi(0) \neq \varphi(1)$.□Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 52 *Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. Les hypothèses du théorème de Fubini (Annexe Intégration) sont vérifiées, ce qui permet d'obtenir :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x)(\mathcal{F}v)(x)dx &= \int\int u(x)v(y)\mathrm{e}^{-ixy}dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(y)(\mathcal{F}u)(y)dx, \end{aligned} \tag{4.108}$$

□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 53 . *Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ on a*

$$|\varphi(a)| \leq \sup_{x\in I} |\varphi(x)|$$

Cette inégalité montre bien que $\varphi \mapsto \varphi(a)$ est une distribution au sens défini dans le cours. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 54 . *On fait des intégrations par parties. On obtient alors $\partial Y = \delta_0$ et $\partial^2 Y = \delta_0\prime$ où $\delta_0\prime$ désigne la distribution $\varphi \mapsto -\varphi'(0)$.* □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 55 . *On a, pour toute fonction teste φ,*

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx = 2n\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)dx$$

On utilise la formule de Taylor en 0 :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x)$$

où ψ est continue. Il en résulte

$$|\int f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)| \leq \frac{C}{n}$$

où C est indépendante de n (mais dépend de φ).
La suite $\{f_n\}$ converge donc vers la distibution δ_0.
Comme dans l'exercice (54) on montre que $\delta_0 \notin L^2(\mathbb{R})$.
l'interprétation graphique se fait d'elle même.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 56 . *i) On utilise la formule d'inversion de Fourier, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\varphi(a) = (2\pi)^{-1}\int (\mathrm{e}^{iax}\hat{\varphi}(x)dx. \tag{4.109}$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz en écrivant $\hat{\varphi}(x) = (1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)^{1/2}\hat{\varphi}(x)$. On obtient alors

$$|\varphi(a)| \leq \left(\int (1+x^2)^{-1}dx\right)^{1/2} \left(\int (1+x^2)|\hat{\varphi}(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

D'après le théorme de Plancherel on a

$$\int (1+x^2)|\hat{\varphi}(x)|^2dx = 2\pi\int |\varphi(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 = 2\pi{\varphi_{1,2}}^2$$

On obtient donc

$$|\varphi(a)| \leq \gamma{\varphi_{1,2}}^2 \tag{4.110}$$

avec γ indépendante de φ. Ce qui prouve que $\delta_a \in H^{-1}(\mathbb{R})$.
δ_0' a été calculé dans l'exercice (57).
ii) $\mathcal{F}(\delta_a)$ est déterminée par les égalités :

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(\delta_a), \varphi > &= < \delta_a, \mathcal{F}\varphi > \\ &= \mathcal{F}\varphi(a) \\ &= \int \mathrm{e}^{-iax}\varphi(x)dx. \end{aligned} \tag{4.111}$$

L' identification fonctions ↔distributions montre que $\mathcal{F}(\delta_a)$ est une fonction localement intégrable et que $\mathcal{F}(\delta_a) = \mathrm{e}^{-iax}$.
iii) La mêthode que ci-dessus donne $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta_0$ et $\mathcal{F}[x] = 2i\pi\delta_0'$.
La transformation de Fourier de fonctions ne décroissant pas assez vite à l'infini sont des distributions qui de sont plus des fonctions. Cela donne un intérêt supplémentaire aux distributions si l'on souhaite étendre la transformation de Fourier à des fonctions à croissance polynomiale à l'infini. Cette extension est utile dans de nombreuses applications (théorie de signal, mécanique quantique). □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 57 . *a) un espace de Fréchet est un espace vectoriel muni d'une topologie métrisable, définie par une famille dénombrable de semi-normes, et qui est complet pour l'une des métriques compatible avec sa topologie. Notons que les espaces de Banach sont de Fréchet.*
b) $T^j x_0 \in K$ *pour tout* $j \geq 0$. K *étant convexe,* $y_n \in K$.
K *étant compact, on peut extraire de la suite* y_n *une sous-suite convergente vers* $u \in K$.
c) On a

$$y_{n_k} - Ty_{n_k} = \frac{1}{n_k+1}(x_0 - T^{n_k+1}x_0).$$

K *étant compact, il est borné. Il existe donc* $M > 0$ *tel que* $d(0, x_0 - T^{n_k+1}x_0) \leq M$, $\forall k \geq 1$. *Or l'application* $\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *est uniformément continue sur le compact* $[0,1] \times K$. *On en déduit donc que*

$$\lim_{k \to +\infty} (y_{n_k} - Ty_{n_k}) = 0.$$

T *étant continue, on en déduit que* $Tu = u.\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 58 . *a) Il faut montrer que* μ *est continue.*
Or on a, $\forall x \in [0,1]$,

$$-\|f\|_\infty \mathbb{1} \leq f(x) \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}.$$

Il résulte de la positivité de f *que l'on a*

$$-\|f\|_\mu(\mathbb{1}) \leq \mu(f) \leq \|f\|_\infty \mu(\mathbb{1}).$$

Soit encore $|\mu(f)| \leq \|f\|_\infty \mu(\mathbb{1})$. μ *étant une forme linéaire, on en déduit la continuité.*
b) exemples faciles.
c) L'espace $\mathcal{C}[0,1]$ *est séparable car l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels y est dense (Stone-Weirerstrass). On désigne par* π_n *cette suite de polynômes. La topologie sur* E' *est définie par la famille de semi-normes* $p_n(\mu) = |\mu(\pi_n)$. *On a vu au début du chapitre que dans ces conditions la topologie est aussi définie par la distance*

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \frac{p_n(\mu - \nu)}{1 + p_n(\mu - \nu)}, \ \mu, \nu \in E.$$

*et on montre comme dans l'exemple (**??**) que* E' *est complet pour cette distance (voir aussi (**??**)).*
d) On a vu que la boule unité du dual d'un espace espace de Banach séparable est $\star$*-faiblement compacte. Donc* $\mathcal{M}_1$ *est* $\star$*-faiblement compacte. On vérifie facilement que* $\mathcal{P}$ *est convexe et fermé dans* $\mathcal{M}_1$. $\mathcal{P}$ *est donc convexe et compacte.*
T *est une application continue de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *(à vérifier). On peut alors appliquer le résultat précédent : il existe une mesure de probabilité* μ *telle* $T(\mu) = \mu.\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Chapitre 5. Equations Intégrales - Théorie de Fredholm

5.1 Introduction

La recherche de solutions d'équations fonctionnelles, en particulier différentielles, peut souvent se ramener à une équation de la forme suivante :

$$\int_I K(x,y)u(y)dy - \mu u(x) = f(x),\ x \in I, \tag{5.112}$$

I est un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$, K est une fonction donnée sur $I \times I$, u, f des fonctions sur I, $\mu \in \mathbb{K}$. u est l'inconnue de l'équation, μ est un paramètre non nul.
L'équation (5.112) est appelée équation intégrale de Fredholm, de noyau K. La discussion des propriétés des solutions u dépend beaucoup du noyau K. u sera cherchée dans un espace de fonctions convenables, par exemple $C(I)$ ou $L^2(I)$.
Notons que l'équation (5.112) est la généralisation naturelle en dimension infinie aux systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{1\le k\le n} a_{j,k}u_k - \lambda u_j = f_j,\ 1 \le j \le n \tag{5.113}$$

où $A = \{a_{j,k}\}$ est une matrice $n\times n$. Dans ce cas la discussion des solutions dépend de l'annulation ou non de $\det(A-\mu\mathbb{1})$.
En dimension infinie, les choses sont plus compliquées et la construction d'un déterminant est délicate. Néanmoins, on verra que l'on peut élucider le problème par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
On va scinder cette étude en deux cas : le cas symétrique ou hermitien puis le cas général.

5.2 Noyaux symétriques, hermitiens

On suppose ici que $K \in L^2(I\times I)$, I étant un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$ et que $\overline{K(x,y)} = K(y,x)$, pour presque tout $(x,y) \in I$.
On lui associe l'opérateur T_K défini par

$$T_K u(x) = \int_I K(x,y)u(y)dy$$

T_K est un opérateur autoadjoint et compact dans $L^2(I)$. On désigne par $\{\mu_j^\star\}_{j\ge1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T et $F_j = \ker(T_K - \mu_j^\star\mathbb{1})$. Soit alors $f \in L^2(I)$.

Proposition 5.1 *T_K étant de classe Hilbert-Schmidt, il résulte alors du chapitre précédent que l'on a :*
i) Si $\mu \ne \mu_j^\star$, $\forall j \ge 1$, $\mu \ne 0$, l'équation (5.112) a une solution et une seule.
ii) Si $\mu = \mu_j^\star$, l'équation posséde une solution u_0 si et seulement si $f \in F_j^\perp$. Dans ce cas, toutes les solutions de (5.112) sont de la forme $u = u_0 + v$, où $v \in F_j$.

Exercice 62 *Donner les détails de la preuve de la Proposition 5.1.*

On sait également que T_K admet une base orthonormée dans $(\ker T_K)^\perp$ de vecteurs propres $\{\varphi_j\}$, $T\varphi_j = \mu_j\varphi_j$, $\{\mu_j\}$ étant la suite, décroissante en valeur absolue, des valeurs propres non nulles de T_K répétées suivant leurs multiplicités.

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses précédentes on a*

$$K(x,y) = \sum_{j\ge1} \mu_j\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)} \tag{5.114}$$

au sens de la convergence dans $L^2(I\times I)$. On a en particulier

$$\sum_{j\ge1}\mu_j^2 = \int\int_{I\times I} |K(x,y)|^2 dxdy \tag{5.115}$$

Démonstration :
Il résulte du Chapitre 3 que l'on a, $\forall u,v \in L^2(I)$,

$$\langle Tu|v\rangle = \int\int_{I\times I} K(x,y)u(y)\overline{v(x)}dxdy = \sum_{j\ge1}\mu_j\langle\varphi_j|\overline{v}\rangle\langle u|\varphi_j\rangle. \tag{5.116}$$

Or la fonction $H(x,y) = \sum_{j\ge1}\mu_j\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$ est dans $L^2(I\times I)$. Par densité, on en déduit l'égalité (5.116) puis (5.115).□

Lemme 5.3 *Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\int_I |K(x,y)|^2 dy \le C^2,\ \forall x \in I \tag{5.117}$$

Alors T_K est un opérateur linéaire continu de $L^2(I)$ dans $C(I)$ muni de la norme $\|\bullet\|_\infty$.

Démonstration :
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|T_K u(x) - T_K v(x)|^2 \leq \int_I |K(x,y)|^2 dy \cdot \int_I |u(y) - v(y)|^2 dy \leq C^2 \|u - v\|_2{}^2$$

□

On suppose maintenant de plus que K est continu sur $I \times I$ et que T_K est un opérateur positif sur $L^2(I)$.

Lemme 5.4 *Sous les hypothèses précédentes on a $K(x,x) \geq 0$, $\forall x \in I$.*

Démonstration :
On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $K(x_0, x_0) < 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $K(x,y) < 0$ pour $x, y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. On choisit u, fonction continue, à support dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $u(x_0) = 1$. On obtient alors que $\langle T_K u | u \rangle < 0$, ce qui contredit la positivité de T_K.□

Théorème 5.5 (Théorème de Mercer) *On suppose que le noyau K est continu sur $I \times I$, où I est un intervalle borné et fermé, et que T_K est un opérateur positif dans $L^2(I)$. Alors les fonctions propres φ_j sont continues sur I, $\forall j \geq 1$ et l'on a :*

$$K(x,y) = \sum_{j \geq 1} \mu_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}, \tag{5.118}$$

la série étant uniformément convergente sur $I \times I$.
On a de plus

$$\int_I K(x,x) dx = \sum_{j \geq 1} \mu_j. \tag{5.119}$$

Démonstration :
Montrons que les φ_j sont continues. On a

$$\varphi_j(x) = \mu_j \int_I K(x,y) \varphi_j(y) dy.$$

Or le membre de droite est une intégrale dépendant d'un paramètre à laquelle on peut appliquer le théorème de dérivation (voir Annexe Intégration) car K est continue, bornée, et φ_j est intégrable.
Posons $H_n(x,y) = \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}$ et $R_n(x,y) = K(x,y) - H_n(x,y)$. H_n et R_n sont continues sur $I \times I$ et d'après ce qui précède, on a, au sens de la convergence dans $L^2(I \times I)$, $R_n(x,y) = \sum_{j \geq n+1} \mu_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}$. Il en résulte que

$$\int \int_{I \times I} R_n(x,y) u(y) \overline{u(y)} dx dy \geq \sum_{j \geq n+1} \mu_j |\langle u | \varphi_j \rangle|^2 \geq 0, \ \forall u \in L^2(I).$$

D'où l'on déduit du Lemme que $R_n(x,x) \geq 0$, $\forall x \in I$. La suite $H_n(x,x)$ est donc convergente de limite $H(x,x) \leq K(x,x)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|\sum_{m \leq j \leq n} \mu_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}|^2 \leq \sum_{m \leq j \leq n} \mu_j |\varphi_j(x)|^2 \sum_{m \leq j \leq n} \mu_j |\varphi_j(y)|^2 \leq M \sum_{m \leq j \leq n} \mu_j |\varphi \tag{5.120}$$

où $M = \max_{x \in I} K(x,x)$.
On en déduit que pour x fixé, $H(x,y) := \sum_{j \geq 1} \mu_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}$ est continue en y sur I. D'autre part il résulte du Lemme 5.3 que pour tout $u \in L^2(I)$, Tu_N converge uniformément vers Tu sur I, où $u_N = \sum_{1 \leq jj \leq N} \langle u | \varphi_j \rangle \varphi_j$.
Donc pour toute fonction $u \in C(I)$ on a

$$\int_I H(x,y) u(y) dy = \int_I K(x,y) u(y) dy.$$

Il en résulte que $\forall x, y \in I$ on a

$$H(x,y) = K(x,y) = \sum_{j \geq 1} \mu_j \varphi(x) \overline{\varphi_j(y)}.$$

Le théorème de Dini implique que $\sum_{j \geq 1} \mu_j |\varphi(x)|^2$ converge uniformément vers $K(x,x)$ sur I. Il résulte alors de l'inégalité (5.120) que le développement $\sum_{j \geq 1} \mu_j \varphi(x) \overline{\varphi_j(y)}$ est uniformément convergent vers $K(x,y)$ sur $I \times I$.
La formule (5.119) résulte d'une intégration terme à terme, possible grâce à la convergence uniforme. Ce qui termine la preuve du théorème de Mercer. □

5.3 Problèmes de Sturm-Liouville

5.3.1 le cas périodique

Nous allons montrer que le Théorème de Mercer s'applique à l'opérateur de Green des problèmes de Sturm-Liouville étudiés dans le chapitre 3. On suppose que $\min_{x\in[0,1]} q(x) > 0$ (ce qui est toujours possible, quitte à ajouter une constante à q). On commence par établir une propriété des espaces $H^1_\sharp$.

Proposition 5.6 (inégalités de Sobolev) *Il existe une constante $c_S > 0$ telle que*

$$|u(x)| \le c_S\|u\|_{2,1},\ \forall u \in \mathcal{P}_\sharp,\ \forall x \in [0,1]. \tag{5.121}$$

Il existe une injection canonique de $H^1_\sharp$ dans $C_\sharp$ telle que l'inégalité (5.121) reste valide, $\forall u \in H^1_\sharp$.
De plus, pour tout réel $\tau \in]0,1/2[$, il existe $\gamma_\tau > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \le \gamma_\tau\|u\|_{2,1}|x-y|^\tau,\ \forall u \in {H_\sharp}^1,\ \forall x,y \in [0,1]. \tag{5.122}$$

Plus généralement, pour tout entier $k \ge 1$ on a une injection continue de ${H_\sharp}^{k+1}$ dans ${C_\sharp}^k$ (muni de sa norme d'espace de Banach $|\bullet|_k$, voir chapitre 3).

Démonstration :
Pour tout $u \in \mathcal{P}_\sharp$ on a $|u(x)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u)|$. En écrivant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{1/2}|c_n(u)|(1+n^2)^{-1/2}$$

(5.121) résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|u(x)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-1}\|u\|_{2,1}$$

Ensuite on peut prolonger cette inégalité à $H^1_\sharp$ en raison de la densité de $\mathcal{P}_\sharp$. Il reste à établir l'inégalité de Hölder (5.122).
Il suffit là encore d'établir l'inégalité pour $u \in \mathcal{P}_\sharp$. On écrit alors

$$|x-y|^{-\tau}|u(x)-u(y)| = \sum_{n\neq 0} |x-y|^{-\tau}|c_n(u)||\mathrm{e}^{2i\pi nx} - \mathrm{e}^{2i\pi ny}| =$$
$$2\sum_{n\neq 0} |x-y|^{-\tau}|\sin(\pi n(x-y))||c_n(u)| \tag{5.123}$$

On sépare la somme en deux morceaux selon que $|n| \le |x-y|^{-1}$ ou $|n| > |x-y|^{-1}$.
Lorsque $|n| \le |x-y|^{-1}$ on majore $|\sin\theta|$ par $|\theta|$ et dans l'autre cas on majore $|\sin\theta|$ par 1. Ce qui donne

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{-\tau}} \le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\tau|c_n(u)| =$$
$$2\pi\sum_{n\neq 0}|n||c_n(u)||n|^{\tau-1} \le 2\pi\|u\|_{2,1}\left(\sum_{n\neq 0}|n|^{2(\tau-1)}\right)^{1/2} \tag{5.124}$$

La condition $\tau < 1/2$ assure la convergence de la série. En raisonnant par récurrence sur k on en déduit que l'injection de $H^{k+1}_\sharp$ dans $C^k_\sharp$ est continue. □

Proposition 5.7 *L'opérateur de Green G_q admet un noyau intégral K_q, continu sur* $[0,1]\times[0,1]$.

Démonstration :
On a vu dans le chapitre 3 que $\sqrt{G_q}$ est linéaire, continu de $L^2_\sharp$ dans $H^1_\sharp$ et de $H^{-1}_\sharp$ dans $L^2_\sharp$.
Il résulte alors de la Proposition 5.6 que pour tout $x \in [0,1]$ l'application $u \mapsto \sqrt{G_q}u(x)$ est une forme linéaire, continue sur $L^2_\sharp$. D'après le Théorème de dualité de Riesz, il existe donc $v_x \in L^2_\sharp$ telle que $\sqrt{G_q}u(x) = \langle u|v_x\rangle$. Il résulte aussi de la même proposition que $x \mapsto v_x$ est höldérienne d'ordre τ, pour tout $\tau < 1/2$.
En effet, pour tout $u \in L^2_\sharp$ on a

$$\langle u|v_x - v_y\rangle = \sqrt{G_q}u(x) - \sqrt{G_q}u(y).$$

L'inégalité (5.122) implique alors

$$\langle u|v_x - v_y\rangle \le \gamma_\tau\|\sqrt{G_q}\|_{\mathcal{L}(L^2_\sharp,H^1_\sharp)}|x-y|^\tau\|u\|_2$$

d'où il résulte qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x,y \in [0,1]$, on a

$$\|v_x - v_y\|_2 \le C|x-y|^\tau\|u\|_2 \tag{5.125}$$

Or on a

$$\sqrt{G_q}u(x) = \int_0^1 u(y)\overline{v_x(y)}dy$$

Ce qui signifie que l'opérateur $\sqrt{G_q}$ admet pour noyau intégral la fonction $L(x,y) = \overline{v_x(y)}$. $\sqrt{G_q}$ étant autoadjoint, on a $\overline{v_x(y)} = v_y(x)$. Pour terminer la démonstration, montrons que $K(x,y) = \langle v_y | v_x \rangle$ est le noyau intégral de G_q.
On a en effet, pour tous $u, w \in L^2_\sharp$,

$$\langle G_q u | w \rangle = \langle \sqrt{G_q} u | \sqrt{G_q} w \rangle = \int_0^1 \langle u | v_z \rangle \overline{\langle w, v_z \rangle} dz =$$
$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \langle v_y | v_x \rangle u(y) \overline{w(x)} dy dx \qquad (5.126)$$

la dernière égalité étant justifiée par la théorème de Fubini.□

Corollaire 5.8 *Désignons par K le noyau de Green associé à la forme $B_q[u,v]$. On a alors*

$$\int_0^1 K(x,x)dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}.$$

Nous allons maintenant montrer que la solution variationnelle du problème de Sturm-Liouville est une solution classique lorsque q et f sont assez régulières. On va utiliser le lemme suivant

Lemme 5.9 *Soit $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombre complexes. $x \in \ell_{2,k}$, $k \in \mathbb{N}$, si et seulement si il existe $C > 0$ telle pour toute suite $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ à support borné (i.e telle que $y_n = 0$ pour $|n|$ assez grand) on a*

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n| \leq C \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-2k} |y_n|^2 \right)^{1/2} \qquad (5.127)$$

Démonstration :
Si $x \in \ell_{2,k}$ alors on a (5.127) par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour la réciproque, on se ramène à $k = 0$ pour la suite $z_n = (1+n^2)^{k/2} x_n$. On montre alors que $\{z_n\} \in \ell_2$ soit directement soit en utilisant le théorème de dualité de Riesz. □

Nous allons maintenant faire le lien avec la notion de dérivée faible ∂ introduite dans le Chapitre 4.

Lemme 5.10 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$u \in H^k_\sharp \Leftrightarrow \partial^j u \in L^2_\sharp, \ \forall j \leq k \qquad (5.128)$$

Pour tout $g \in C^k{}_\sharp$, $gu \in H^k{}_\sharp$ et il existe $C_{k,g} > 0$ telle que $\|gu\|_{2,k} \leq C_g \|u\|_{2,k}$, $\forall u \in H^k{}_\sharp$.

Démonstration :
On montre facilement que $c_n(\partial^k u) = (2i\pi n)^k c_n(u)$. Il en résulte l'équivalence (5.128).
Ensuite on montre, en utilisant la définition d'une dérivée faible, que $\partial(gu) = \partial g.u + g.\partial u$. D'où il résulte que $gu \in H^1_\sharp$ et

$$\|gu\|_{2,1} \leq C_{1,g} \|u\|_{2,1}$$

On conclut a à l'aide d'une récurrence sur k. □

Proposition 5.11 *On suppose que $q \in C^1_\sharp$ et $f \in C^1_\sharp$ alors la solution $u \in H^1_\sharp$ du problème variationnel*

$$B_q[u,v] = \int_0^1 f(x)\overline{v(x)}dx \qquad (5.129)$$

est de classe C^2. Elle résout donc l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$,

$$-u'' + qu = f, \ u(0) = u(1) \qquad (5.130)$$

Démonstration :
On a $u \in H^1{}_\sharp$. Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{P}_\sharp$ on a

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(u) c_n(v)|^2 \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-1} |c_n(v)|^2$$

D'où pour toute suite $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ à support borné on a

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u) y_n \right|^2 \leq 2C \|y\|^2_{2,3}$$

Il en résulte que $u \in H^3{}_\sharp$ et donc $u \in C^2{}_\sharp$ d'après la Proposition 5.6.□

Remarque 5.12 *Dans l'étude du problème de Sturm-Liouville on pourrait utiliser des méthodes plus classiques, propres aux équations différentielles ordinaires. L'avantage de la méthode variationnelle utilisée est qu'elle se généralise au cas de plusieurs variables, reliés à des équations aux dérivées partielles. C'est dans ce cadre que les méthodes variationnelles et la théorie des distributions sont très utiles. On verra dans une étude proposée en exercice un ou deux exemples de généralisations à deux dimensions de problèmes du type Sturm-Liouville : problème périodique sur un réseau et le problème des vibrations d'une membrane.*

5.4 Théorie de Riesz-Fredholm

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de Banach complexes. Les propriétés générales énoncées dans le Chapitre 3, sous-section 3.5.1, s'étendent directement au cas des espaces de Banach. Le lecteur est invité à vérifier cette affirmation.

Par contre le résultat de dualité suivant n'est pas aussi immédiat.

Théorème 5.13 (Schauder) *Si T est un opérateur compact de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ alors son transposé $\tilde{T}$ est un opérateur compact de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{E}'$.*

Démonstration :
Il faut montrer que $\tilde{T}(B_{\mathcal{F}'})$ est précompact dans $\mathcal{E}'$.
Par hypothèse $\overline{T(B_{\mathcal{E}})}$ est compact dans $\mathcal{F}$. Considérons l'ensemble

$$\Phi = \{\varphi|_{\overline{T(B_{\mathcal{E}})}},\ \varphi \in \mathcal{F}',\ \|\varphi\| \leq 1\}$$

Or Φ est une partie bornée et équicontinue de $C(\overline{T(B_{\mathcal{E}})})$ (espace des fonctions continues sur $\overline{T(B_{\mathcal{E}})}$) donc précompacte d'après le théorème d'Ascoli. Mais Φ et $\tilde{T}(B_{\mathcal{F}'})$ sont isométriques car on a

$$\|\tilde{T}\varphi\| = \sup_{u \in B_{\mathcal{E}}} < \varphi, Tu > = \sup_{v \in \overline{T(B_{\mathcal{E}})}} < \varphi, v >$$

on en déduit donc que $\tilde{T}(B_{\mathcal{F}'})$ est précompact.□

On désigne par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'espace de Banach des opérateurs compacts de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Commençons par donner un exemple simple sortant du cadre hilbertien, autoadjoint. Considérons l'opérateur d'intégration $Pu(x) = \int_0^x u(t)dt$, $u \in C[0,1]$. Il résulte du théorème Ascoli (cf. Chapitre 1) que P est un opérateur compact dans $C[0,1]$. On a en effet les inégalités suivantes.

$$\|Pu\|_\infty \leq \|u\|_\infty \tag{5.131}$$

$$|Pu(x) - Pu(y)| \leq |x-y|\|u\|_\infty,\ \forall x, y \in [0,1] \tag{5.132}$$

Montrons que P n'a pas de valeur propre. En effet si $Pu(x) = \mu u(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ on a alors, en dérivant, $u(x) = \mu u'(x)$. Si $\mu \neq 0$ on a $u(x) = u(0)e^{x/\mu}$. Or $u(0) = 0$ d'où $u = 0$ sur $[0,1]$.
Si $\mu = 0$ on a alors $\int_I u(t)dt = 0$ pour tout sous intervalle I de $[0,1]$. On en déduit encore que $u = 0$ sur $[0,1]$. Donc P n'a pas de valeur propre (noter cependant que $\sigma(T) = \{0\}$). Dans la suite de ce chapitre nous allons étudier les valeurs propres μ non nulles d'un opérateur compact T de $\mathcal{E}$. On se ramène au cas où $\mu = 1$ en notant que $\mu\mathbb{1} - T = \mu\left(\mathbb{1} - \dfrac{T}{\mu}\right)$.
Il suffit alors de remplacer T par $\dfrac{T}{\mu}$.

Théorème 5.14 *On a les propriétés suivantes :*
i) $\ker(\mathbb{1} - T)$ *est de dimension finie.*
ii) $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)$ *est fermée.*

Démonstration :
i) est une conséquence du Théoréme de Riesz (Chapitre 1). Montrons que la boule unité fermée de $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)$ est compacte. Soit $\{u_n\}$ une suite de $\mathcal{E}$ telle que $\|u_n\| \leq 1$ et $u_n = Tu_n$, $\forall n \geq 1$. T étant compacte il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que $\{Tu_{n_k}\}$ converge fortement. On en déduit que $\{u_{n_k}\}$ converge fortement.
Posons $N_1 = \ker(\mathbb{1} - T)$. On considère l'espace quotient $\mathcal{E}/N_1$ muni de sa norme quotient $|||\bullet|||$. On désigne par $\dot{u}$ la classe de u et par $\dot{A}$ l'application déduite de $A = \mathbb{1} - T$ sur $\mathcal{E}/N_1$. Montrons alors qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|||\dot{u}||| \leq C\|\dot{A}\dot{u}\|, \forall u \in \mathcal{E} \tag{5.133}$$

Raisonnons par l'absurde. Si (5.133) n'est pas vérifiée, il existe alors une suite $\{u_n\}$ de $\mathcal{E}$ telle que $|||\dot{u}_n||| = 1$ et $\|Au_n\| \leq 1/n$, $\forall n \geq 1$. On peut s'arranger pour que $1 \leq \|u_n\| \leq 3/2$ T étant compact, on peut en extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que $\{Tu_{n_k}\}$ converge. Mais alors $\{u_{n_k}\}$ converge vers $v \in \mathcal{E}$ vérifiant $Av = (\mathbb{1} - T)v = 0$ donc $\dot{v} = 0$. Or $\{\dot{u}_{n_k}\}$ converge vers $\dot{v}$ et donc $|||v||| = 1$, on a obtenu une contradiction, ce qui prouve (5.133).
Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)$ est fermée. Soit $f_n = Au_n$ telle que $\{f_n\}$ converge vers F dans $\mathcal{E}$.
En utilisant (5.133) on peut modifier la suite $\{u_n\}$ pour qu'elle soit bornée. On peut alors en extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que $\{Tu_{n_k}\}$ converge vers g dans $\mathcal{E}$. Or on a $u_{n_k} = f_{n_k} + Tu_{n_k}$. La suite $\{u_{n_k}\}$ converge donc vers $u \in \mathcal{E}$ et la continuité de T entraine que $u - Tu = f$.□

Pour aller plus loin on va utiliser à plusieurs le Lemme général suivant.

Lemme 5.15 (Riesz) *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}$, $F \neq \mathcal{E}$.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u \in \mathcal{E}$ tel que $\mathrm{d}(u, F) \geq 1 - \varepsilon$

Démonstration :
Raisonnons dans l'espace normé quotient $\mathcal{E}/F$. Rappelons que

$$\mathrm{d}(u, F) = \inf\{\|u + v\|,\ \ v \in F\} = |||\dot{u}|||$$

Or par hypothèse $\mathcal{E}/F \neq \{0\}$. On peut donc trouver $w \in \mathcal{E}$ tel que $|||\dot{w}||| = 1$ et $v \in F$ tels que $\|v - w\| \leq 1 - \varepsilon$. Posons $u = \frac{v-w}{\|v-w\|}$. On en déduit alors $\|u + z\| \geq 1 - \varepsilon$, $\forall z \in F$.□

Théorème 5.16 *Soit T un opérateur compact dans $\mathcal{E}$ et $\sigma(T)$ son spectre.*
1) Si $Tv_j = \lambda_j v_j$, $v_j \neq 0$, $1 \leq j \leq N$ et si $\lambda_j j \neq \lambda_k$ pour $j \neq k$ alors le système de vecteurs $\{v_1, \cdots, v_N\}$ est libre.
2) On a les trois possibilités suivantes et seulement celles-là :
i) $\sigma(T) = \{0\}$.
ii) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est en ensemble fini.
iii) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est un ensemble infini, dénombrable, n'admettant que 0 comme point d'accumulation.

Démonstration :
1) Cette propriété purement algébrique, se vérifie d'abord pour $N = 2$ puis par récurrence pour $N \geq 2$.
2) Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de points distincts de $\sigma(T)\backslash\{0\}$. Il existe alors une suite $\{v_n\}$ de vecteurs telle $\|v_n\| = 1$ et $Tv_n = \lambda_n v_n$. L'espace vectoriel V_n engendré par $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est de dimension n et on a donc les inclusions strictes $V_n \subset V_{n+1}$. En appliquant le Lemme de Riesz on obtient une suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \in V_n$, $\|u_n\| = 1$, $\mathrm{d}(u_{n+1}, V_n) \geq 1/2$. Pour $m \geq n$ on a

$$\frac{Tu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} = \frac{Tu_{n+1} - \lambda_{n+1}u_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_{n+1} - u_m$$

Dans le membre de droite on remarque que la somme des termes autres que u_{n+1} est dans V_n. On en déduit que

$$\left\|\frac{Tu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\right\| \geq \frac{1}{2} \tag{5.134}$$

Supposons alors que $\{\lambda_n\}$ ait un point d'accumulation autre que 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\{\lambda_n\}$ a une limite a non nulle. $\frac{u_n}{\lambda_n}$ est alors une suite bornée et il résulte de (5.134) que $\frac{Tu_n}{\lambda_n}$ n'admet pas de sous suite convergente, ce qui contredit la compacité de T.□

Pour la suite nous utiliserons les notations $N_k = \ker(\mathbb{1} - T)^k$ et $F_k = \mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)^k$, pour tout entier $k \geq 1$.
D'après la formule du binôme, on a $(\mathbb{1} - T)^k = \mathbb{1} - T_k$ où T_k est un opérateur compact. Il résulte donc de ce qui précède que $\{N_k\}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie et $\{F_k\}$ est une suite décroissante de sous-espaces fermés.
On a de plus la propriété suivante

Proposition 5.17 *Pour tout entier $k \geq 1$, F_k est de codimension finie dans $\mathcal{E}$.*

Démonstration :
Il suffit de le démontrer pour $k = 1$. On raisonne par l'absurde. Supposons $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)$ de codimension infinie. On peut alors construire une suite de vecteurs $\{u_n\}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété suivante. Notons par V_n le sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)$ et les vecteurs $\{u_1, \cdots, u_n\}$. D'après un résulat du chapitre 4, les sous-espaces F_n sont fermés. D'après le Lemme de Riesz, pour tout $n \geq 1$, il existe $v_n \in V_n$, $\|V_n\| = 1$, $\mathrm{d}(v_n, V_{n-1}) \geq 1/2$. Or $v_n - Tv_j = v_n - v_j + (\mathbb{1} - T)(v_n - v_j)$, et, si $j < n$, $v_j - (\mathbb{1} - T)(v_n - v_j) \in V_{n-1}$. D'où $\|Tv_n - Tv_j\| \geq 1/2$, $\forall j < n$. Ce qui est contradictoire avec la compacité de T. □

Nous allons franchir une étape supplémentaire dans notre étude.

Proposition 5.18 *Les suites de sous-espaces $\{N_k\}$ et $\{F_k\}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang. Plus précisément on a :*
i) Il existe un plus petit entier $\nu \geq 1$ tel que $N_k = N_\nu$, $\forall k \geq \nu$.
ii) Si $F_{k_0} = F_{k_0+1}$ alors $F_k = F_{k_0}$ $\forall k \geq k_0$ et il existe un plus petit entier $\theta \geq 1$ tel que $F_k = F_\theta$, $\forall k \geq \theta$.
iii) $\nu = \theta$ (cet entier s'appelle l'indice de la valeur propre 1 de T)).

Démonstration :
(i) On a clairement que si $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ alors $N_k = N_{k_0}$ $\forall k \geq k_0$.
Supposons alors que $N_k \subset N_{k+1}$, $\forall k \geq 1$. Par le même argument que la preuve précédente, à l'aide du Lemme de Riesz on construit une suite $\{u_n\}$ telle que $u_k \in N_k$, $\|u_k\| = 1$, $\mathrm{d}(u_k, N_{k-1}) \geq 1/2$ ($N_0 = \{0\}$). Or si $u \in N_{k-1}$ on a

$$Tu_k - Tu = u_k - (u + (\mathbb{1} - T)u_k - (\mathbb{1} - T)u) \in u_k + N_{k-1}.$$

D'où $\|Tu_k - Tu\| \geq 1/2$ en particulier $\|Tu_k - Tu_j\| \geq 1/2$, $\forall j < k$. Ce qui contredit à nouveau la compacité de T.
(ii) Par de l'algèbre élémentaire on obtient que si $F_{k_0} = F_{k_0+1}$ alors $F_k = F_{k_0}$ $\forall k \geq k_0$.
On raisonne par l'absurde en procédent comme dans (i). On obtient une suite $\{u_n\}$ telle que $\|u_n\| = 1$, $u_n \in F_n$, et $\mathrm{d}(u_n, F_{n+1}) \geq 1/2$. Or on a

$$Tu_n - Tu_m = -u_n + Tu_n - u_m - Tu_m + u_n - u_m$$

Sachant que $\mathbb{1} - T$ envoie F_n dans F_{n+1}, on obtient alors que $\|u_n - Tu_m\| \geq 1/2$, $\forall m \geq n$ et une contradiction.

(iii) Montrons que $\nu = \theta$.
Posons $A = \mathbb{1} - T$. Il résulte de la définition de θ que pour tout $j \geq 1$, A^j est une surjection de F_θ sur F_θ. Montrons que c'est une bijection.
Il suffit de le faire pour $j = 1$. Soit $u \in F_\theta$, $Au = 0$. Partant de $u = u_0$, par récurrence sur n, on obtient une suite $\{u_n\}$ dans F_θ telle que $Au_n = u_{n-1}$. On a alors $A^{n+1}u_n = 0$ et $A^n u_n = u$ $\forall n \geq 1$. Si $u \neq 0$ on aurait alors $u_n \in N_{n+1}$ et $u_n \notin N_n$. Mais cela n'est pas possible pour $n \geq \nu$. Donc $u = 0$.
Montrons maintenant que $\nu \leq \theta$. Soit $u \in N_{\theta+1}$. On a alors $AA^\theta u = 0$. A étant injectif sur F_θ on a alors $u \in N_\theta$ donc $N_{\theta+1} \subseteq N_\theta$ et $\nu \leq \theta$.
Il en résulte en particulier que si $\theta = 0$ alors $\mu = 0$ (i.e si $\mathbb{1} - T$ est surjectif alors il est injectif).
Montrons que $\theta \leq \nu$.
Supposons $\theta \geq 1$. On a $F_\theta \subset F_{\theta-1}$. Soit $f = A^{\theta-1}v$ tel que $f \notin F_\theta$. Posons $g = A^\theta v$. D'après ce qu'on a vu plus haut, l'équation $A^\theta w = g$ a une solution et une seule $v' \in F_\theta$. On a donc $v - v' \in \ker A^\theta$. D'autre part on a $A^{\theta-1}(v - v') = f - A^{\theta-1}v' \neq 0$ car $f \notin F_\theta$ et $A^{\theta-1}v' \in F_\theta$. Il en résulte que $N_{\theta-1} \subseteq N_\theta$ et $\nu \geq \theta$.□

Théorème 5.19 (Alternative de Fredholm) *Soit T un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ une valeur propre d'indice ν de T.*
(i) $\mathcal{E}$ se décompose suivant la somme directe

$$\mathcal{E} = \ker(\lambda\mathbb{1} - T)^\nu \oplus \mathrm{Im}(\lambda\mathbb{1} - T)^\nu, \tag{5.135}$$

en particulier $(\lambda\mathbb{1} - T)$ est injectif si et seulement si il est surjectif.
(ii) Supposons $\nu \geq 1$. Soient P et Q les projecteurs respectivement sur $\ker(\lambda\mathbb{1} - T)^\nu$ et $\mathrm{Im}(\lambda\mathbb{1} - T)^\nu$ associés à la décomposition (5.135). Soit $R = QT$ et $S = PT$. On a alors $T = R + S$, $SR = RS = 0$.
De plus λ est d'indice 0 pour R et $\lambda\mathbb{1} - R$ est inversible.
Pour tout $j \geq 1$, on a $\ker(\lambda\mathbb{1} - S)^j = \ker(\lambda\mathbb{1} - T)^j$ et $\mathrm{Im}(\lambda\mathbb{1} - S)^j = \mathrm{Im}(\lambda\mathbb{1} - T)^j$.
En particulier l'équation

$$\lambda u - Tu = f \tag{5.136}$$

a une solution si et seulement si $Pf = 0$. Dans ce cas l'ensemble des solutions de (5.136) est égal à $u_0 + \ker(\lambda\mathbb{1} - T)$ où u_0 est une solution particulière de (5.136).

Démonstration :
On se ramène au cas où $\lambda = 1$ en remplçant T par $\frac{T}{\lambda}$.
On déjà vu que si $\mathbb{1} - T$ est injectif il est alors surjectif. Dans ce qui suit on suppose dons que 1 est valeur propre d'indice $\nu \geq 1$ de T. On sait également que $\ker(\mathbb{1} - T)^\nu \cap \mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)^\nu = \{0\}$. Soit $u \in \mathcal{E}$. Posons $v = (\mathbb{1} - T)^\nu u$. Il existe $w \in \mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)^\nu$ tel que $(\mathbb{1} - T)^{2\nu} w = v$. Donc si $u' = (\mathbb{1} - T)^\nu w$ on a $u = u' + (u - u')$ avec $u' \in \mathrm{Im}(\mathbb{1} - T)^\nu$ et $u - u' \in \ker(\mathbb{1} - T)^\nu$. Ce qui prouve (5.135).
P et Q sont des projecteurs continus. On a clairement $PQ = QP = 0$. On en déduit que $(\mathbb{1} - T) = (\mathbb{1} - S)(\mathbb{1} - R) = (\mathbb{1} - R)(\mathbb{1} - S)$ et que 1 est d'indice 0 pour R. $\mathbb{1} - R$ est donc inversible. Or on a, pour tout $\jmath \geq 1$, $(\mathbb{1} - S)^j = (\mathbb{1} - R)^{-j}(\mathbb{1} - T)^j$. Les propriétés de S en résultent.
La dernière partie de l'énoncé est une conséquence directe de ce qui précéde.□

td5

Exercice 63 *Montrer que si f et q sont de classe C^k, $k > 1$, alors la solution u de problème variationnel (5.129) est de classe C^{k+1}.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 64 *Soit K une fonction continue, réelle, paire et 2π-périodique. On considère l'opérateur intégral*

$$Tu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)u(y)dy.$$

1) Montrer que T est un opérateur auto-adjoint et compact sur $L^2[-\pi,\pi]$.
2) Déterminer une base de vecteurs propres de T et relier ses valeurs propres aux coefficients de Fourier de K.
Peut-on appliquer le théorème de Mercer ? Justifier votre réponse.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 65 *On considère le noyau symétrique sur $[0,1]\times[0,1]$ défini par $K(x,y) = x(y-1)$ si $0 \le x \le y$ et $K(x,y) = y(x-1)$ si $0 \le y \le x$. Calculer les valeurs propres de l'opérateur T_K de noyau K.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 66 *Soit $I = [-1,1]$ et $K(x,y) = 1 + xy + x^2y^2$, $x, y \in I$. On considère l'opérateur intégral T_K de noyau K.*
Calculer les valeurs propres de T_K

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 67 *On considère l'équation intégrale*

$$u(x) = \lambda \int_0^1 xy^2 u(y)dy + \alpha x + \beta.$$

Discuter l'existence et l'unicité des solutions $u \in L^2[0,1]$.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 68 *[sujet d'étude] On se propose d'étendre aux cas de deux variables réelles ce qui a été fait dans le cours concernant les problèmes de Sturm-Liouville périodiques.*
On appelle fonction périodique sur $\mathbb{R}^2$ toute fonction mesurable u sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs complexes telles que :

$$u(x+j, y+k) = u(x,y),\ (x,y) - \text{presque partout sur } \mathbb{R}^2,\ \forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2 \tag{5.137}$$

On pose $Q = [0,1]\times[0,1]$ et si u est localement intégrable (pour la mesure de Lebesgue) on pose

$$c_{j,k}(u) = \int\int_Q u(x,y)\mathrm{e}^{-2i\pi(jx+ky)}dxdy$$

On pose $\mathrm{e}_{j,k}(x,y) = \mathrm{e}^{-2i\pi(jx+ky)}$.
1) Montrer que $\mathrm{e}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(Q)$.
On identifie $L^2(Q)$ et les fonctions périodiques, localement de carré intégrable. Cette espace sera maintenant noté $L^2_\sharp$ (comme à une variable).
2) En imitant ce qui a été fait pour une variable, définir les espaces de Sobolev périodiques $H^m_\sharp$ pour $m \in \mathbb{N}$ puis pour $N \in \mathbb{Z}$.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_\sharp$ des polynomes trigonométriques à deux variables est dense dans chacun de ces espaces.
Indication. *On pourra introduire les espaces $\ell_{2,m}$ des suites indéxées sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*
3) On considère la forme sesquilinéaire définie pour $u, v \in C^1_\sharp$

$$B_q[u,v] = \int\int_Q (\partial_x u\overline{\partial_y v} + qu\overline{v})dxdy$$

où q est une fonction continue, périodique sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $]0,+\infty[$ et $\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$.
Montrer que B_q se prolonge en une unique forme sesquilinéaire continue sur $H^1_\sharp \times H^1_\sharp$.
Montrer que B_q est hermitienne et elliptique. En déduire l'existence d'un opérateur de Green G_q.
4) On suppose que $q = a$ est constant. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres de G_a. Montrer que G_a est de classe Hilbert-Schmidt. En déduire que dans le cas général, G_q est de classe Hilbert-Schmidt.
5) Montrer que l'on a une injection continue de $H^2_\sharp$ dans $C_\sharp$ puis de $H^{2+m}_\sharp$ dans $C^m_\sharp$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

En déduire que si f est périodique, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $u = G_q f$ est une solution du problème

$$-\triangle u + qu = f, \quad u \in C^2_\sharp$$

Montrer que cette solution est unique.

Exercice 69 *On utilise les notations du théorème Alternative de Fredholm. On suppose $\lambda = 1$.*
i) Montrer que $\mu\mathbb{1} - S$ est inversible pour tout $\mu \neq 1, \mu \neq 0$.
ii) Soit $\mu \neq 1, \mu \neq 0$. Montrer que μ est valeur propre de T si et seulement si μ est valeur propre de R et que les indices sont les mêmes.

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 70 *Soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach et F un sous-espace fermé de $\mathcal{E}$. Montrer que si F est de dimension finie ou de codimension finie alors il admet un supplémentaire fermé.*

indications♠ ;Corrigé♣

Exercice 71 *[sujet d'étude] Soient deux espaces de Banach $\mathcal{E}_j$, $j = 1, 2$ et T une application linéaire continue de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$.*
On dira que T est un opérateur de Fredholm si son noyau $\ker(T)$ *et de dimension finie et son image* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermée et de codimension finie.*
Dans ce cas on appellera indice de Fredholm *l'entier relatif $\chi(T)$ défini par*

$$\chi(T) = \dim(\ker(T)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T)).$$

L'objet de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de cet indice.
1) On suppose que $\mathcal{E}_j = \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et A est un opérateur compact, autoadjoint sur $\mathcal{H}$.
Montrer que $\mathbb{1} - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.
2) On suppose que $\mathcal{E}_j = \ell_2(\mathbb{N})$ et on considère l'opérateur T défini par $(Tx)_j = x_{j+1}$ si $x = \{x_j\}_{j\in N}$.
Montrer que T est un opérateur de Fredholm d'indice 1.
3) Soit T un opérateur de Fredholm. On désigne par $N = \ker(T)$, J un supplémentaire fermé de N, $M = \Im(T)$ et L un supplémentaire de dimension finie de M.
Montrer que $(u, v) \mapsto Tu + v$ est une isomorphisme bicontinu de $J \times L$ sur $\mathcal{E}_2$.
Inversement, supposons que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et qu'il existe un sous-espace fermé J de $\mathcal{E}_1$, de codimension finie, et une décomposition en somme directe $\mathcal{E}_2 = M + L$, M, L étant fermés, L de dimension finie, tels que $(u, v) \mapsto Tu + v$ est une isomorphisme bicontinu de $J \times L$ sur $\mathcal{E}_2$. Montrer alors que T est un opérateur de Fredholm.
4) On désigne par $\mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$.
Montrer que $\mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ (muni de la convergence de la norme).
Montrer que l'indice de Fredholm χ est une fonction continue sur $\mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.
5) Soit A un opérateur compact de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_1$. Montrer que $\mathbb{1} + A$ est un opérateur de Fredholm et que $\chi(\mathbb{1} + A) = 0$.
6) Montrer que $T \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ si et seulement si il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ tel que $ST - \mathbb{1}$ et $TS - \mathbb{1}$ sont des opérateurs compacts respectivement sur $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. S est appelé quasi-inverse de T. Autrement dit les opérateurs de Fredholm sont les opérateurs qui sont inversibles modulo les opérateurs compacts.
Montrer que le quasi-inverse S de T est unique modulo un opérateur compact. En déduire que si $T \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ alors pour tout opérateur compact A, $T + A \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et $\chi(T + A) = \chi(T)$.
En déduire que si $T_1 \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et $T_2 \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ alors $T_2T_1 \in \mathcal{F}red(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$. On peut aussi montrer que $\chi(T_2T_1) = \chi(T_1) + \chi(T_2)$ (voir le livre de Lang).

indications♠ ;Corrigé♣

Indications 58 *montrer que* $u \in H_\sharp^{k+2}$ *en raisonnant par récurrence sur* k*.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 59 *essayer* $\sin(nx)$ *et* $\cos(nx)$*.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 60 *dériver deux fois l'équation aux valeurs propres.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 61 *projeter sur le sous-espace de* $L^2[-1,1]$ *engendré par* $\{1, x, x^2\}$*.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 62 *résoudre d'abord l'équation homogène (*$\alpha = \beta = 0$*).*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 63 *revoir le cas périodique en dimension 1 traité dans le cours*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 64 *revoir la preuve de l'alternative de Fredholm.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 65 *introduire des bases.*

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Indications 66 *1) revoir les propriétés des opérateurs compacts autoadjoints. 2) déterminer le noyau et l'image. 3) le sens direct est sans difficulté.*
Pour la réciproque, noter que $\ker T \cap J = \{0\}$ *et que l'on a une injection linéaire* $\mathcal{E}_2/\mathrm{Im}(T) \to \mathcal{E}_2/M$*.*
4) une petite perturbation d'un isomorphisme reste un isomorphisme.
Pour montrer que $\chi(S) = \chi(T)$*, pour* S *assez proche de* T *en norme, introduire un supplémentaire de dimension finie* H *de* $J + \ker S$ *et remarquer que* $\mathcal{E}_2/\mathrm{Im}(S)$ *est isomorphe au quotient de* $\mathcal{E}_2/S(J)$ *par* $\mathrm{Im}(S)/SJ$*.*
5) introduire la déformation $t \mapsto \mathbb{1} + tA$*,* $0 \le t \le 1$*.*
6) Si T *est Fredholm, on prendra pour* S *l'application définie par* T^{-1} *de* $\mathrm{Im}(T)$ *sur* J *et par 0 sur* L*.*
La réciproque est facile ainsi que la suite.

Exercice : ♠;Corrigé : ♣

Correction 59 *On a établi le résultat dans le cours pour $k = 1$ (proposition 5.11). Supposons le résultat vérifié pour $k-1$. D'après le théorème de Sobolev, il suffit de montrer que $u \in H_\sharp^{k+2}$ (ce qui entraine que $u \in C^{k+1}$). On remarque d'abord que $f - qu \in H_\sharp^k$. Comme dans la preuve de la proposition 5.11, on montre alors qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout polynôme trigonométrique v on a*

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(u)\overline{c_n(v)}| \leq C \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-k}|c_n(v)|^2\right)^{1/2}$$

Quitte à changer de notations (et de constante C) on peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u)\overline{c_n(v)}| \leq C \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-k-1}|c_n(v)|^2\right)^{1/2}$$

Il résulte alors du chapitre 3 (dualité) que $\{c_(u)\} \in \ell_{2;k+1}$ et donc $u \in H_\sharp^{k+2}$. $\square$

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 60 *1) On vérifie que T est de classe Hilbert-Schmidt (il admet un noyau intégrable dans L^2) donc compact. Son noyau étant symétique et réelle, T est autodjoint.*
2) Posons $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} K(t)\cos(nt)dt$, $e_n(x) = \cos(nx)$, $f_n(x) = \sin(nx)$. On vérifie immédiatement que $Te_n = \pi a_n e_n$ et $Tf_n = \pi a_n f_n$. On a donc une base orthogonale de vecteurs propres $\{e_n, f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Le théorème de Mercer ne s'applique pas car l'opérateur T n'est pas nécessairement positif.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 61 *On cherche les solutions de l'équation aux valeurs propres*

$$\int_0^1 K(x,y)u(y)dy = \lambda u(x) \tag{5.138}$$

En dérivant deux fois par rapport à x on trouve

$$\lambda u'' = -u(x)$$

Si $\lambda = 0$ alors $u = 0$. Supposons $\lambda \neq 0$. On a alors $u(0) = u(1) = 0$. On trouve donc une solution non triviale si et seulement si $\lambda = \frac{1}{n^2\pi^2}$ associée au vecteur propre $e_n(x) = \sin(n\pi x)$. Le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$ étant total dans $L^2[0,1]$ on a obtenu une base de vecteurs propres.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 62 *Suivant l'indication on se ramène à un problème aux valeurs propres en dimension finie.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 63 *On commence par le problème homogène*

$$u(x) = \lambda \int_0^1 xy^2 u(y)dy$$

$\lambda \neq 0$, u est donc linéaire et reportant dans l'équation, $u(x) = x$ est vecteur propre si et seulement si $\lambda = 4$.
On a aussi besoin de trouver les solutions du problème transposé

$$v(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y v(y)dy.$$

Les solutions sont engendrées par $v(x) = x^2$ si et seulement $\lambda = 4$.
Par conséquent, l'équation

$$u(x) = \lambda \int_0^1 xy^2 u(y)dy + \alpha x + \beta. \tag{5.139}$$

a une solution et une seule pour $\lambda \neq 4$, quelques soient α, β.
Si $\lambda = 4$, l'équation (5.139) a une solution si et seulement si on a $\int_0^1 x^2(\alpha x + \beta)dx = 0$. C'est à dire si et seulement si $3\alpha + 4\beta = 0$.

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 64 *revoir le cas périodique à une variable traité dans le cours.*

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 65 *i) S étant un opérateur compact, il suffit de montrer que $\mu - S$ est injectif. Soit v tel que $Sv = \mu v$. On a alors $PTv = TPv = \mu v$. Or $Pv = v$ (car $\mu \neq 0$). On a donc $Tv = \mu v$ avec $v \in \ker(\mathbb{1} - T)^\nu$ et puisque $\mu \neq 1$ on en déduit que $v = 0$.*
ii) $Tv = \mu v$ si et seulement si $SPv = \mu Pv$ et $RQv = \mu Qv$. Il résulte alors de i) que si $\mu \neq 0$ et $\mu \neq 1$ alors μ est valeur propre de T si et seulement si μ est valeur propre de R.
On montre l'égalité des indices par le même genre de raisonnement (revoir le cours). □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 66 *Supposons F de dimension finie. Soit $\{e_1, \cdots, e_N\}$ une base de F. On désigne par $\{f_1, \cdots, f_N\}$ la base duale. Les f_j étant des formes linéaires continues sur F on peut les prolonger par le théorème de Hahn-Banach en des formes linéaires continues, encore notées f_j, sur $\mathcal{E}$. Définissons alors $G = \bigcup_{1 \leq n \leq N} \ker(f_n)$. G est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}$. On vérifie que $F \cap G = \{0\}$ et que $G + F = \mathcal{E}$.*
Supposons F de codimension finie. Soit $\{\dot{e}_1, \cdots, \dot{e}_N\}$ une base de $\mathcal{E}/F$ ($u \mapsto \dot{u}$ désigne la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}/F$).
On désigne par G le sous-espace engendré par $\{e_1, \cdots, e_N\}$. On vérifie alors que $F \cap G = \{0\}$ et que $G + F = \mathcal{E}$.□

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Correction 67 *1) si A est compact et autoadjoint, on a vu dans le cours que $\ker(\mathbb{1} - A) = \mathrm{Im}(\mathbb{1} - A)^\perp$, que $\ker(\mathbb{1} - A)$ est de dimension finie et $\mathrm{Im}(\mathbb{1} - A)$ est fermée. Il en résulte d'une part que $\mathbb{1} - A$ est Fredholm et d'autre part que $\dim(\ker(\mathbb{1} - A)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(\mathbb{1} - A))$ et donc $\chi(\mathbb{1} - A) = 0$.*
2) On montre facilement que T est surjectif et $\ker(T)$ est de dimension 1.
3) Si T est Fredholm, on a alors $(u, v) \mapsto (Tu, v)$ est clairement bijectif. Le théorème de l'application ouverte entraine qu'elle est bicontinue.
Inversement si $(u, v) \mapsto (Tu + v)$ est bijective et bicontinue, on vérifie facilement que $\ker S \cap J = \{0\}$ et que l'on a une injection linéaire $\mathcal{E}_2/\mathrm{Im}(S) \to \mathcal{E}_2/M$. La première propriété entraine que $\ker T$ est de dimension finie et la deuxième que $\mathrm{Im}(S)$ est de codimension finie, donc fermée d'après un exercice précédent (70). T est donc Fredholm.
4) Si T est un opérateur de Fredholm, d'aprés la question pécédente $(u, v) \mapsto (Tu + v)$ et bicontinue. Il en résulte que si $\|T - S\| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ assez petit) ,alors $(u, v) \mapsto (Su + v)$ est encore une bijection linéaire bicontinue et la question précédente entraine que S est Fredholm. L'ensemble des opérateurs de Fredholm est donc un ouvert.
Soit H un supplémentaire de dimension finie de $J + \ker S$. On remarque facilement en faisant un peu d'algèbre linéaire que $\mathcal{E}_2/\mathrm{Im}(S)$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{E}_2/S(J)$ par $\mathrm{Im}(S)/S(J)$. On en déduit que

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(S) = \dim(\mathcal{E}_2/S(J)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(S)/S(J))$$

Or SJ est isomorphe à M. Il en résulte que

$$\chi(S) = \dim(\ker(S)) + \dim(H) - \dim(L) = \dim(\ker(T)) - \dim(L) = \chi(T).$$

L'indice χ est donc une fonction continue sur l'ouvert des opérateurs de Fredholm.
5) D'après ce qui précède, $t \mapsto \chi(\mathbb{1} + tA)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$. Cette fonction étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $[0, 1]$ étant connexe, elle est constante. D'où $\chi(\mathbb{1} + A) = \chi(\mathbb{1}) = 0$.
6) Supposons T Fredholm. T est une bijection de J sur $\mathrm{Im}(T)$. On désigne par T^{-1} son inverse et par S le prolongement par 0 sur L de T^{-1}. On obtient alors facilement les égalités

$$ST = \pi_J = \mathbb{1} - \pi_N \tag{5.140}$$
$$TS = \pi_M = \mathbb{1} - \pi_L \tag{5.141}$$

où π_F désigne la projection naturelle sur le sous-espace fermé F parallélement à son supplémentaire. π_N et π_L sont de rang fini donc compacts.
Pour la réciproque, on remarque d'une part $\ker(T) \subseteq \ker(ST)$ donc $\dim(\ker(T)) < +\infty$ et d'autre part que $\mathrm{Im}(TS) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ donc $\mathrm{Im}(T)$ est de codimension finie donc fermée. Il en résulte que T est Fredholm.
Les applications qui suivent sont sans difficulté. □

Exercice : ♠ ;Indication : ♣

Intégration et Analyse de Fourier

L'*analyse de Fourier* a été crée au XIX^e siècle pour résoudre le problème de la décomposition d'une onde périodique suivant ses différentes harmoniques. J. Fourier (1768–1830) s'est particulièrement intéressé à la propagation de la chaleur, et c'est à cette occasion qu'il a eu l'idée de décomposer toute fonction périodique en une somme infinie de sinus et cosinus (série *de Fourier*). Lorsque la fonction à analyser n'est pas périodique, on remplace la décomposition en série par une "décomposition continue" sous forme d'intégrale. Dans les deux cas, l'analyse consiste à étudier les fonctions non pas de manière locale comme dans les développements limités, mais d'une manière globale en les représentant comme une superposition d'exponentielles complexes, grâce à un jeu de formules permettant de faire l'analyse et la synthèse harmoniques d'un signal représenté par une fonction f.

Cette analyse utilise de façon essentielle les intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. Or il se trouve que l'intégrale de Riemann n'est pas suffisante et qu'il est plus efficace pour les applications de travailler dans un cadre un peu plus général. C'est pourquoi nous commençons par décrire les résultats de la *théorie de l'intégration* de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Les idées qui sous tendent la théorie de l'intégration sont simples et naturelles (mesures d'aires et de volumes) ; cependant son exposé complet présente de réelles difficultés conceptuelles et techniques. C'est pourquoi nous serons amenés à admettre quelques résultats lorsque la preuve est trop difficile sans que cela nuise à la bonne compréhension de la théorie et à ses utilisations. Le plan du cours est le suivant

1. Rappels sur la construction de l'intégrale de Riemann.
2. Notion de mesure sur un ensemble muni d'une algèbre ou d'une tribu. La mesure de Lebesgue.
3. Construction de l'intégrale de fonctions sur un espace mesuré. L'intégrale de Lebesgue et ses propriétés.
4. Etude des séries de Fourier.
5. Etude de la transformation de Fourier.

Ce texte contient les énoncés et les définitions donnés dans l'exposé oral ainsi que des commentaires, mais ne contient pas de démonstrations. Certaines démonstrations seront données dans le cours. Il n'est pas indispensable de connaître la preuve des résultats admis dans ce cours ; pour les curieux nous renvoyons aux ouvrages mentionnés à la fin de ces notes.

A.1 L'intégrale de Riemann

La notion première est celle de longueur d'un intervalle. Si I est un intervalle borné de l'axe réel $\mathbb{R}$, d'extrémités $\alpha \leq \beta$, on appelle longueur de I le nombre réel $\ell(I) = \beta - \alpha$. A partir de là on définit l'intégrale de fonctions f définies sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Commençons par le cas où f est une fonction en escalier. Celà veut dire que f est une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices [8] d'intervalles contenus dans $[a, b]$. On a donc $f = \sum_{1\leq j\leq N} \lambda_j \mathbb{1}_{I_j}$ avec $[a, b] = \cup_{1\leq j\leq N} I_j$, les intervalles I_j étant 2 à deux disjoints. On définit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{1\leq j\leq N} \lambda_j \ell(I_j)$$

On vérifie que si 2 partitions de $[a, b]$ définissent la même fonction en escalier alors les intégrales ont la même valeurs. De plus on a les propriétés classiques suivantes de l'intégrale. On désigne par $\mathcal{E}_{[a,b]}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$. Pour tout $f, g \in \mathcal{E}_{[a,b]}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

(P1) Linéarité :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b \mu f(x)dx = \mu \int_a^b f(x)$$

(P2) Monotonie : Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ et } \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(P3) Additivité : pour tout $c \in [a, b]$ on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

[8] on appelle indicatrice d'une partie A d'un ensemble E la fonction notée $\mathbb{1}_A$ valant 1 sur A et 0 ailleurs

Définition A.1 *Soit f définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si f est bornée et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe 2 fonctions en escalier φ_ε et ψ_ε telles que*

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \text{ sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))dx \leq \varepsilon \tag{A.142}$$

On définit alors l'intégrale de Riemann de f par les formules équivalentes suivantes

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{E}_{[a,b]},\ \varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in [a,b]\right\} \tag{A.143}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx,\ \psi \in \mathcal{E}_{[a,b]},\ f(x) \leq \psi(x),\ \forall x \in [a,b]\right\} \tag{A.144}$$

Notons $\mathcal{R}_{[a,b]}$ l'ensembles des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. On montre facilement que $\mathcal{R}_{[a,b]}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que les propriétés (P1), (P2), (P3) sont encore vérifiées.

Exemples et contrexemple

Toute fonction continue sur [a, b] est Riemann intégrable et on a l'expression suivante

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{1\leq j\leq n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)\right] \tag{A.145}$$

Toute fonction continue par morceaux est également Riemann intégrable. Plus généralement, si f_n est une suite de fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ et si $f_n$converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Voici un exemple simple de fonction qui n'est pas Riemann intégrable : la fonction indicatrice de l'ensemble $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$.

Pour étendre la notion d'intégrale à des classes de fonctions plus générales et aussi pour avoir des théorèmes de passage à la limite moins contraignants, H. Lebesgue a eu l'idée de définir l'intégrale en découpant l'image de la fonction à intégrer en petits intervalles au lieu de découper l'intervalle sur lequel on intègre comme dans l'approche de Riemann. Cette modification d'apparence anodine rend la théorie de l'intégration beaucoup plus puissante et d'une portée plus générale bien utile par exemple en probabilités.

Décrivons rapidement les grandes lignes de cette approche qui sera expliquée plus en détails ensuite. Sur $\mathbb{R}$, Lebesgue distingue une classe très vaste, notée $\Lambda(\mathbb{R})$, de parties dites mesurables, contenant les intervalles, et pour lesquels on sait définir une longueur prolongeant naturellement la longueur d'un intervalle. Notons $\ell(A)$ la longueur de la partie $A \in \Lambda(\mathbb{R})$. A plusieurs variables réelles on suit la même démarche en remplaçant les intervalles par les pavés et la longueur par le volume d-dimensionnel.

– Supposons d'abord que $f = \sum_{1\leq j\leq n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ où $A_1, \cdots A_n$ sont des parties mesurables $\alpha_j \in \mathbb{C}$ (on dit encore que f est étagée). On définit naturellement $\displaystyle\int f(x)dx = \sum_j \alpha_j \ell(A_j)$.
– Si f, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, est mesurable au sens où pour tout intervalle J de $[0,\infty]$, $f^{-1}(J)$ est mesurable, on montre alors qu'il existe au moins une suite croissante f_n de fonctions étagées telle que $\lim f_n = f$ simplement. Ce qui permet de définir naturellement $\displaystyle\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx$. Par exemple on peut choisir la suite

$$f_n = \sum_{0\leq k\leq n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{k}{2^n},\frac{(k+1)}{2^n}[} + n\mathbb{1}_{f^{-1}[n,\infty]}$$

Il y a certes beaucoup de travail pour montrer que cette idée conduit à une théorie pertinente. Nous allons mettre en évidence les points essentiels, en admettant les points techniques les plus difficiles dont le détail est exposé dans les ouvrages figurant dans la bibliographie. Introduisons d'abord quelques concepts généraux, un peu abstraits mais indispensables pour bien comprendre les fondements de la théorie de l'intégration ainsi que son prolongement à la théorie des probabilités.

A.2 Algèbres, Tribus et Mesure

Définition A.2 *Soit X un ensemble. On appelle algèbre (de Boole) sur X tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X possédant les propriétés suivantes*
(i)$X \in \mathcal{A}$
(ii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $X\backslash A \in \mathcal{A}$
(iii) si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$

Définition A.3 *Soit X un ensemble. On appelle tribu sur X (ou σ-algèbre) toute algèbre de Boole $\mathcal{A}$ sur X, stable par réunion dénombrable, autrement dit, si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \geq 1$ alors $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.*

exemples :(i) l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une tribu ; $\{X, \emptyset\}$ est une tribu et sont respectivement la plus grande et la plus petite tribu sur X.
(ii) Sur l'intervalle $[a, b[$ l'ensemble $\mathcal{A}_{[a,b[}$ des réunions finies constituées de sous-intervalles de la forme $[\alpha, \beta[$ est une algèbre de Boole mais n'est pas une tribu.

Proposition A.4 *Soit X un ensemble et $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ une famille de tribus sur X. Alors $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une tribu sur X.*

Définition A.5 *Si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de X, on appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant C, notée $\tau[\mathcal{C}]$. Autrement dit on a $\tau[\mathcal{C}] = \cap\mathcal{A}$, l'intersection portant sur toutes les tribus $\mathcal{A}$ sur X contenant $\mathcal{C}$.*
Si E est un espace topologique, on appelle tribu borélienne sur E la tribu, notée $\mathcal{B}(E)$, engendrée par les ouverts de E.

On définit maintenant une notion qui étend la notion de longueur d'un intervalle (d'aire ou de volume) tout en en conservant les propriétés essentielles

Définition A.6 *Soient X un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur X. On appelle fonction d'ensemble sur $\mathcal{A}$ toute application μ définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.*
(i) On dit que la fonction d'ensemble μ est additive si $\mu(\emptyset) = 0$ et si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
(ii) On dit que la fonction d'ensemble additive μ est σ-additive si pour toute suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_{n\geq 1}A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a

$$\mu(\cup_{n\geq 1}A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \tag{A.146}$$

(iii) On appelle mesure sur $\mathcal{A}$ toute fonction d'ensemble σ-additive.
(iv) Une mesure μ sur $\mathcal{A}$ est dite finie si $\mu(X) < +\infty$. Si $\mu(X) = 1$ on dit que μ est une mesure de probabilités.
(v) Une mesure μ sur $\mathcal{A}$ est dite σ-finie s'il exite une suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X = \cup_{n\geq 1}A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.
(vi) On appelle espace mesuré la donnée d'un triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ où X est un ensemble, A une tribu sur X et μ une mesure sur $\mathcal{A}$

Proposition A.7 *Une fonction d'ensemble additive μ sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est σ-additive si et seulement si pour toute suite croissante $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_{n\geq 1}A_n \in \mathcal{A}$ on a*

$$\mu(\cup_{n\geq 1}A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \tag{A.147}$$

Une fonction d'ensemble additive μ sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ telle que $\mu(X) < +\infty$ est σ-additive si et seulement si pour toute suite décroissante $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\cap_{n\geq 1}A_n = \emptyset$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0 \tag{A.148}$$

Notons la conséquence de la σ-additivité d'une mesure : pour toute suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $galA$ on a l'inégalité

$$\mu\left(\cup_{n\geq 1}A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \tag{A.149}$$

L'exemple le plus simple d'une mesure est la mesure de comptage ou mesure du cardinal. Soit X un ensemble (non vide) muni de la tribu de toutes les parties de X. Pour tout $A \subseteq X$ on pose $\nu_{c(A)} = card(A)$ (i.e le nombre d'éléments de A). On vérifie facilement que l'on obtient une mesure et que ν_c est finie si et seulement si l'ensemble X est fini et que ν_c est σ-finie si et seulement si X est dénombrable. En choisissant $X = \mathbb{N}$, nous verrons que la théorie de l'intégration pour la mesure du cardinal se ramène à la théorie des séries numériques.

La construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ commence réellement par le résultat suivant. On fixe un pavé de $\mathbb{R}^d$, par commodité de la forme $P = \prod_{1\leq j\leq d} [a_j, b_j[$. Son volume p-dimensionnel, noté $\lambda_d(P)$, se calcule naturellement par la formule $\lambda_d(P) = \prod_{1\leq j\leq d} (b_j - a_j)$. Considérons sur P l'algèbre de Boole notée $\mathcal{A}_P$, constituée par les réunions finies de pavés $Q = \prod_{1\leq j\leq d} [\alpha_j, \beta_j[$ où $a_j \leq \alpha_j \leq \beta_j \leq a_j$.

Proposition A.8 *λ_d est une mesure finie sur $\mathcal{A}_P$.*

L'algèbre de Boole $\mathcal{A}_P$ est trop restreinte. Nous admettrons le théorème de prolongement suivant dont on pourra trouver une démonstration dans le livre de F. Laudenbach (p. 131-133).

Théorème A.9 (Carathéodory) *Soit μ une mesure σ-finie sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ d'un ensemble X. Alors μ admet un unique prolongement en une mesure sur la tribu $\tau(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.*

Corollaire A.10 (Existence de la mesure de Borel-Lebesgue) *Pour tout pavé P, la mesure λ_d sur $\mathcal{A}_P$ se prolonge en une unique mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(P)$ de P. De plus λ_d se prolonge en une unique mesure σ-finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Commentaires
Remarquons que la tribu engendrée par $\mathcal{A}_P$ coïncide avec la tribu borélienne car tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme réunion dénombrable de pavés ouverts. La preuve du corollaire A.10 se déduit assez facilement du Thérème A.9 pour P. Pour étendre λ_d à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on procède comme suit. On considère une suite croissante de pavés P_n telle que $\cup_{n\geq 1} P_n = \mathbb{R}^d$ et on pose $\tilde{\lambda}_d(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_d(A\cap P_n)$. On vérifie que $\tilde{\lambda}_d$ est un mesure que l'on notera encore λ_d. Cette mesure sera appelée **mesure de Borel-Lebesgue**. Voici quelques propriétés de cette mesure

Proposition A.11 *La mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par les translations et plus généralement par les isométries de $\mathbb{R}^d$. Concernant les homothéties on a : pour tout réel $\delta > 0$ et pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$ on a $\lambda_d(\delta A) = \delta^d \lambda_d(A)$*

Commentaire Soit I une isométrie de $\mathbb{R}^d$. I transforme tout borélien en un borélien. Posons $\lambda_d^I(A) = \lambda(I_d^{-1}(A))$. On vérifie que λ_d^I est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et que cette mesure coïncide avec λ_d sur les pavés. L'unicité de la mesure de Borel-Lebesgue donne le résultat. On procède de manière analogue pour les homothéties. Ces résultats sont des cas particuliers du théorème de changement de variables énoncé plus loin.

Le résultat suivant sera admis. (voir le livre de F. Laudenbach ou de W. Rudin). Il permet d'approcher “en mesure” les boréliens de mesure finie par des ensembles plus familiers.

Proposition A.12 . *Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(A) < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K et un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subseteq A \subseteq U$ et $\lambda_d(U\backslash K) \leq \varepsilon$.*

Il reste une étape à franchir pour obtenir la mesure de Lebesgue. Nous verrons dans la suite que la notion d'ensemble négligeable joue un rôle important et qu'il est commode de rendre mesurable tous les ensembles négligeables.

Définition A.13 *Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Une partie Y (quelconque) de X est dite μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ telle que $Y \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Si toutes les parties négligeables sont mesurables la mesure est dite complète.*
On dit qu'une propriété $P(x)$ dépendant d'un point $x \in X$ est vraie **presque partout** *si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.*

Proposition A.14 *Toute réunion dénombrable d'ensembles μ-négligeable est μ-négligeable*

Proposition A.15 *Une partie Y de $\mathbb{R}^d$ est Lebesgue-négligeable si et et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tel que $Y \subseteq U$ et $\lambda_d(U) \leq \varepsilon$.*

Définition A.16 *Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est dite Lebesgue mesurable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des boréliens E_ε, F_ε tels que $E_\varepsilon \subset D \subset F_\varepsilon$ et $\lambda_d[F_\varepsilon \backslash E_\varepsilon] \leq \varepsilon$. Désignons par $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des parties Lebesgue-mesurable.*
On prolonge alors la mesure λ_d à $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ par les égalités :

$$\lambda_d(D) = \sup\{\lambda_d(E),\ E \text{ borélien}, E \subseteq D\} = \inf\{\lambda(F),\ F \text{ borélien},\ D \subseteq F\} \quad (A.1)$$

Proposition A.17 *$\Lambda(\mathbb{R}^d)$ est une tribu, appelée tribu de Lebesgue et λ_d se prolonge à $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ en une unique mesure appelée mesure de Lebesgue (d-dimensionnelle).*

Commentaire La mesure de Lebesgue est complète. Par le même procédé, on peut toujours rendre une mesure complète en élargissant la tribu. (cf le livre de Rudin).

Remarque A.18 *$\Lambda(\mathbb{R}^d)$ contient toutes les parties de $\mathbb{R}^d$ qui interviennent effectivement en analyse (les boréliens et les ensembles négligeables). D'ailleurs pour montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}^d$ non Lebesgue mesurables on fait appel à l'axiome du choix non dénombrable. Dans ce cours, sauf exceptions, on admettra les propriétés de mesurabilité utiles concernant la mesure de Lebesgue.*
On montre facilement que $D \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si il existe des boréliens E, F tels que $E \subset D \subset F$ et $\lambda_d[F\backslash E] = 0$.

A.3 L'intégrale de Lebesgue

Notre point de départ est un espace mesuré quelconque mais il indispensable d'avoir en tête deux exemples fondamentaux : la mesure de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \Lambda(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et la mesure du cardinal $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu_c)$ et de suivre les constructions et les propriétés énoncées pour ces 2 exemples au moins. L'objectif principal est de comprendre l'intégration des fonctions par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Cependant la mesure du cardinal peut aider car elle est plus simple (les intégrales sont alors des sommmes de séries).

Rappelons que pour définir l'intégrale de Riemann, les fonctions élémentaires sont les fonctions en escalier. Dans la théorie de l'intégration de Lebesgue, les fonctions élémentaires sont les **fonctions étagées**.

Définition A.19 *Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$ et A une tribu sur X. On dit que f est $\mathcal{A}$-étagée si l'on peut écrire f sous la forme $f = \sum_{1\le j\le N} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ où N est un entier, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$.*
Soit f une fonction $\mathcal{A}$-étagée , positive et μ une mesure sur $\mathcal{A}$. On appelle intégrale de f par rapport à μ l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{1\le j\le N} \alpha_j \mu(A_j) \tag{A.151}$$

Remarque A.20 *Il n'est pas difficile de voir que le membre de droite de (A.151) ne dépend que de f et que l'on peut se ramener au cas où les A_j sont 2 à 2 disjoints.*
Supposons X fini et considérons sur X la mesure du cardinal. Alors tout fonction f sur X est étagée et on a $\displaystyle\int f(x)d\nu_c(x) = \sum_{x\in X} f(x)$. Ceci est certainement l'exemple le plus élémentaire d'intégrale, qui sert d'ailleurs à définir des moyennes en statistiques. On peut aussi définir des moyennes pondérées en attribuant un poids $p_x \ge 0$ à chaque point x et définir la mesure $\nu(A) = \displaystyle\sum_{x\in A} p_x$.

Malheureusement dans le cas de la mesure de Lebesgue c'est plus compliqué. Il faut introduire la notion de mesurabilité dont la définition ressemble à celle de la continuité d'une fonction sur un espace topologique.

Définition A.21 *Soient $(X, \mathcal{A}$ un espace mesurable et $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $\mathcal{O}$ étant l'ensemble des ouverts définissant la topologie ; on dit que $f : X \to E$ est mesurable (ou $\mathcal{A}$-mesurable) si pour tout $U \in \mathcal{B}(E)$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.*
Lorsque $X = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ on dit que f est borélienne ; lorsque $X = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A} = \Lambda(\mathbb{R}^d)$ on dit que f est Lebesgue-mesurable.

Proposition A.22 *$f : X \to E$ est mesurable si et seulement si pour tout ouvert U de E, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.*
Soient 2 espaces topologiques E_1, E_2, g une application continue de E_1 dans E_2 et f une application mesurable de X dans E_1. Alors $g \circ f$ est mesurable de X dans E_2.
$f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

La preuve de la première partie utilise la remarque suivante : l'ensemble de parties de E défini par $\tau(f) = \{A \subseteq E,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu.
Donnons maintenant une liste des principales propriétés des fonctions mesurables numériques qui sont souvent utilisées. Dans ce qui suit toutes les fonctions sont définies sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ munis de la topologie usuelle.

- (M1) f est mesurable si et seulement si pour tout pour tout intervalle ouvert J de $\overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(J)$ est mesurable.
- (M2) f est mesurable si et seulement si pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}[-\infty, a[$ est mesurable.
- (M3) f est mesurable si et seulement si pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}[-\infty, a]$ est mesurable.
- (M4) Si f et g sont mesurables alors $f + g$ et fg sont mesurables.
- (M5) Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables alors $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables. En particulier si $\{f_n\}$ converge simplement sur X vers une fonction f alors f est mesurable.
- (M6) Si f est une fonction mesurable de X dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ alors il existe une suite croissante de fonctions étagées, $\{f_n\}$, convergeant simplement vers f sur X.

Commentaires : La propriété (M6) se démontre en considérant la suite déjà mentionnée dans l'introduction à propos de la mesure de Lebesgue.

Le cadre est maintenant prêt pour donner la définition de l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré quelconque.

Définition A.23 *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. On appelle intégrale de f sur X la quantité définie par l'égalité suivante, dans $\bar{\mathbb{R}}_+$,*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup\left\{\int_X \varphi(x)d\mu(x),\ \varphi \text{ étagée},\ \varphi \le f\right\}. \tag{A.152}$$

*Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est μ-**intégrable** sur X si $\int_X |f(x)|d\mu(x) < +\infty$. On définit alors l'intégrale de f par l'égalité*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x) \tag{A.153}$$

Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable on dit f est μ-intégrable si $|f|$ l'est (module de nombres complexes) et l'intégrale est définie par

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \Re(f(x))d\mu(x) + i\int_X \Im(f(x))d\mu(x) \tag{A.154}$$

Plus généralement si A est une partie mesurable de X on dit que f est intégrable sur A si $\mathbb{1}_A f$ est intégrable sur X et l'on définit l'intégrale de f sur A pour la mesure μ par l'égalité $\int_A f(x)d\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_A(x)f(x)d\mu(x)$. Une partie mesurable A de X est dite intégrable si elle est de mesure finie ou de manière équivalente si $\mathbb{1}_A$ est intégrable.

Remarque A.24 *Nous venons de définir l'intégrale de Lebesgue. Pour $d = 1$ elle généralise l'intégrale de Riemann au sens suivant :*
i) si f est Riemann intégrable sur l'intervalle borné $[a, b]$ alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et les intégrales coïncident.
ii) si f possède une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $\mathbb{R}$ alors f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ et les intégrales coïncident.
iii) On peut montrer qu'une fonction f Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ est Riemannn intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. Dans ce cas les deux notions d'intégrale coïncident.

Commençons par énoncer quelques propriétés élémentaires pour l'intégrale des fonctions positives.

Proposition A.25 *Soient f, g, 2 fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors*

$$\int_X (f(x) + g(x))d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x) \tag{A.155}$$

Si $f \leq g$ sur X alors

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x) \tag{A.156}$$

Pour tout réel $\lambda \geq 0$ on a

$$\int_X \lambda f(x)d\mu(x) = \lambda\int_X f(x)d\mu(x) \tag{A.157}$$

$$\{\int f(x)d\mu(x) = 0\} \iff \{f = 0, \mu - pp\} \tag{A.158}$$

Enfin si $\int_X f(x)d\mu(x) < +\infty$ alors $f(x) < +\infty$ $\mu - pp$.

Rappelons que $\{f = 0, \mu - p.p\}$ signifie $\mu\{x \in X, \ f(x) = 0\} = 0$. L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ possède des propriétés d'invariance supplémentaires (voir pour la mesure de Lebesgue plus haut)

Proposition A.26 *On suppose que f est Lebesgue mesurable $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ou Lebesgue -intégrable sur $\mathbb{R}^d$.*
(i) Pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^d$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(x - x^0)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ (invariance par translation).
(ii) Plus généralement, pour toute isométrie I de $\mathbb{R}^d$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(I(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$.
Pour toute homothétie de rapport $\delta > 0$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)dx = \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x))dx$

La propriété suivante est fondamentale pour l'étude des limites d'intégrales

Théorème A.27 (Convergence monotone) *Soit $\{f_n\}$ une suite* **croissante** *de fonctions mesurables positives sur X. Alors la fonction $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est mesurable et l'on a*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x) \tag{A.159}$$

En terme de série le résultat précédent donne le suivant

Corollaire A.28 *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X. Alors la fonction $f(x) = \sum_{1\leq n\leq\infty} f_n(x)$ est mesurable et l'on a*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{1\leq n\leq\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x) \tag{A.160}$$

Le résultat fournit de nombreux exemples de mesures.

Corollaire A.29 *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Posons $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$ pour $A \in \mathcal{A}$. Alors μ_f est une mesure. C'est la mesure de densité f par rapport à μ.*

Du théorème de convergence monotone on déduit le résultat suivant

Lemme A.30 (Lemme de Fatou) *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X. Alors la fonction $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ est mesurable et l'on a*

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) \tag{A.161}$$

Ce lemme technique est utile pour montrer qu'une fonction limite est intégrable. Il joue un rôle important dans la preuve du résultat suivant qui est l'un des plus grands succès de la théorie de l'intégrale de Lebesgue

Théorème A.31 (Convergence dominée-Lebesgue) *Soit (f_n) une suite de fonctions μ-intégrables qui converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une fonction positive g, μ- intégrable (* indépendante de *n) telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$. Alors la fonction f est μ-intégrable et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f(x) - f_n(x)|d\mu(x) = 0, \tag{A.162}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x). \tag{A.163}$$

Corollaire A.32 (intégrales dépendant d'un paramètre) *Soit une application f de $X \times E$ dans $\mathbb{C}$ où E est un espace métrique. On suppose remplies les conditions suivantes*
(i) Pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue.
(ii) Pour tout $t \in E$; $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable.
(iii) Il existe une fonction positive g, μ- intégrable, telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times E$.
Alors la fonction $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$ est continue sur E.

Corollaire A.33 (dérivabilité par rapport à un paramètre) *Soit une application f de $X \times]a,b[$ dans $\mathbb{C}$ où $]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose remplies les conditions suivantes*
(i) Pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable.
(ii) Pour tout $t \in E$; $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est mesurable.
(iii) Il existe une fonction positive g, μ- intégrable telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$ pour tout $(x,t) \in X \times E$.
(iv) Il existe $t_0 \in]a,b[$ tel que $x \mapsto f(x,t_0)$ est intégrable.
Alors la fonction $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$ est dérivable sur $]a,b[$ et on a la formule de Leibniz

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x). \tag{A.164}$$

Remarque A.34 *Dans le théorème de convergence dominée et ses corollaires on a les mêmes conclusions en supposant seulement que les hypothèses ont lieu μ-pp sur X puisque l'on peut toujours supposer que la mesure μ est complète.*

On désigne par $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables sur X à valeurs complexes. Pour la mesure de Lebesgue sur une partie Lebesgue mesurable Ω de $\mathbb{R}^d$ on utilise la notation simplifiée : $\mathcal{L}^1(\Omega) = \mathcal{L}^1(\Omega,\Lambda(\Omega),\lambda_d)$.

Proposition A.35 *$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace vectoriel et $f \mapsto \int_X f(x)d\mu(x)$ est une forme linéaire continue pour la semi-norme $\|f\|_1 = \int_X |f(x)|d\mu(x)$. Plus precisèment on a*

$$|\int_X f(x)d\mu(x)| \leq \int_X |f(x)|d\mu(x) \tag{A.165}$$

Il est souvent préférable de travailler avec des normes plutôt que des semi-normes. On considère alors l'espace $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ pour la relation $f \equiv g$ si et seulement si $f = g$, $\mu - pp$. $\dot{f} \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.
Pratiquement, tant que celà n'introduit pas de confusion, on ne distinguera pas les fonctions mesurables et leurs classes d'équivalence pour l'égalité μ-pp tant que la mesure μ est fixée.

Théorème A.36 *$L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace de Banach. L'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$, avec A intégrable, est dense dans $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.*

Une autre classe importante est l'ensemble des fonctions de carré intégrable. On désigne par $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \mapsto \mathbb{C}$ telles que $\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty$. $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace vectoriel muni de la semi-norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

L'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ se déduit de **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int_X |f(x)|g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_X |g(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \tag{A.166}$$

Comme pour $\mathcal{L}^1$ on obtient un espace vectoriel **normé** $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sur cet espace on a alors une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive,

$$< f, g >= \int_X f(x)\bar{g}(x)d\mu(x)$$

de telle sorte que $< f, f >= \|f\|_2^2$

Théorème A.37 *$L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert, c'est à dire un espace de Banach pour une norme définie par un produit scalaire. L'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions indicatrices $1\!\!1_A$ avec A intégrable est dense dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Lorsque $X = \mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ sont les complétés pour les normes $\|\cdot\|_p$ des l'espace $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues, nulles en dehors d'un compact.

Proposition A.38 *Pour $p = 1, 2$, $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Pour le calcul des intégrales de fonctions de plusieurs variables réelles il est souvent utile de réduire le nombre de variables. Celà fait appel à la notion de mesure produit dont on admettra l'existence. On considère 2 espaces mesurés σ-finis, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. On désigne par $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ l'ensemble des parties de $X \times Y$ formés des cylindres $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est une algèbre de Boole. On définit alors la fonction additive d'ensemble $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Soit $\mathcal{C}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On démontre le résultat suivant (cf le livre de W. Rudin)

Théorème A.39 (Mesure Produit) *$\mu \otimes \nu$ est une mesure sur $\mathcal{C}$. On a de plus la propriété suivante (intégration par tranches)*
Soit $C \in \mathcal{C}$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$ on pose $C_x = \{y \in Y,\ (x, y) \in C\}$ et $C^y = \{x \in X,\ (x, y) \in C\}$. Alors $C_x \in \mathcal{B}$, $C^y \in \mathcal{A}$, $x \mapsto \nu(C_x)$ est $\mathcal{A}$ mesurable, $y \mapsto \nu(C^y)$ est $\mathcal{B}$ et on a

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)d\nu(y) \tag{A.167}$$

On en déduit l'important théorème de Fubini

Théorème A.40 (Fubini) *On conserve les notations du théorème précédent.*
(i)Soit $f\ : X \times Y \mapsto [0, \infty]$ une fonction $\mathcal{C}$-mesurable. Alors pour tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}$-mesurable et $x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est $\mathcal{A}$-mesurable. La même propriété a lieu en échangeant les rôles de x et y et on a les égalités

$$\int_{X\times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x) =$$
$$\int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \tag{A.168}$$

(ii) Soit $f\ : X \times Y \mapsto \mathbb{C}$ une fonction $\mu\otimes\nu$-intégrable. Alors pour tout pour μ-presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est ν-intégrable et $x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est μ-intégrable. La même propriété a lieu en échangeant les rôles de x et y et on a encore les égalités (A.168).

Remarque A.41 *On a souvent intérêt à utiliser les résutat (i) et (ii) successivement. (i) appliqué à $|f|$ pour montrer que f est $\mu\otimes\nu$-intégrables puis (ii) pour calculer l'intégrale de f.*

Théorème A.42 (Changement de Variables) *Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d$,*
ϕ un difféomorphisme de classe C^1 de U_2 sur U_1 dont on note J_ϕ la matrice jacobienne. Soit $f : U_1 \to \mathbb{C}$ et $g : U_2 \to \mathbb{C}$ définie par $g(y) = f(\varphi(y))|\mathrm{det}J_\varphi(y)|$. Alors f est mesurable si et seulement si g l'est et f est intégrable sur U_1 si et seulement si g est intégrable sur U_2. Dans chacun de ces deux cas on a l'égalité :

$$\int_{U_1} f(x)\,dx = \int_{U_2} f(\varphi(y))|\mathrm{det}J_\varphi(y)|\,dy. \tag{A.169}$$

Rappelons que la matrice jacobienne de φ est la matrice de la différentielle de φ dans la base canonique. Donc si $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_d)$ et $x = (x_1, \cdots, x_d)$, alors les coefficients de J_φ sont donnés par $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$.

A.4 Séries de Fourier

On rappelle que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite *périodique de période T* si $f(t+T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'exemple par excellence de fonction périodique de période T est celui des exponentielles $e^{in\omega t}$ où $n \in \infty$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Le but de ce chapitre est d'examiner à quelles conditions une fonction T-périodique f donnée s'obtient par une *formule de synthèse*

$$f(t) = \sum_{n\in\infty} c_n \, e^{in\omega t} \,.$$

Lorsque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, on obtient facilement que que f est continue et que les coefficients c_n sont donnés par la *formule d'analyse*

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \,.$$

Cette dernière formule conserve un sens pour toute fonction f périodique de période T et intégrable sur $[0,T]$, et les coefficients $c_n(f)$ ainsi définis s'appellent alors les *coefficients de Fourier* de la fonction f. Lorsque l'on ne suppose plus la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ convergente, on peut encore poser la question de la convergence de la *série de Fourier* de f, c'est-à-dire la convergence de la suite $(P_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie par $P_N f(t) = \sum\limits_{-N\leq n\leq N} c_n(f)\, e^{in\omega t}$, ou encore la convergence de la suite $(Q_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes de Cesàro* définie par
$Q_N f(t) = \frac{1}{N}(P_0 f(t) + P_1 f(t) + \cdots + P_{N-1} f(t))$. Les résultats de base se réduisent aux trois théorèmes de convergence ci-dessous.

Théorème A.43 (Jordan-Dirichlet) *Soit une fonction T-périodique $f \in \mathcal{L}^1([0,T])$. On suppose que pour un $t \in \mathbb{R}$, la fonction f possède des limites à droite et à gauche en t, et que f est dérivable à droite et à gauche en t. Alors la suite numérique $(P_N f(t))$ converge vers*
$\widetilde{f}(t) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2}\big(f(t-s) + f(t+s)\big)$. *Si de plus f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors la suite de fonctions $(P_N f)$ converge uniformément vers f.*

Théorème A.44 (Césaro-Fejér) *Pour toute fonction T-périodique $f \in \mathcal{L}^1([0,T])$ et tout point $t \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{f}(t) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{2}\big(f(t-s) + f(t+s)\big)$ existe, les sommes de Cesàro $(Q_N f(t))$ convergent vers $\widetilde{f}(t)$. Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite de fonctions $(Q_N f)$ converge uniformément vers f*

Corollaire A.45 (Théorème de Stone-Weierstrass) *Toute fonction continue sur un intervalle borné et fermé $[a,b]$, à valeurs complexes, est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.*

Théorème A.46 (Parseval) *Toute fonction T-périodique $f \in \mathcal{L}^2([0,T])$ est limite en moyenne quadratique sur $[0,T]$ de la suite $(P_N f)$, et on a la formule de Parseval*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt \,.$$

Réciproquement, pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, la suite (f_N) définie par $f_N(t) = \sum\limits_{-N\leq n\leq N} c_n\, e^{in\omega t}$ converge en moyenne quadratique sur $[0,T]$ vers une fonction $f \in \mathcal{L}^2[0,T]$ dont les coefficients de Fourier sont les nombres c_n donnés.

A.5 Produit de convolution et transformation de Fourier

On se place ici dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ de dimension d, où la norme euclidienne d'un vecteur x est notée $|x|$, et le produit scalaire des vecteurs x et ξ est noté $< x, \xi >$.

Comme dans le cas des fonctions périodiques étudié au chapitre précédent, le but est ici de représenter une fonction f comme une superposition d'exponentielles complexes $e^{i<x,\xi>}$, où maintenant ξ parcourt $\mathbb{R}^d$. En notant $(2\pi)^{-d}\,\widehat{f}(\xi)$ l'amplitude du mode ξ, on est ainsi conduit à la *formule de synthèse*

$$f(x) = (2\pi)^{-d}\int e^{i<x,\xi>}\,\widehat{f}(\xi)\, d\xi \,.$$

Et toujours comme dans le cas des fonctions périodiques, à cette formule de synthèse correspond une *formule d'analyse* permettant de retrouver les amplitudes dans le signal donné, et qui prend ici la forme

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} f(x)\, dx$$

presque identique à la formule de synthèse.

Reliée de façon étroite à ces deux formules, on définit la notion de *produit de convolution* d'une fonction f par une fonction g. Ce produit de convolution est une fonction dont la valeur au point $x \in \mathbb{R}^d$ représente une moyenne, pondérée par la fonction g, des valeurs prises par la fonction f autour du point x, selon la formule

$$f * g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy\ .$$

Proposition A.47 (Convolution) *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Alors :*

La formule $f * g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$ définit presque partout une fonction $f * g$ intégrable sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie $\int |f * g(x)|\, dx \leq \left(\int |f(x)|\, dx\right)\left(\int |g(y)|\, dy\right)$. La fonction $f * g$ s'appelle le produit de convolution *de f et g. L'opération de convolution définit une loi associative et commutative dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.*

Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Alors la formule $f * g(x) = \displaystyle\int f(x-y)\, g(y)\, dy$ définit presque partout une fonction $f * g$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, et définit partout une fonction $f * g$ continue sur $\mathbb{R}^d$ et tendant vers 0 à l'infini lorsque $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

La convolution permet de construire un outil très utile : les familles régularisantes qui s'obtiennent de la manière suivante. Soit R est une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^d$, intégrable et d'intégrale égale à 1, et dont les dérivées à tout ordre sont intégrables, on note R_ϵ la fonction $R_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} R(x/\epsilon)$ obtenue à partir de R par changement d'échelle en conservant l'identité $\int R_\epsilon(x)\, dx = 1$; une telle famille $(R_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est traditionnellement appelée *approximation de l'identité*, ou encore *suite régularisante*. En effet on montrera en particulier que si $f \in \mathcal{L}^1$ alors $f * R_\epsilon$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et converge vers f dans $f \in \mathcal{L}^1$ lorsque ϵ tend vers 0.

Proposition A.48 *Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ qui est intégrable ainsi que ses dérivées premières $(\partial g/\partial x_j)$. Si f est bornée, ou intégrable, ou de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors la fonction $f * g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, et $\partial(f * g)/\partial x_j = f * (\partial g/\partial x_j)$ pour tout $j \leq d$. Plus généralement, si g est de classe C^m et de dérivées intégrables jusqu'à l'ordre m, alors la fonction $f * g$ est de classe C^m sur $\mathbb{R}^d$.*

En particulier, si $(R_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation de l'identité, alors la fonction $f * R_\epsilon$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $\epsilon > 0$, et on a :

(a) *Pour toute f qui est* uniformément continue *et* bornée *sur $\mathbb{R}^d$, $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\mathbb{R}^d} |(f * R_\epsilon) - f| = 0$.*

(b) *Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int |(f * R_\epsilon)(x) - f(x)|\, dx = 0$.*

(c) *Pour toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\epsilon \to 0} \|(f * R_\epsilon) - f\|_2 = 0$.*

En particulier, l'ensemble noté $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, des fonctions indéfiniement dérivables sur $\mathbb{R}^d$, nulles en dehors d'un compact, est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p = 1, 2$).

Proposition A.49 (Transformation de Fourier) *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, la formule d'analyse*

$\mathcal{F}f(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} f(x)\, dx$ définit sur $\mathbb{R}^d$ une fonction $\mathcal{F}f$ continue, vérifiant l'inégalité $\sup_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}f| \leq \int |f(x)|\, dx$. La fonction $\mathcal{F}f$ s'appelle la transformée de Fourier *de f.*

$\mathcal{F}f$ définit ainsi une application linéaire continue de l'espace normé $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace, noté $C_b(\mathbb{R}^d)$, des fonctions u continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^d} |f|$.

De plus, on a la propriété fondamentale, pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)\,(\mathcal{F}g)$. Autrement dit la transformation de Fourier échange le produit de convolution et le produit ponctuel.

Exemple On appelle *fonction gaussienne* sur $\mathbb{R}^d$ toute fonction g de la forme $g(x) = a\, e^{-q(x)/2}$ où $a > 0$ et q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^d$. Dans le cas élémentaire de la fonction $g(x) = e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier vaut $\mathcal{F}g(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$. Plus généralement, on obtient par changement de variables que la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne. On verra aussi que le produit de convolution de deux gaussiennes sur $\mathbb{R}^d$ est encore une gaussienne sur $\mathbb{R}^d$. Les fonctions gaussiennes jouent un rôle fondamental en probabilités.

Le lien entre les formules de synthèse et d'analyse est fourni par le résultat suivant. Il est commode d'introduire un nouvel espace de fonctions qui possède de très bonnes propriétés vis-à-is d la transformation de Fourier. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables f sur $\mathbb{R}^d$ telles pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ on ait $\sup_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < +\infty$. La signification des notations est la suivante : $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ et $\partial_x^\alpha = (\partial_{x_1})^{\alpha_1} \cdots (\partial_{x_d})^{\alpha_d}$, où $\partial_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial_{x_j}}$, $x = (x_1, \cdots, x_d)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$.

Proposition A.50 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (appelé espace de Schwartz[9]). La transformation de Fourier est une application linéaire de*

[9] du nom du mathématicien français contemporain Laurent Schwartz,inventeur des distributions, décédé en juillet 2002

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même.

Corollaire A.51 (Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(\xi) = 0$.*

Théorème A.52 (Formule d'Inversion) *Soient f et $\widehat{f}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Alors la formule de synthèse $f(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{i<x,\xi>} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$ est vérifiée pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, si et seulement si $\widehat{f} = \mathcal{F}f$.*

Si de plus f est continue la formule de synthèse, aussi appelée formule d'inversion, a lieu $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Par la suite, la transformée de Fourier d'une fonction f sera notée $\widehat{f}$ aussi bien que $\mathcal{F}f$. Les fonctions de carré intégrable fournissent un autre cadre commode pour l'étude du produit de convolution et de la transformation de Fourier.

Proposition A.53 (a) *L'application $f \mapsto (2\pi)^{-d/2}\, \widehat{f}$ restreinte à l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, cette application linéaire est continue lorsque ces deux espaces sont munis de la semi-norme de la convergence en moyenne quadratique, et cette application se prolonge en une isométrie de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même.*
(b) *On a les deux identités : $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ pour $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, et $\widehat{fg} = (2\pi)^{-d}\, \widehat{f} * \widehat{g}$ pour $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Les deux derniers énoncés, qui s'obtiennent essentiellement grâce aux théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres et de changement de variables, décrivent les principales propriétés du produit de convolution et de la transformation de Fourier.

Proposition A.54 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable.*
(a) *Si f est de classe C^1 et si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\,\xi_j \widehat{f}(\xi)$.*
(b) *Si la fonction $x \mapsto x_j\, f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors la fonction $\widehat{f}$ est dérivable par rapport à ξ_j et $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j} = -i\,\widehat{x_j\, f}$.*
(c) *Plus généralement, si la fonction $x \mapsto |x|^m f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors la fonction $\widehat{f}$ est de classe C^m sur $\mathbb{R}^d$.*

Les propriétés de la transformation de Fourier énoncées ci-dessus montrent qu'elle échange dérivation et multiplication par une variable, ce qui en fait un outil efficace dans de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles. Des exemples seront donnés en cours et en travaux dirigés.

Quelques Références accessibles à la BU

[1] Gasquet-Witomski : Analyse de Fourier et applications. Editions Masson.
[2]R. Godement : Analyse mathématique II. Editions Springer.
[3] F. Laudenbach : Calcul différenriel et intégral
[4] Riesz et Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle.
[5] W. Rudin : Analyse réel et complexe.
[4] L. Schwartz : Analyse IV et Méthodes mathématiques de la physique. Editions Hermann.