Université OEB-Département des Mathématiques et Informatique
2èm eannée Master Mathématiques Appliquées, 2020-2021

Examen du 24 février 2021 : **Théorie du contrôle** (Durée 1h00)

Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Exercice 1 ***(7pts)*** *Considérons l'équation d'advection qui décrit les phénomènes du transport :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) & = & 0; t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) & = & f(x). \end{cases} \tag{1}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $E = L^2(\mathbb{R})$ *.*

1. Écrivons le problème (1) sous la forme abstraite et déterminer le générateur infinitésimal et son domaine de définition.

2. On considère l'application :

$$(\mathcal{S}(t) f)(x) = f(x-t);\, x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{2}$$

Montrer que $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu.*

3. Quelles conditions il faut mettre sur f *pour que (2) est une solution de (1) ?.*

Exercice 2 ***(7pts)*** *Sous certaines conditions de vol, le mouvement d'un avion linéarisé autour d'un point d'équilibre est donné par :*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 2.8 \\ 0 & -3.13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_g \end{pmatrix},$$

où u_a *est le contrôle d'aileron et* u_g *le contrôle gouverne.*

Est-ce-qu'on peut contrôler l'avion en éliminant le contrôle de gouverne u_g*?.*

Exercice 3 ***(7pts)*** *On considère la classe des équations différentielles linéaires autonomes suivantes :*

$$\begin{cases} y'(t) & = & Ay(t) + Bu(t);\, \forall t \in [0,T], \\ y(0) & = & y_0, \\ z & = & Cy, \end{cases} \tag{3}$$

avec $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ *est l'état,* $u(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *est le contrôle et* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont des matrices linéaires et bornées. Ici* n *et* m *sont deux entiers naturels tels que généralement* $m \leq n$*.*

Montrer que le système (3) est observable en temps fini $t \in (0,T]$ *si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. La map d'observabilité $K(t)$ *est injective (i.e,* $\ker K(t) = \{0\}$*).*

2. La gramienne d'observabilité $G(t)$ *est définie positive (i.e,* $G(t) > 0$*).*

3. La condition suivante est vérifiée : $C\mathcal{S}(s)\, y = 0, \forall s \in [0,T] \Longrightarrow y = 0.$

Dr. I. Rezzoug

Correction
Solution d'exercice N°1
1. Écrivons le problème (1) sous la forme abstraite en posant $y(t) = v(\cdot, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t); t \geq 0, \\ y(0) & = & f, \end{array} \right. \quad \text{1pt} \tag{4}$$

où

$$A = -\frac{d}{dx} \quad \text{1pt}$$

avec le domaine

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \left\{ y \in L^2(\mathbb{R}), y' \in L^2(\mathbb{R}) \right\}. \quad \text{1pt}$$

On remarque que $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{y(\cdot + t) - y}{t} = y'$ dans $\mathcal{D}'$. Ainsi $y \in L^2$ appartient au domaine du générateur infinitésimal de $\mathcal{S}_t$ si la dérivée au sens des distributions y' est également dans L^2, autrement dit $D(A) = H^1(\mathbb{R})$ et $Ay = y'$.

2. On considère l'application : $(\mathcal{S}(t) f)(x) = f(x - t)$ [1]$; x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

✓ $(\mathcal{S}(0) f)(x) = f(x - 0) = f(x) = (If)(x)$, donc

$$\mathcal{S}_0 = I. \quad \text{1pt}$$

✓ $(\mathcal{S}(t + s) f)(x) = f(x + (-t - s)) = f(x - t) . f(x - s)$, donc

$$(\mathcal{S}_{t+s} f)(x) = (\mathcal{S}_t f)(x) . (\mathcal{S}_s f)(x). \quad \text{1pt}$$

Car la composée de deux translation est une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des deux translations.

✓

$$\lim_{t \to 0^+} \|(\mathcal{S}_t f)(\cdot) - (If)(\cdot)\|_{L^2} = 0, \quad \text{1pt}$$

car si $y \in \mathcal{D}$, on a : $\|(\mathcal{S}_t f)(\cdot) - (If)(\cdot)\|_{L^2} \leq t \|y'\|$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0, et si $y \in L^2$: on choisit $y_n \in \mathcal{D} \longrightarrow y \in L^2$.

3. Comme A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0-$semi-groupe défini sur E par :

$$(\mathcal{S}(t) f)(x) = f(x - t); x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

pour tout

$$f \in D(A), \quad \text{1pt}$$

la fonction définie par $v(x, t) = (\mathcal{S}(t) f)(x) = f(x - t)$, est l'unique solution de (1)[2].

---

[1] Le graphe de la solution à l'instant t se déduit du graphe de la donnée initiale f par une translation de longueur ct selon l'axe des abscisses : cette formule représente une fonction qui se propage (ou se transporte) sans déformation à la vitesse constante $c = 1$. Ceci justifie le fait que l'on appelle le coefficient c vitesse de l'équation de transport.

[2] On dit que v est une solution classique de l'équation (1) si c'est une fonction $\mathcal{C}^1$ de x et de t et si elle satisfait (1) point par point.

Le problème (1) admet une unique solution classique et que celle-ci peut être construite par la **technique des caractéristiques** : $v(x, t) = f(x - t)$.

Solution d'exercice N°2

Si on élimine le contrôle de gouverne u_g, on obtient le système suivant : $y' = Ay + Bu$,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (u_a)\,,$$ 1pt

avec $n = \dim(A) = 4$ et $m = \dim(B) = 1.$ 1pt

$B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 0.5pt

$AB = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$, 0.5pt

$A^2B = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 107 & 0 \\ 0 & -0.41 & -12.6 & 0 \\ 0 & 1.4 & -8.51 & 0 \\ -10 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix}$, 0.5pt

$A^3B = \begin{pmatrix} -1000 & -114 & -984.9 & 0 \\ 0 & 12.887 & 5.13 & 0 \\ 0 & 7.53 & 18.557 & 0 \\ 100 & 10 & 107 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20000 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \end{pmatrix}$, 0.5pt

un calcul direct indique que

$$rang\,[B, AB, A^2B, A^3B] = 2 < 4.$$ 2pts

Donc **le système n'est pas contrôlable.** 1pt

$\left(B, AB, A^2B, A^3B\right) = \begin{pmatrix} 20 & -200 & 2000 & -20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -200 & 2000 \end{pmatrix}$, rank: 2.

Solution d'exercice N°3

1. K est injective (i.e, $\ker K(t) = \{0\}$) donc si $y_0 \neq 0$ implique que $K(t)y_0 \neq 0$ sur $(0,T]$ donc $z\,(t, y_0, 0) \neq 0$ sur $(0,T]$ donc $z \neq 0$ sur $(0,T]$ donc le système (3) est observable. 7/3pts

2. La gramienne d'observabilité $G(t)$ est définie positive (i.e, $K^*K(t) > 0$) donc K^*K est inversible donc K^*K est injective (en dimension finie) donc $\ker K^*K(t) = \{0\}$ donc $\ker K(t) = \{0\}$ donc La map d'observabilité K est injective donc le système (3) est observable. 7/3pts

3. $\mathcal{CS}\,(s)\,y = 0$ donc $K(s)y = 0$ donc $K^*K(s)y = 0, \forall s \in [0,T]$ et d'autre part $K^*K(s)y = 0, \forall s \in [0,T] \Longrightarrow y = 0$, donc on obtient : $K^*K(s) > 0, \forall s \in [0,T]$, donc la gramienne d'observabilité $G(s)$ est définie positive donc le système (3) est observable. 7/3pts