**Exercise 1** *Soit $E$ un espace de Banach, et soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes bornés.*

*On a qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si les séries absolument convergentes sont convergentes.*

***q1:*** *Rappeler pourquoi on peut définir l'exponentielle* $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

***q2:*** *Démontrer l'inégalité* $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$. *En déduire une estimation de* $\|e^A\|$.

***q3:*** *Montrer que* $e^A e^B = e^{A+B}$ *pour deux endomorphismes $A, B$ qui commutent.*

***q4:*** *Montrer que* $t \longrightarrow e^{tA}$ *est un semi-groupe uniformément continu.*

**Solution d'exercice 1.**

$E$ un espace de Banach.

$A, B \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes bornées.

**1.** $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

$\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach, donc $\mathcal{L}(E)$ espace complet. Alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente donc convergente. Donc, on peut définir l'exponentielle $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

**2.** On a :

$$\begin{aligned} \|A \circ B\| &= \sup_{\|y\|=1} \|A(By)\| \\ &\leq \|A\| . \sup_{\|y\|=1} \|By\| \\ &\leq \|A\| . \|B\| \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} \left\|e^A\right\| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}. \end{aligned}$$

**3.** Comme les endomorphismes $A$ et $B$ commutent, on peut utiliser la formule de Newton pour calculer

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k} = e^A . e^B$$

**4.** L'espace algébrique est traitée dans la question qui précède et on a $\left\|e^{tA} - Id_E\right\| \leq e^{t\|A\|} - 1$ qui tend vers 0 lorsque $t$ tend vers 0, donc $e^{tA}$ est continu en 0 (et donc sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est un semi-groupe).

**Exercise 2** *Soit $E$ un espace de Banach, on considère l'application exponentielle* $\exp : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E), A \longmapsto e^A$.

***q1:*** *Montrer que* $\exp$ *est différentiable en* $0$ *et calculer sa différentielle. Montrer que* $\exp$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $\mathcal{L}(E)$.

***q2:*** *Montrer qu'il existe* $\delta > 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que* $\exp : B_{\mathcal{L}(E)}(0,\delta) \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(Id_E,\epsilon)$ *soit un difféomorphisme. On notera* $\ln : B_{\mathcal{L}(E)}(Id_E,\epsilon) \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(0,\delta)$ *l'inverse.*

***q3:*** *Soit* $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe uniformément continu, i.e. tel que* $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(E), t \longmapsto \mathcal{S}_t$, *est continue. Montrer qu'il existe* $t_0$ *et une fonction* $t \longrightarrow A_t$ *telle que* $\mathcal{S}_t = e^{At}, \forall t \in [0,t_0]$.

***q4:*** *Montrer que* $A_{nt} = nA_t$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathbb{R}$ *tels que* $t, nt \in [0,t_0]$.

***q5:*** *Montrer que* $A_{ts} = sA_t$ *pour tous* $s \in \mathbb{Q}$ *et* $t \in \mathbb{R}$ *tels que* $t, st \in [0,t_0]$.

***q6:*** *Montrer que* $A_{ts} = sA_t$ *pour tous* $s \in \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R}$ *tels que* $t, st \in [0,t_0]$.

***q7:*** *En déduire que les semi-groupes uniformément contins sont les exponentielles d'applications linéaires bornées.*

**Solution d'exercice 2.**

**1.** On a : $\exp(H) = I_n + H + H^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}H^n\right)$ avec

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}H^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\|H\|^n}{(n+2)!} \leq e^{\|H\|}.$$

Donc l'exponentielle est différentiable en 0 et sa différentielle est $L(0) = Id_{\mathcal{L}(E)}$.

$E$ est un espace de Banach. Donc, on peut définir l'exponentielle $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n$.

Donc par récurrence : exp est une application de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathcal{L}(E)$.

**2.** On a : $D(\exp)(0) = Id_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, la différentielle de l'exponentielle en 0 est une application localement inversible continue.

Donc, c'est un difféomorphisme local, et $\exists\delta > 0, \exists\epsilon > 0$ t.q. $\exp : B_{\mathcal{L}(E)}(0,\delta) \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(Id_E,\epsilon)$ soit un difféomorphisme.

**3.** Soit $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu, i.e. $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(E), t \longmapsto \mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_t$ est continue.

Comme $t \longmapsto \mathcal{S}_t$ est continue, donc $\exists t_0$ t.q. $\|\mathcal{S}(t)\| < \epsilon$.

Et dans ce cas on considère : $[0,t_0] \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(0,\delta), t \longmapsto A_t = \ln\mathcal{S}_t$ qui vérifie $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_t = e^{A_t}, \forall t \in [0,t_0]$ et $A_0 = 0$.

**4.** On a $\mathcal{S}_{nt} = \mathcal{S}(nt) = (\mathcal{S}(t))^n$ donc

$$e^{A_n t} = \left(e^{At}\right)^n = e^{nA_t},$$

par récurrence puisque $(n-1)A_t$ et $A_t$ commutent.

En passant au logarithme on obtient le résultat désiré

$$A_n t = nA_t, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

**5.** Si $s \in \mathbb{Q}$ :

Supposons que $s = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Donc $A_{p\times \frac{t}{q}} = pA_{\frac{t}{q}}$ d'après (1) psq $\frac{t}{q} \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Donc il suffit de montrer que $A_{\frac{t}{q}} = \frac{1}{q}A_t$?.

D'après (1) on a : $A_t = \frac{1}{n}A_{nt}$ donc $A_t = \frac{1}{q}A_{qt}$ donc $A_t = qA_{\frac{1}{q}t}$. Donc,

$$A_s t = sA_t, s \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

**6.**

$$A_s t = sA_t, s \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Par densité des rationnels dans les réels et par continuité de $t \longmapsto A_t$.

Si $s \in \mathbb{R}^+$ : on peut trouver une suite croissante de rationnels positifs $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $s$ : ainsi $0 \leq s_n t \leq st \leq t_0$ et on peut appliquer la question (4) et (5).

**7.** On pose $A = t_0^{-1}A_{t_0}$.

D'après (3) : $A_t = \frac{t}{t_0}A_{t_0} = tA, \forall t \in [0, t_0]$. Donc, $\forall t \in [0, t_0] : \mathcal{S}(t) = e^{tA}$.

Notant $n$ la partie entière de $\frac{t}{t_0}$ et $m \in [0, 1)$ sa partie fractionnaire.

Lorsque $t \in \mathbb{R} : \mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{(n+m)t_0} = \mathcal{S}_{nt_0+mt_0}$. Donc,

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{nt_0} \times \mathcal{S}_{mt_0} = (\mathcal{S}_{t_0})^n \times \mathcal{S}_{mt_0} = e^{nt_0A} \times e^{mt_0A} = e^{(n+m)t_0A} = e^{tA}.$$

**Exercise 3** *Soit $E = L^2(\mathbb{R})$, on considère l'application "translation"*

$$(\mathcal{S}_t y)(x) = y(x+t), y \in L^2(\mathbb{R}^n), t \geq 0.$$

***q1:*** *Montrer que $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.*

***q2:*** *Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.*

**<u>Solution d'exercice 3.</u>**

**1.** $E = L^2(\mathbb{R}), (\mathcal{S}_t y)(x) = y(x+t), y \in L^2(\mathbb{R}^n), t \geq 0$.

$(\mathcal{S}_0 y)(x) = y(x+0) = y(x) = (Iy)(x)$, donc $\mathcal{S}_0 = I$.

$(\mathcal{S}_{t+s} y)(x) = y(x+(t+s)) = y(x+t) \times y(x+s) = (\mathcal{S}_t y)(x) \times (\mathcal{S}_s y)(x)$ ,puisque la composée de deux translations est une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des deux translations.

Soit $y \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\|(\mathcal{S}_t y)(\cdot) - (Iy)(\cdot)\|_{L^2} = \|y(\cdot + t) - y\|_{L^2} \leq t\|y'\|.|\text{supp}y|^{\frac{1}{2}},$$

qui tend vers 0 lorsque $t$ tend vers 0.

Soit $y \in L^2(\mathbb{R}^n)$ : on choisit $y_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow y \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et on remarque que :

$$\|y(\cdot + t) - y\|_{L^2} \leq \|y_n(\cdot + t) - y_n\|_{L^2} + 2\|y - y_n\|_{L^2}, \tag{4}$$

en choisissant $n$ assez grand et $t$ assez petit, alors (4) tend vers 0.

**2.** Le générateur infinitésimal :

On remarque que :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{y(\cdot + t) - y}{t} = y' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

ainsi $y \in L^2$ appartient au domaine du générateur infinitésimal de $\mathcal{S}_t$ si la dérivée au sens des distributions $y'$ est également dans $L^2$, autrement dit $D(A) = H^1(\mathbb{R})$ et $Ay = y'$.

**Exercise 4** *Soit $E$ un espace de Banach, $A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur $E$ et $B \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu sur $E$.*

***q1:*** *On fixe $f \in E$. Montrer que l'équation $v + B(A+\lambda I)^{-1} v) = f$ admet une unique solution $v \in E$ lorsque $\lambda$ est assez grand.*

***q2:*** *En déduire que l'opérateur $A+B$, défini par $(A+B)y = Ay + By$ pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$, est le générateur d'un semi-groupe $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$. Donner une majoration de $\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

<u>**Solution d'exercice 4.**</u>

Indication :

**1.** $I + B(A+\lambda I)^{-1}$ est inversible. Alors le problème : $v + B(A+\lambda I)^{-1} v) = f$ admet une unique solution $v = \left[I + B(A+\lambda I)^{-1}\right]^{-1} f \in E$.

**2.** $(\lambda I + A + B) y = f$ et $\|y\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|B\|} \|f\|$. Ceci implique que $A+B$ génère un semi-groupe $\mathcal{S}(t)$ (qui n'est pas forcément un semi-groupe de contractions). Et on obtient :

$$\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \le M.e^{\|B\|t}, M \ge 1.$$

**Exercise 5** *Pour tout $t \ge 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ on note $\mathcal{S}(t) f(x,v) = f(x - tv, v)$.*

***q1:*** *Montrer que pour tout $p \ge 1$, la solution $\mathcal{S}$ définit un semi-groupe de contractions sur $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

***q2:*** *Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.*

<u>**Solution d'exercice 5.**</u>

**Indication :**

**1.** On vérifie aisément $\mathcal{S}(0) = I$ et $\mathcal{S}(t_1 + t_2) = \mathcal{S}(t_1).\mathcal{S}(t_2)$ et $\|\mathcal{S}(t)\|_{L^p} \le 1$ ($\|\mathcal{S}(t) f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$).

**2.** On a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{S}(t) f - f) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x - tv, v) - f(x,v)) = v.\nabla_x f(x,v),$$

donc, le domaine du générateur infinitésimal de ce semi-groupe est

$$D(A) = \{f \in L^p, v\nabla_x f \in L^p\}.$$

**Exercise 6** *Soit le système dynamique suivant :*

$$y' = Ay + Bu, \tag{5}$$

*où* $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

*Est-ce-que le système (5) est contrôlable ?.*

**Solution d'exercice 6.**
**Indication :**
On a : $\dim(A) = n = 3$.
Et $rang \left[ B \vdots AB \vdots A^2 B \right] = 3 = n$. Alors le système dynamique est contrôlable.

**Exercise 7** *Soit le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t) + Bu(t), \ \forall t \in [t_0, T], \\ y(t_0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{6}$$

*où* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

*Trouver l'ensemble des conditions initiales $\mathcal{M}(t_0)$ pour lesquelles le système précédent est contrôlable à zéro.*

**Solution d'exercice 7.**
On a : $n = 3$ et $m = 2$.
Donc la matrice de contrôlabilité est donnée par :

$$C(A, B) = \left[ B \vdots AB \vdots A^2 B \right].$$

Il est facile de vérifier que $rangC(A, B) = 3$.

Donc la condition de Kalman est vérifiée. Par suite le système (6) précédent est contrôlable, ce qui est équivalent à dire qu'il est contrôlable à zéro ($A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, eigenvalues: $-1, -2$).

Ceci est vérifié quelque soit la condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^3$.
Donc l'ensemble commandable est

$$\mathcal{M}(t_0) = \mathbb{R}^3.$$

**Exercise 8** *Vérifier si le système suivant est contrôlable :* $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$.

**Solution d'exercice 8.**
On a : $n = 2$ et $m = 2$.
La matrice de contrôlabilité est donnée par : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rank: 1.

cette matrice est de *rang* égale à $1 < n$. Donc la condition de Kalman n'est pas vérifiée. Par suite ce système n'est pas contrôlable.

**Exercise 9** *Sous certaines conditions de vol, le mouvement d'un avion linéarisé autour d'un point d'équilibre est donné par :*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 2.8 \\ 0 & -3.13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_g \end{pmatrix},$$

*où $u_a$ est le contrôle d'aileron et $u_g$ le contrôle gouverne.*

***q1 :*** *Est-ce-qu'on peut contrôler l'avion en éliminant le contrôle de gouverne $u_g$?.*

***q2 :*** *Si les deux contrôles sont effectués, l'avion est-il contrôlable ?.*

**Solution d'exercice 9.**

**Indication**

1. Si on élimine le contrôle $u_g$, on obtient : $n = 4$ et $m = 1$.

Un calcul direct indique que dans ce cas le "rang" de la matrice de contrôlabilité est égale à $2 < 4$. Donc, le système n'est pas contrôlable.

2. Si on garde les deux contrôles $u_a$ et $u_g$, le système devient contrôlable puisque le *rang* de $C(A, B)$ sera égale à 4.

**Dr. I. Rezzoug**