UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI

Département des Mathématiques et Informatique-L.M.D
Méthodes Numériques (Master 1. Semestre 1. **2020-2021**)

Correction de la deuxième partie

Exercice 1 *Soit le problème elliptique donné par l'équation de Laplace:*

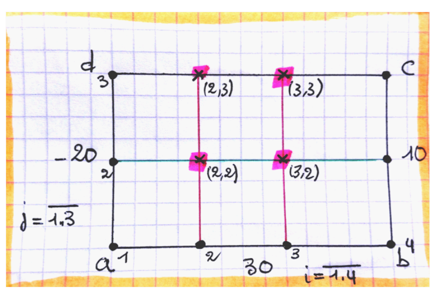
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \ \textit{dans } \Omega, \\ y(0,t) = -20; y(L,t) = 10, \\ y(x,0) = 30 \ , \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,l) = 0. \end{cases}$$

Résoudre le problème avec Ω un domaine rectangulaire régulier (données : $\Delta x = \Delta t = 1cm$, $L = 3cm$, $l = 2cm$). Par la méthode de différence finie.

Solution d'exercice N°1

1. Maillage :

$\Delta x = \Delta t = 1$ donc le maillage est formé de 4×3 points, le nombre de points pivots (inconnue) est égal à 4.



Plaque rectangulaire soumise à une condition de Neumann sur la frontière "cd".

2. Le schéma numérique et Équations algébriques :

$$y_{i-1,j} - 4y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} = 0$$

Pour les points internes $(2,2)$; $(3,2)$

Point $(2,2)$: $y_{1,2} - 4y_{2,2} + y_{3,2} + y_{2,1} + y_{2,3} = 0$ donc $-20 - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 30 + y_{2,3} = 0$ donc

$$-4y_{2,2} + y_{3,2} + y_{2,3} = -10.$$

Point $(3,2)$: $y_{2,2}-4y_{3,2}+y_{4,2}+y_{3,1}+y_{3,3}=0$ donc $y_{2,2}-4y_{3,2}+10+30+y_{3,3}=0$ donc

$$y_{2,2}-4y_{3,2}+y_{3,3}=-40.$$

Points de frontière cd : $(2,3)\,;(3,3)$

L'équation est: $y_{i-1,j}-4y_{i,j}+y_{i+1,j}+2y_{i,j-1}=0$.

Point $(2,3)$: $y_{1,3}-4y_{2,3}+y_{3,3}+2y_{2,2}=0$ donc $-20-4y_{2,3}+y_{3,3}+2y_{2,2}=0$ donc

$$2y_{2,2}-4y_{2,3}+y_{3,3}=20.$$

Point $(3,3)$: $y_{2,3}-4y_{3,3}+y_{4,3}+2y_{3,2}=0$ donc $y_{2,3}-4y_{3,3}+10+2y_{3,2}=0$ donc

$$2y_{3,2}+y_{2,3}-4y_{3,3}=-10.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{2,2} \\ y_{3,2} \\ y_{2,3} \\ y_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -40 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Donc : $K\times y=y_c$ (donc, résoudre le système d'équations et trouver y).

Exercice 2 *Soit à résoudre le problème :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}=0.01\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ 0<x<L=10cm, \\ t>0, \\ y(0,t)=y(L,t)=0 \text{ pour } t\geq 0, \\ y(x,0)=\overline{y}=300. \end{cases}$$

On choisit les données suivantes : $\Delta x=0.1$, $\Delta t=0.05$

<u>Solution d'exercice N°2</u>

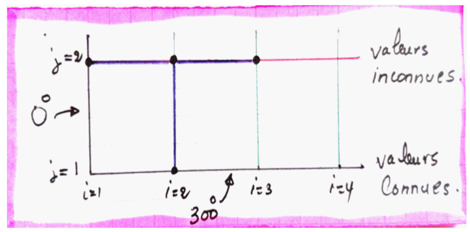
La solution exacte est donnée par :

$$y(x,t)=\frac{2\overline{y}}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(\lambda_n L)}{\lambda_n}e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x).$$

Les pas du maillage $\Delta x=0.1$, $\Delta t=0.05$ donc

$$r=\frac{\alpha.\Delta t}{(\Delta x)^2}=\frac{0.01\times 0.05}{0.01}=0.05$$

On forme le système d'équations à l'étape de temps $t = \Delta t$ quand la molécule parcourt la ligne $j = 1$ avec $i = \overline{2, m-1}$.



Molécule implicite en $j = 1$

$y_{1,1} = 300$ (condition initiale).

$y_{1,2} = 0$ (condition frontière).

Au point $(2,1)$ l'équation implicite s'écrit pour $j = 1$ et $i = 2$:

$$y_{2,1} = -ry_{1,2} + (1+2r)\, y_{2,2} - ry_{3,2} = ry_G + \overline{y}, \text{ on pose } 1 + 2r = \overline{r}$$

Au point $(3,1)$ l'équation implicite s'écrit pour $j = 1$ et $i = 3$:

$$y_{3,1} = -ry_{2,2} + (1+2r)\, y_{3,2} - ry_{4,2} = -ry_{2,2} + \overline{r}y_{3,2} - ry_{4,2} = \overline{y}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{r} & -r & . & . & . & . & . & . & . \\ -r & \overline{r} & -r & . & . & . & . & . & . \\ . & -r & \overline{r} & -r & . & . & . & . & . \\ . & . & -r & \overline{r} & -r & . & . & . & . \\ . & . & . & -r & \overline{r} & -r & . & . & . \\ . & . & . & . & -r & \overline{r} & -r & . & . \\ . & . & . & . & . & -r & \overline{r} & -r & . \\ . & . & . & . & . & . & -r & \overline{r} & -r \\ . & . & . & . & . & . & . & -r & \overline{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2,2} \\ y_{3,2} \\ y_{4,2} \\ y_{5,2} \\ y_{6,2} \\ y_{7,2} \\ y_{8,2} \\ y_{9,2} \\ y_{10,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ry_G + \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ \overline{y} \\ ry_D + \overline{y} \end{bmatrix}$$

On résout le système pour obtenir les températures au niveau $j = 2$. Pour déterminer les températures à $j = 3$, on répète le même processus de l'étape $j = 2, 3, 4$.

Exercice 3 *(Équation de Poisson)*

Résoudre le problème suivant $\frac{-\partial^2 y}{\partial x^2} = 1, \Omega = [0,1]$ *avec* $y(0) = y(1) = 0$.

1. En appliquant un schéma de différences finies centrées, déterminer la molécule de l'équation différentielle.

2. En choisissant un maillage avec un pas de $h = 0,25$. *Calculer la distribution de températures. Comparer avec la solution exacte* $y(x) = \frac{-x^2+x}{2}$.

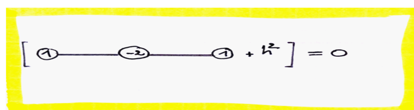
Solution d'exercice N°3

Le schéma de différences finies centrées de la dérivée seconde est donné par :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + O\left(h^2\right).$$

Donc $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + h^2 = 0$ "l'équation aux différences de l'équation de Poisson".

• La molécule correspondante est donnée par :



• Pour un pas $h = 0.025$, on a $m = 5$ points, donc le système d'équations :

$i = 1 : y_1 = 0$

$i = 2 : y_1 - 2y_2 + y_3 + h^2 = 0 \Longrightarrow -2y_2 + y_3 = -h^2$

$i = 3 : y_2 - 2y_3 + y_4 + h^2 = 0 \Longrightarrow y_2 - 2y_3 + y_4 = -h^2$

$i = 4 : y_3 - 2y_4 + y_5 + h^2 = 0 \Longrightarrow y_3 - 2y_4 + y_5 = -h^2$

$i = 5 : y_5 = 0$

Donc

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 \\ -h^2 \\ -h^2 \end{pmatrix}$$

Donc $Ay = b$

Donc $y = A^{-1}b$ telle que $h^2 = 0.0625$

Et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

x	$\widetilde{y}(x)$	Solution exacte
0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0937	0.0938
0.5000	0.1250	0.1250
0.7500	0.0938	0.0938
1.0000	0.0000	0.0000

Exercice 4 *(Problème Elliptique)*

Une plaque mince est soumise aux températures de frontières comme l'indique la figure 1. Sachant que le problème est régi par l'équation de Laplace, calculer la distribution de température dans la plaque. Prendre *un maillage uniforme pour les cas suivants* $\Delta x = 5cm, \Delta x = 2.50cm$ *puis* $\Delta x = 1cm$. *Comparer avec la solution exacte.*

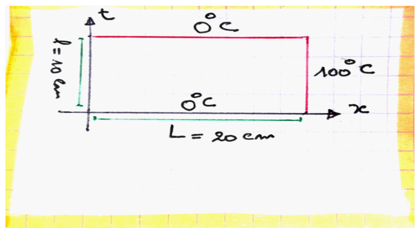


Fig 1. Plaque avec conditions aux limites de Dirichlet.

<u>Solution d'exercice N°4</u>

Cas $\Delta x = \Delta t = 5cm$

• Le maillage (voir Fig 2).

$$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{20}{5} + 1 = 4 + 1 = 5, n = \frac{l}{\Delta t} + 1 = 3.$$

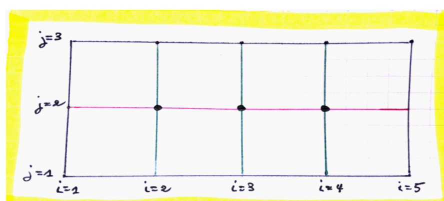
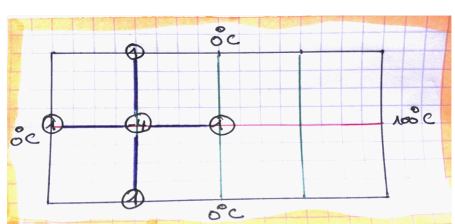


Fig 2. Maillage pour $\Delta x = \Delta t = 5cm$.

• Molécule de l'équation de Laplace $r = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = 1^2 = 1$. L'équation de Laplace correspondante est

$$y_{i-1,j} - 4y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1} = 0.$$



Molécule au point pivot $(2, 2)$.

• Le système d'équations :

Point $(2, 2)$: $y_{1,2} - 4y_{2,2} + y_{3,2} + y_{2,1} + y_{2,3} = 0 - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 0 + 0 = 0$

Point $(3,2)$: $y_{2,2}-4y_{3,2}+y_{4,2}+y_{3,1}+y_{3,3}=y_{2,2}-4y_{3,2}+y_{4,2}+0+0=0$

Point $(4,2)$: $y_{3,2}-4y_{4,2}+y_{5,2}+y_{4,1}+y_{4,3}=y_{3,2}-4y_{4,2}+0+0+0=0$

Donc

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{2,2} \\ y_{3,2} \\ y_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient le système d'équations algébriques $Ay=b$ donc $y=A^{-1}b$. Telle que $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{15}{56} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{56} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{56} & -\frac{1}{14} & -\frac{15}{56} \end{pmatrix}$

Donc

	$x\,(cm)$				
$t\,(cm)$	0	5.0000	10.000	15.0000	20.00
0	-	0.0000	0.0000	0.00000	-
5	0	1.7863	7.1441	26.7849	100.0
10	-	0.0000	0.0000	0.00000	-

Température dans la plaque avec $\Delta x = 5cm$.

Cas $\Delta x = \Delta t = 2.5cm$

On a le nombre de points du maillage $m=9, n=5$.

	$x\,(cm)$								
$t\,(cm)$	0.000	2.500	5.000	7.500	10.00	12.500	15.000	17.500	20.00
0.0	-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	-
2.5	0.000	0.353	0.913	2.010	4.296	9.1530	19.663	43.210	100.0
5.0	0.000	0.498	1.289	2.832	6.019	12.654	26.289	53.177	100.0
7.5	0.000	0.353	0.913	2.010	4.296	9.1530	19.663	43.210	100.0
10	-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	-

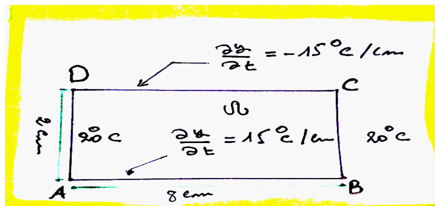
Température dans la plaque avec $\Delta x = 2.5cm$.

Exercice 5 *(Problème de Neumann)*

Résoudre le problème suivant : $-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=1$ *dans* $\Omega =$ *une plaque rectangulaire* $8cm \times 2cm$. *Avec*

$y(0,t)=20°c$, $y(8,t)=20°c$.

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,2) = -15°c/cm.$



Conditions aux limites de Neumann et Dirichlet.

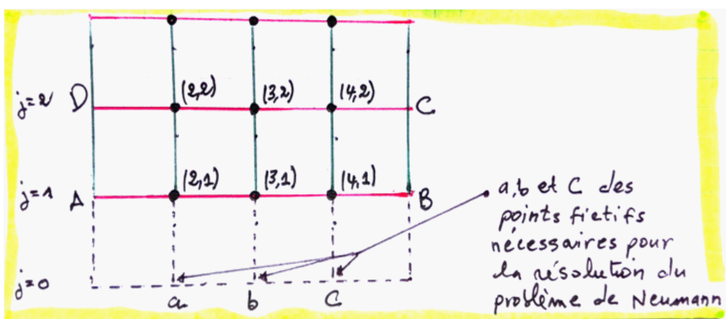
Donner la température dans une plaque Ω. *Prendre un pas uniforme* $h = \Delta x = \Delta t = 2cm$.

<u>Solution d'exercice N°5</u>

1. Le maillage: pour un pas $\Delta x = \Delta t = 2cm$. On a $m = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5,\ \ n = \frac{l}{\Delta t} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2.$

• Le nombre des points inconnues à $(m-2) \times n = 3 \times 2 = 6$.

Le maillage correspondant est alors donné par :



Maillage pour la condition aux limites de Neumann.

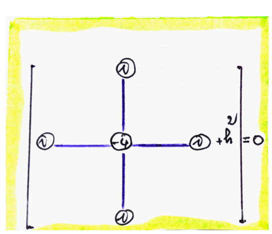
2. Discrétisation de l'équation de Poisson: Utilisant l'équation un schéma de différences finies centrées, on a:

$$-\left[\frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{(\Delta t)^2}\right] = 1.$$

Donc

$$\frac{y_{i-1,j} - 4y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1}}{h^2} + 1 = 0.$$

Sous forme moléculaire



Molécule de l'équation de Poisson.

- Aux points de la frontière AB, donc $j = 1$:

$$\frac{y_{i-1,1} - 4y_{i,1} + y_{i+1,1} + y_{i,0} + y_{i,2}}{h^2} + 1 = 0.$$

- $\frac{\partial y}{\partial t}\mid_{i,1} = \frac{y_{i,0} - y_{i,2}}{2\Delta t} = -15 \Longleftrightarrow y_{i,0} = y_{i,2} - 30\Delta t$

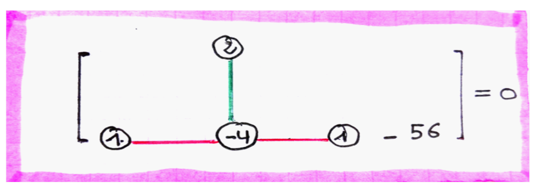
Donc

$$\frac{y_{i-1,1} - 4y_{i,1} + y_{i+1,1} + 2y_{i,2} - 30\Delta t}{h^2} + 1 = 0.$$

Donc

$$y_{i-1,1} - 4y_{i,1} + y_{i+1,1} + 2y_{i,2} - 60 + 4 = 0.$$

Qui s'écrit sous forme moléculaire



Molécule aux points de la frontière AB avec $h = \Delta x = \Delta t = 2cm$.

3. Équations algébriques:

- Point $(2,1)$: $y_{1,1} - 4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} - 56 = 0$ donc $20 - 4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} - 56 = 0$ donc $-4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} = 36$.
- Point $(3,1)$: $y_{2,1} - 4y_{3,1} + y_{4,1} + 2y_{3,2} - 56 = 0$ donc $y_{2,1} - 4y_{3,1} + y_{4,1} + 2y_{3,2} = 56$.
- Point $(4,1)$: $y_{3,1} - 4y_{4,1} + y_{5,1} + 2y_{4,2} - 56 = 0$ donc $y_{3,1} - 4y_{4,1} + 20 + 2y_{4,2} = 56$ donc $y_{3,1} - 4y_{4,1} + 2y_{4,2} = 36$.

On a $y_{i-1,j} - 4y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1} + 4 = 0$. Donc

- Aux points de la frontière CD, donc $j = 2$. Alors $y_{i-1,2} - 4y_{i,2} + y_{i+1,2} + y_{i,1} + y_{i,3} + 4 = 0$.

Et

$$\frac{\partial y}{\partial t}\mid_{i,2} = \frac{y_{i,1} - y_{i,3}}{4} = -15 \Longleftrightarrow y_{i,3} = y_{i,1} + 60$$

Donc

$$y_{i-1,2} - 4y_{i,2} + y_{i+1,2} + 2y_{i,1} = -64$$

- Point $(2,2)$: $y_{1,2} - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -64$ donc $20 - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -64$ donc $-4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -84$.
- Point $(3,2)$: $y_{2,2} - 4y_{3,2} + y_{4,2} + 2y_{3,1} = -64$.
- Point $(4,2)$: $y_{3,2} - 4y_{4,2} + y_{5,2} + 2y_{4,1} = -64$ donc $y_{3,2} - 4y_{4,2} + 20 + 2y_{4,1} = -64$ donc $y_{3,2} - 4y_{4,2} + 2y_{4,1} = -84$.

Donc,

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ y_{3,1} \\ y_{4,1} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} \\ y_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 56 \\ 36 \\ -84 \\ -64 \\ -84 \end{bmatrix}$$

Donc sous forme matricielle $A \times y = b$.

Exercice 6 *(Problème de Neumann)*

Soit le problème :

$$-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 1 \quad dans \quad \Omega = [0, 6] \times [0, 2].$$

Avec $y(0, t) = 20°c$, $y(6, t) = 20°c$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 2) = -15°c/cm$.

Donner la température dans une plaque Ω*. Prendre un pas uniforme* $\Delta x = \Delta t = 2cm$ *[donner le maillage, la discrétisation "par un schéma de différences finies centrées" et les équations algébriques de l'équation de Poisson "sous forme* $A \times y = b$*"].*

<u>Solution d'exercice N°6</u>

<u>Indication</u>

Déterminer y.

• Point $(2, 1)$: $y_{1,1} - 4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} - 56 = 0$ donc $20 - 4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} - 56 = 0$ donc $-4y_{2,1} + y_{3,1} + 2y_{2,2} = 36$.

• Point $(3, 1)$: $y_{2,1} - 4y_{3,1} + y_{4,1} + 2y_{3,2} - 56 = 0$ donc $y_{2,1} - 4y_{3,1} + 20 + 2y_{3,2} = 56$ donc $y_{2,1} - 4y_{3,1} + 2y_{3,2} = 36$.

• Point $(2, 2)$: $y_{1,2} - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -64$ donc $20 - 4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -64$ donc $-4y_{2,2} + y_{3,2} + 2y_{2,1} = -84$.

• Point $(3, 2)$: $y_{2,2} - 4y_{3,2} + y_{4,2} + 2y_{3,1} = -64$ donc $y_{2,2} - 4y_{3,2} + 20 + 2y_{3,1} = -64$ donc $y_{2,2} - 4y_{3,2} + 2y_{3,1} = -84$.

Donc,

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ y_{3,1} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ -84 \\ -84 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 *Soit l'équation :*

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx *en espace et* Δt *en temps:*

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Note on pourra poser $r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}$.
1. *Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?.*
2. *Analysez la stabilité du schéma par la méthode de Van Neumann.*
3. *Quel est l'ordre du schéma ?.*

<u>Solution d'exercice N°7</u>
Le modèle : $\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \alpha > 0 \cdots$ l'équation d'advection.
Schéma numérique :

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0.$$

On pose $r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}$.
1.

$$y_{i,j+1} - y_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}\left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}\right] = 0.$$

$$\boxed{-ry_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} + ry_{i+1,j+1} - y_{i,j} = 0.}$$

Le stencil :

$$\begin{pmatrix} t_{j+1}\cdots & \boxed{\text{-r}} & - - - & \boxed{1} & - - - & \boxed{\text{r}} \\ & & & | & & \\ & & & | & & \\ t_j \cdots & & & \boxed{\text{-1}} & & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & x_{i-1} & & x_i & & x_{i+1} \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{valeurs inconnues} \\ \\ \longleftarrow \text{valeur connue} \end{array}$$

Type de schéma : $\boxed{\text{Schéma Implicite}}$
2. L'ordre du schéma :
L'erreur de troncature est :

$$\mathcal{E}_{i,j} = \frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{\Delta t} + \alpha \frac{y(x_{i+1}, t_{j+1}) - y(x_{i-1}, t_{j+1})}{2\Delta x}.$$

D'après Taylor :

$$y(x_i, t_{j+1}) = y(x_i, t_j) + \Delta t y'(x_i, t_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2} y''(x, \xi)\,; t_j < \xi < t_{j+1}.$$

Donc

$$\frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{\Delta t} = y'(x_i, t_j) + \circ(\Delta t)\,; \circ(\Delta t) = \frac{\Delta t}{2} y''(x, \xi)\,; t_j < \xi < t_{j+1}. \tag{1}$$

Et

$$y(x_{i+1}, t_{j+1}) = y(x_i, t_{j+1}) + \Delta x y'(x_i, t_{j+1}) + \frac{(\Delta x)^2}{2} y''(x_i, t_{j+1}) + \frac{(\Delta x)^3}{6} y'''\left(\eta^+, t\right); x_i < \eta^+ < x_{i+1}.$$

$$y\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)=y\left(x_i,t_{j+1}\right)-\Delta x y'\left(x_i,t_{j+1}\right)+\frac{(\Delta x)^2}{2}y''\left(x_i,t_{j+1}\right)-\frac{(\Delta x)^3}{6}y'''\left(\eta^-,t\right);x_{i-1}<\eta^-<x_i.$$

Donc

$$\frac{y\left(x_{i+1},t_{j+1}\right)-y\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)}{2\Delta x}=y'\left(x_i,t_{j+1}\right)+O\left(\Delta x\right)^2. \tag{2}$$

Avec

$$O\left(\Delta x\right)^2=\frac{(\Delta x)^2}{3}y'''\left(\eta,t\right);x_{i-1}<\eta<x_{i+1}.$$

Alors

$$\frac{y\left(x_{i+1},t_{j+1}\right)-y\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)}{2\Delta x}=\left[y'\left(x_i,t_j\right)+O\left(\Delta t\right)\right]+O\left(\Delta x\right)^2. \tag{3}$$

Avec

$$O\left(\Delta t\right)=\Delta t\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\left(x,\xi\right);t_j<\xi<t_{j+1}.$$

Donc

$$\mathcal{E}_{i,j}=\frac{y\left(x_i,t_{j+1}\right)-y\left(x_i,t_j\right)}{\Delta t}+\alpha\frac{y\left(x_{i+1},t_{j+1}\right)-y\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)}{2\Delta x} \tag{4}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{i,j}=O\left(\Delta t\right)+O\left(\Delta x\right)^2.}$$

Avec

$$O\left(\Delta x\right)^2=\alpha\frac{(\Delta x)^2}{3}y_x'''\left(\eta,t\right);x_{i-1}<\eta<x_{i+1}.$$

$$O\left(\Delta t\right)=\Delta t\left(\frac{1}{2}y_t''\left(x,\xi\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\left(x,\xi\right)\right);t_j<\xi<t_{j+1}.$$

$\mathcal{E}_{i,j}\longrightarrow 0$ quand $\Delta t,\Delta x\longmapsto 0$; donc le schéma est **consistant** d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

3. La stabilité :

Pour la stabilité L^2, l'analyse de Fourier conduit à:

$$\lambda^{q+1}\left[-re^{i(p-1)\theta}+e^{ip\theta}+re^{i(p+1)\theta}\right]=\lambda^q e^{ip\theta}. \tag{5}$$

Tqs. $(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}^2$ et (p,q) point d'un maillage.

Donc

$$\begin{aligned}1&=\lambda\left[-re^{-i\theta}+1+re^{ip\theta}\right]\\&=\lambda\left[1+2ir\sin\theta\right].\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{1+2ir\sin\theta} = [1+2ir\sin\theta]^{-1}. \tag{6}$$

$$\boxed{\lambda = [1+2ir\sin\theta]^{-1}} \tag{7}$$

On vérifie alors que le module du facteur d'amplification est toujours plus petit que 1.

$$|\lambda|^2 = \left[1+(2r\sin\theta)^2\right]^{-1} \leq 1. \tag{8}$$

Le schéma est inconditionnellement stable. La convergence d'obtient alors par le théorème de Lax.

Exercice 8 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & pour\,(x,t) \in [-1,1]\times[0,1], \\ y(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & pour\,x \in [-1,1], \\ y(-1,t) = -\exp\left(\frac{-\pi^2}{4}t\right) & pour\,t \in [0,1], \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0 & pour\,t \in [0,1], \end{cases} \tag{9}$$

où $y = y(x,t)$.

1. *Donner le type du problème (9).*

2. *Donner la solution exacte du problème (9).*

3. *On construit un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme de longueur* $\Delta x = 1$ *en espace et* $\Delta t = \frac{1}{4}$ *en temps. On note* $y_{i,j}$ *l'approximation de* $y(i\Delta x, j\Delta t)$.

- *Écrire le schéma explicite pour le problème (9).*
- *Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma.*
- *Par le critère de Fourier-Von Neumann, montrer que ce schéma est* L^2-*stable sous une condition sur* Δt *à préciser.*
- *Donner un résultat de convergence pour ce schéma.*
- *Tracer le maillage du pavé* $[-1,1]\times[0,1]$.
- *Trouver la solution approchée*[1] *en* $t = \frac{1}{4}$.
- *Comparer la solution approchée avec la solution exacte*[2] *en* $t = \frac{1}{4}$.

<u>**Solution d'exercice N°8**</u>

1. Le problème (9) est l'**équation de la chaleur** avec **condition initiale non homogène** et des **conditions aux limites de type Dirichlet**.

2. Solution exacte :

[1] On donne les résultats à 10^{-2} près.

[2] la solution exacte du problème (1) est donnée par $y(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(\frac{-\pi^2}{4}t\right)$.

Pour montrer que $y\left(x,t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ est une solution exacte, il suffit que y vérifie le problème (9).

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\left(x,t\right)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right).$$

Et on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial t}y\left(x,t\right)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right).$$

En injectant ses valeurs de dérivées dans l'équation du problème (9), on déduit que vérifie notre équation

$$\frac{\partial}{\partial t}y\left(x,t\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\left(x,t\right)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)+\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)=0.$$

Maintenant, il reste à vérifiés la condition initiale et les conditions aux limites. Il est clair que

$$y\left(x,0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Et avec un calcul simple on trouve :

$$y\left(-1,t\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)=-\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right).$$

On a $\frac{\partial}{\partial x}y\left(x,t\right)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$, donc

$$\frac{\partial}{\partial x}y\left(1,t\right)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)=0.$$

3. Le **schéma explicite** pour le problème (9) :

On a :

$$\frac{\partial y}{\partial t}\mid_{(x_i,t_j)}=\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta t}.$$

Et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{(x_i,t_j)}=\frac{y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j}}{\left(\Delta x\right)^2}.$$

On écrit le schéma d'Euler explicite correspondant au problème (9) comme suit

$$\frac{\partial y}{\partial t}\mid_{(x_i,t_j)}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{(x_i,t_j)}=\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta t}-\frac{y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j}}{\left(\Delta x\right)^2}.$$

On pose $r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Alors on a :

$$\boxed{y_{i,j+1}=ry_{i-1,j}+(1-2r)\,y_{i,j}+ry_{i+1,j} \text{ avec } r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}}.$$

- Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de Taylor de l'erreur de troncature en (x_i,t_j), qui est définie par :

$$\mathcal{E}_{i,j}=\delta_t^+ y\,(x_i,t_j)-\delta_x^2 y\,(x_i,t_j)\,.$$

Donc

$$\mathcal{E}_{i,j}=\frac{\partial}{\partial t}y\,(x_i,t_j)+o\,(\Delta t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\,(x_i,t_j)+o\left((\Delta x)^2\right).$$

Donc

$$\mathcal{E}_{i,j}=o\,(\Delta t)+o\left((\Delta x)^2\right).$$

Et $\mathcal{E}_{i,j}\longrightarrow 0$ lorsque $\Delta t,\Delta x\longrightarrow 0$. Alors le schéma explicite est consistant d'**ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace**.

Comme le schéma est consistant donc d'après le théorème du Lax la stabilité est une condition nécessaire est suffisante pour la convergence.

- La stabilité :

On a le schéma explicite suivante :

$$y_{i,j+1}=ry_{i-1,j}+(1-2r)\,y_{i,j}+ry_{i+1,j}$$

Donc on utilise l'analyse de Von Neumann. Pour cela, on se place avec des conditions périodiques. On a :

$$\lambda^{q+1}\exp\,(ip\theta)=\lambda^q\left[r\exp\,(i\,(p-1)\,\theta)+(1-2r)\exp\,(ip\theta)+r\exp\,(i\,(p+1)\,\theta)\right].$$

Donc

$$\lambda=2r\cos\theta+1-2r.$$

Comme $-1\leq\cos\theta\leq 1$. Donc, on a :

$$1-4r\leq\lambda\leq 1 \tag{10}$$

La partie droite de l'inégalité (10) est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de θ.

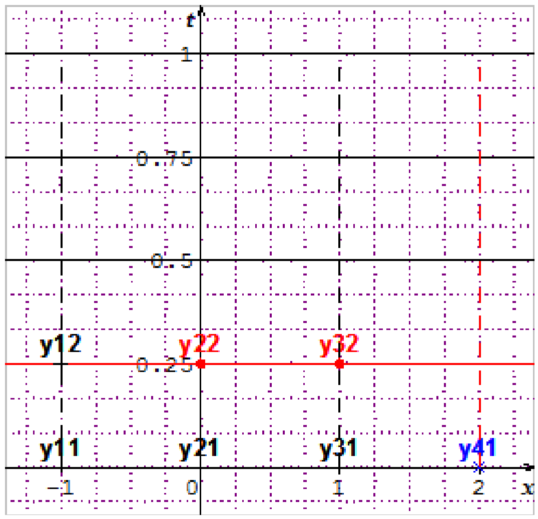
Mais la partie gauche donne $|\lambda|\leq 1$ si est seulement si $\Delta t\leq\frac{1}{2}\,|\Delta x|^2$.

Donc, le schéma est stable sous la condition

$$\Delta t\leq\frac{1}{2}\,|\Delta x|^2\,.$$

- Le Maillage :

$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{2}{1} + 1 = 3$ donc $i = \overline{1,2,3}$
$n = \frac{l}{\Delta t} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = 5$ donc $j = \overline{1,5}$



- Solutions approchées en $t = 0.25$
On a
$$y_{i,j+1} = \frac{1}{4}y_{i-1,j} + \frac{1}{2}y_{i,j} + \frac{1}{4}y_{i+1,j}.$$
Premièrement, on a :
$\boxed{y_{1,2} = -\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}0.25\right) = -0.54}$
Et
$\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{(x_3,t_1)} = \frac{y_{4,1}-y_{2,1}}{2\Delta x} = 0$
Donc $\boxed{y_{4,1} = y_{2,1}}$
On fixe $j = 1$ et on a :
Pour $i = 2$:
$$\begin{aligned} y_{2,2} &= \frac{1}{4}y_{1,1} + \frac{1}{2}y_{2,1} + \frac{1}{4}y_{3,1} \\ &= \frac{1}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(0) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $i = 3$:
$$\begin{aligned} y_{3,2} &= \frac{1}{4}y_{2,1} + \frac{1}{2}y_{3,1} + \frac{1}{4}y_{4,1} \\ &= \frac{1}{2}y_{2,1} + \frac{1}{2}y_{3,1} \\ &= \frac{1}{2}\sin(0) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

- Comparaison entre la solution exacte et approchée :

$(x_i; 0.25)$	$(-1; 0.25)$	$(0; 0.25)$	$(1; 0.25)$
solution exacte	-0.54	0	0.5
solution approchée (explicite)	-0.54	0	0.54

Exercice 9 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{8} & pour\,(x,t) \in \,]0,1[\, \times \,]0,1[\,, \\ y(x,0) = \cos(4\pi x) + x(1-x) & pour\, x \in [0,1]\,, \\ y(0,t) = \exp(-\pi^2 t) & pour\, t \in [0,1]\,, \\ y(1,t) = \exp(-\pi^2 t) & pour\, t \in [0,1]\,, \end{cases} \tag{11}$$

où $y = y(x,t)$.

1. *Donner le type (le nom) du problème (11).*

2. *Donner la solution exacte du problème (11).*

3. *Le but est de résoudre le problème (11) numériquement par la méthode de différences finies, on donne $\Delta x = \frac{1}{4}$ en espace et $\Delta t = \frac{1}{4}$ en temps. On note $y_{i,j}$ l'approximation de $y(i\Delta x, j\Delta t)$.*

- Écrire les deux schémas explicite et implicite pour le problème (11).

- Étudier la consistance et l'erreur de troncature pour les deux schémas.

- Par le critère de Fourier-Von Neumann, montrer que le schéma explicite est L^2-stable sous une condition sur Δt à préciser et le schéma implicite est inconditionnellement stable.

- Donner un résultat de convergence pour les deux schémas.

- Tracer le maillage du pavé $[-1,1] \times [0,1]$.

- Trouver la solution approchée[3] pour les deux schémas en $t = \frac{1}{4}$.

- Comparer la solution approchée pour les deux schémas avec la solution exacte[4] en $t = \frac{1}{4}$.

<u>**Solution d'exercice N°9**</u>

1. Le problème (11) est l'**équation de la chaleur** avec **condition initiale non homogène** et des **conditions aux limites de type Dirichlet**.

2. Solution exacte :

Pour montrer que $y(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$ est une solution exacte, il suffit que y vérifie le problème (11).

---

[3] Prenons l'approximation : $\exp\left(\frac{-\pi^2}{4}\right) \simeq \frac{1}{12}$, on donne les résultats à 10^{-2} près.

[4] la solution exacte du problème (1) est donnée par $y(x,t) = \exp\left(-\pi^2 t\right)\cos(4\pi x) + x(1-x)$.

On a :
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right).$$
Et on a aussi
$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right).$$

En injectant ses valeurs de dérivées dans l'équation du problème (11), on déduit que vérifie notre équation
$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) + \frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = 0$$

Maintenant, il reste à vérifiés la condition initiale et les conditions aux limites. Il est clair que
$$y(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Et avec un calcul simple on trouve :
$$y(-1,t) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = -\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$$

On a $\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)$, donc
$$\frac{\partial}{\partial x} y(1,t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) = 0$$

3. Le **schéma explicite** pour le problème (11) :
On a :
$$\frac{\partial y}{\partial t} \big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t}.$$
Et
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

On écrit le schéma d'Euler explicite correspondant au problème (11) comme suit
$$\frac{\partial y}{\partial t} \big|_{(x_i,t_j)} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \big|_{(x_i,t_j)} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} - \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}.$$

On pose $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Alors on a :
$$\boxed{y_{i,j+1} = r y_{i-1,j} + (1-2r)\, y_{i,j} + r y_{i+1,j} \text{ avec } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}}$$

- Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de Taylor de l'erreur de troncature en (x_i, t_j) , qui est définie par : $\mathcal{E}_{i,j} = \delta_t^+ y(x_i, t_j) - \delta_x^2 y(x_i, t_j)$.

Donc $\mathcal{E}_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t} y(x_i, t_j) + o(\Delta t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x_i, t_j) + o\left((\Delta x)^2\right)$.

Donc $\mathcal{E}_{i,j} = o(\Delta t) + o\left((\Delta x)^2\right)$.

Et $\mathcal{E}_{i,j} \longrightarrow 0$ lorsque $\Delta t, \Delta x \longrightarrow 0$. Alors le schéma explicite est consistant d'**ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.**

Comme le schéma est consistant donc d'après le théorème du Lax la stabilité est une condition nécessaire est suffisante pour la convergence.

- La stabilité :

On a le schéma explicite suivante :

$$y_{i,j+1} = r y_{i-1,j} + (1 - 2r) y_{i,j} + r y_{i+1,j}$$

Donc on utilise l'analyse de Von Neumann. Pour cela, on se place avec des conditions périodiques. On a :

$$\lambda^{q+1} \exp(ip\theta) = \lambda^q \left[r \exp(i(p-1)\theta) + (1-2r)\exp(ip\theta) + r\exp(i(p+1)\theta)\right].$$

Donc

$$\lambda = 2r\cos\theta + 1 - 2r.$$

Comme $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Donc, on a :

$$1 - 4r \leq \lambda \leq 1 \tag{12}$$

La partie droite de l'inégalité (12) est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de θ.

Mais la partie gauche donne $|\lambda| \leq 1$ si est seulement si $\Delta t \leq \frac{1}{2}|\Delta x|^2$.

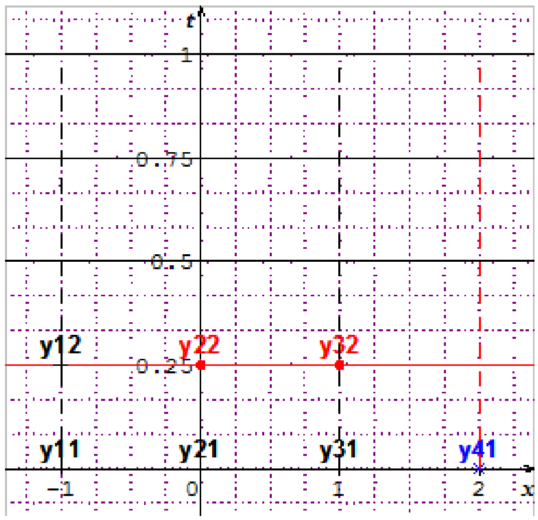
Donc, le schéma est stable sous la condition

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}|\Delta x|^2$$

- Le Maillage :

$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{2}{1} + 1 = 3$ donc $i = 1, 2, 3$

$n = \frac{l}{\Delta t} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = 5$ donc $j = \overline{1,5}$



- Solutions approchées en $t = 0.25$

On a

$$y_{i,j+1} = \frac{1}{4} y_{i-1,j} + \frac{1}{2} y_{i,j} + \frac{1}{4} y_{i+1,j}.$$

Premièrement, on a :

$\boxed{y_{1,2} = -\exp\left(-\frac{\pi^2}{4} 0.25\right) = -0.54}$

Et

$\frac{\partial y}{\partial x} \mid_{(x_3,t_1)} = \frac{y_{4,1} - y_{2,1}}{2\Delta x} = 0$

Donc $\boxed{y_{4,1} = y_{2,1}}$

On fixe $j = 1$ et on a :

Pour $i = 2$:

$$\begin{aligned} y_{2,2} &= \frac{1}{4} y_{1,1} + \frac{1}{2} y_{2,1} + \frac{1}{4} y_{3,1} \\ &= \frac{1}{4} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin(0) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $i = 3$:

$$\begin{aligned} y_{3,2} &= \frac{1}{4} y_{2,1} + \frac{1}{2} y_{3,1} + \frac{1}{4} y_{4,1} \\ &= \frac{1}{2} y_{2,1} + \frac{1}{2} y_{3,1} \\ &= \frac{1}{2} \sin(0) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

- Comparaison entre la solution exacte et approchée :

$(x_i; 0.25)$	$(-1; 0.25)$	$(0; 0.25)$	$(1; 0.25)$
solution exacte	-0.54	0	0.5
solution approchée (explicite)	-0.54	0	0.54

Exercice 10 *Montrer que, si la condition **CFL***

$$|\alpha|\,\Delta t \leq \Delta x. \tag{13}$$

n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} = 0, \tag{14}$$

pour l'équation d'advection est instable pour la donnée initiale $y_{i,0} = (-1)^i$.

<u>Solution d'exercice N°10</u>

Le schéma décentré amont est défini par

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} = 0.$$

Donc $\boxed{y_{i,j+1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,j}.}$

On a :

$y_{i,0} = (-1)^i = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^0 (-1)^i$.

$y_{i,1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,0} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,0} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)(-1)^i - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(-1)^i = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^1 (-1)^i$ psq $(-1)^{i-1} = -(-1)^i$.

...

On montre par récurrence que

$$\boxed{y_{i,j} = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i.}$$

- Pour $j = 0$: $y_{i,0} = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^0 (-1)^i = (-1)^i$. ✓
- Supposons que: $y_{i,j} = \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i$. Alors d'près (14),

$$\begin{aligned}
y_{i,j+1} &= \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) y_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} y_{i-1,j} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i\right) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left(\left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^{i-1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i \left[-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} + 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\right] \text{ psq } (-1)^{i-1} = -(-1)^i \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^j (-1)^i \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right)^{j+1} (-1)^i. \quad ✓
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite y_j reste bornée si et seulement si

$$\left|1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1.$$

ou encore si la condition CFL

$$\frac{|\alpha|\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

est vérifiée.

Exercice 11 *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Montrer que* $y\left(t\right) = \exp\left(ik.t\right)$ *est une solution de*

$$-\Delta y = \lambda y,$$

si $\left|k\right|^2 = \lambda$. *Une telle solution est appelée onde plane.*

Solution d'exercice N°11

Rappels :

✓ $\nabla y(t) = \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial y(t)}{\partial t_N}\right)$.

✓ $\Delta y(t)$[5] $= \operatorname{div}\left(\nabla y(t)\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial y(t)}{\partial t_N}\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial y(t)}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial t_N}\frac{\partial y(t)}{\partial t_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t_i^2}$.

Soit $y(t) = \exp\left(ik.t\right)$, on a

$$\boxed{\nabla y\left(t\right) = ik \exp\left(ik.t\right),}$$

et

$$\boxed{\Delta y = \operatorname{div}\left(\nabla y(t)\right) = -\left|k\right|^2 \exp\left(ik.t\right).}$$

Ainsi, y est solution de l'équation (2) dès que $\left|k\right|^2 = \lambda$.

[5] $\Delta y = \nabla.\nabla y(t)$