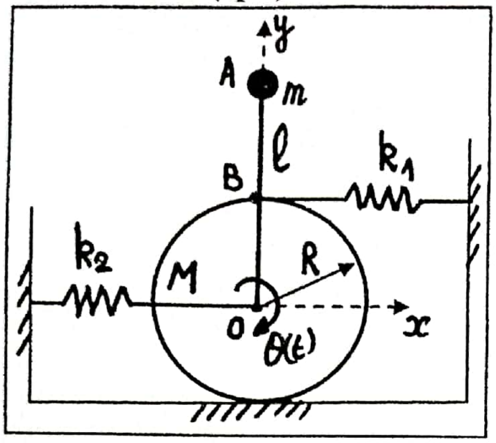
Exercice N°1 (7pts) :



Soit le système mécanique composé d'un disque de masse M et de rayon R qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Une tige de masse négligeable de longueur l soudée au centre O du disque, porte à son extrémité A une masse ponctuelle m. Le disque est relié en B par un ressort de raideur k_1 et en son centre O par un autre ressort de raideur k_2.

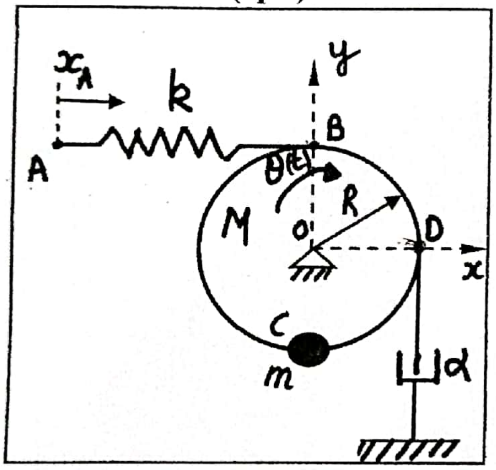
1) Déterminer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U et le Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ du système.

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement sous la forme : $\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2\,\theta(t) = 0$

3) Intégrer l'équation précédente pour trouver l'expression de la loi de déplacement $\theta(t)$, avec les conditions initiales :

$$\theta(t=0) = 0;\ \dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$$

Exercice N°3 (9pts) :



Dans le système ci-contre, le disque de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. Une masse ponctuelle m soudée sur la génératrice du disque au point C. Le disque est relié horizontalement par un ressort de raideur k au point B et verticalement au point D par un amortisseur de coefficient de frottement α. Le point A du ressort est soumis à un déplacement horizontal sinusoïdale $x_A(t) = a\cos(\Omega t)$. Faibles oscillations.

1) Déterminer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D du système.

2) Calculer le Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ du système.

3) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

4) Trouver la solution de l'équation de mouvement.

Cours (4pts):

Un fil de masse par unité de longueur μ est maintenu sous tension T. En considérant les forces agissant sur un petit élément du fil, montré que le mouvement du fil pour des petits déplacements transversaux est d´écrit par l'´equation d'onde :

$$v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Et trouver la relation entre v, T et μ.

Bonne chance

Solution du Contrôle de V.O. 17/01/2022

(8,5)

Exercice n° 1

$$M\begin{cases} x_M = R\theta \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_M = R\dot{\theta} \\ \dot{y}_M = 0 \end{cases} \Rightarrow T_M = \frac{1}{2} M R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$$ (0,25) (0,25) (0,25) (0,25)

$$T_M = \frac{3}{4} MR^2\dot{\theta}^2$$

$$m\begin{cases} x_m = R\theta + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = R\dot{\theta} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$ (0,25) (0,25) (0,5) (0,25) (0,25)

$$T_m = \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\theta}^2 + 2Rl\dot{\theta}^2\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2 + 2Rl\cos\theta + l^2\right)\dot{\theta}^2$$ (0,25)

(0,25) $$T_t = \frac{3}{4} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\left(R^2 + 2Rl\cos\theta + l^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$-\frac{\partial V_m}{\partial y} = -mg \Rightarrow V_m = mg\,y_m = mgl\cos\theta$$ (0,25) (0,25)

$$V_{k_1} = \frac{1}{2} k_1 (R\theta + R\sin\theta)^2, \quad V_{k_2} = \frac{1}{2} k_2 R^2\theta^2$$ (0,25) (0,25) (0,25)

(0,25) $$V_t = mgl\cos\theta + \frac{1}{2} k_1 (R\theta + R\sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 R^2\theta^2$$

$$L = T_t - V_t = \left[\frac{3}{4} MR^2 + \frac{1}{2} m\left(R^2 + 2Rl\cos\theta + l^2\right)\right]\dot{\theta}^2 - \left[mgl\cos\theta + \frac{1}{2} k_1(R\theta + R\sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 R^2\theta^2\right]$$ (0,25) (0,25)

Equation de mouvement:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{3}{2} MR^2 + m\left(R^2 + 2Rl\cos\theta + l^2\right)\right]\dot{\theta}$$ (0,25) (0,25) (0,25)

$\cos\theta \simeq 1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[\frac{3}{2} MR^2 + m\left(R^2 + 2Rl + l^2\right)\right]\ddot{\theta}$$ (0,25)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left[-mgl\sin\theta + k_1(R\theta + R\sin\theta)(R + R\cos\theta) + k_2 R^2\theta\right]$$ (0,25) (0,25)

$\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

$$= \left[mgl - 4k_1R^2 - k_2R^2\right]\theta$$ (0,25)

(0,25) $$\ddot{\theta} + \frac{(4k_1 + k_2)R^2 - mgl}{\frac{3}{2} MR^2 + m\left(R^2 + 2Rl + l^2\right)}\,\theta = 0 \quad ; \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$ (0,25)

(1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(4k_1+k_2)R^2 - mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R^2+2Rl+l^2)}} \quad 0{,}25$$

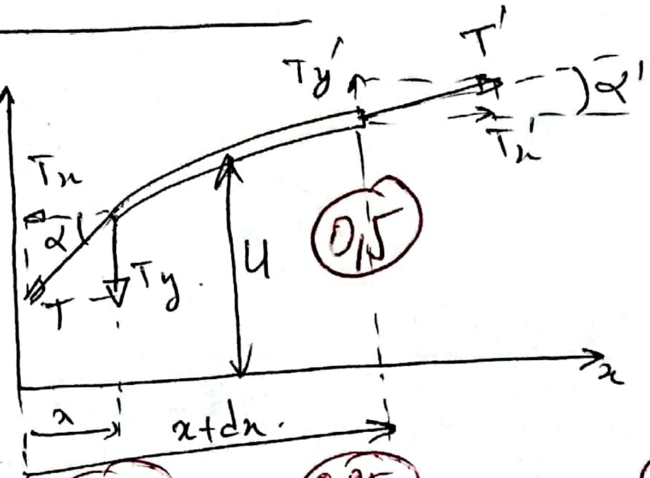
Solution : $\theta = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ 0,25 0,25

$t=0$ $\quad \theta(0)=0 \Rightarrow A\cos(\omega_0\cdot 0) + B\sin(\omega_0 \cdot 0) = 0 \Rightarrow A = 0$ 0,25

$\dot\theta(0) = B\omega_0 \cos(\omega_0\cdot 0) = \dot\theta_0 \Rightarrow B = \frac{\dot\theta_0}{\omega_0}$ 0,25

d'où $\boxed{\theta(t) = \frac{\dot\theta_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$ 0,25

Exercice n° 3.



$T_{y'} = T\sin\alpha'$ et $T_y = -T\sin\alpha$. 0,25 0,25

Force résultante sur le segment AB

$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha)$ 0,25

Comme α et α' sont petits

$$F_y = T(tg\,\alpha' - tg\,\alpha) = T\, d\, tg\alpha = T\frac{\partial}{\partial x}(tg\,\alpha)\,dx.$$ 0,25 0,25 0,25

$tg\alpha$ dépend de x et t, or $tg\,\alpha$ est la pente de la courbe que suit la corde

$$tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow F_y = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot dx$$ 0,5 0,5

cette force doit être égale à $\mu\, dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx$ 0,5

μ : densité linéaire de la corde en (kg/m)

d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$: vélocité

0,25 0,25

Exercice n°2 (8,5)

$T_M = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$ (0,5) , $m \begin{cases} x_m = -R\sin\theta & (0,25) \\ y_m = -R\cos\theta & (0,25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = -R\dot{\theta}\cos\theta & (0,25) \\ \dot{y}_m = +R\dot{\theta}\sin\theta & (0,25) \end{cases}$

$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$ (0,25)

$T_t = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$

$-\frac{\partial V_m}{\partial y} = -mg \Rightarrow V_m = m g y_m = -mgR\cos\theta$ (0,25) (0,25)

$V_k = \frac{1}{2} k \left(R\sin\theta - x_A\right)^2$ (0,25) (0,25) , $V_t = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2} k \left(R\sin\theta - x_A\right)^2$

$L = \left(\frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta - \frac{1}{2} k \left(R\sin\theta - x_A\right)^2$

~~Equation~~ $D = \frac{1}{2}\alpha \dot{y}_\alpha^2$, $y_\alpha = R\sin\theta \Rightarrow \dot{y}_\alpha = R\dot{\theta}\cos\theta$ (0,25)

$\cos\theta \simeq 1$

$\Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha R^2 \dot{\theta}^2$ (0,25)

Equation de mouvement :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{1}{2} M R^2 + m R^2\right)\dot{\theta}$ (0,25)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2} M + m\right) R^2 \ddot{\theta}$ (0,25)

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta - k\left(R\sin\theta - x_A\right)\left(R\cos\theta\right)$ (0,25) (0,25)

$\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

$= -mgR\theta - kR^2\theta + kRx_A = -\left(mgR + kR^2\right)\theta + kRx_A$ (0,25)

$-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = -\alpha R^2 \dot{\theta}$ (0,25)

$\left(\frac{1}{2} M R^2 + m R^2\right)\ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + \left(mgR + kR^2\right)\theta = kRx_A$

$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}\dot{\theta} + \frac{mgR + kR^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}\theta = \left(\frac{kR}{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}\right) x_A$ (0,25) (0,25) (0,25) (0,25)

avec $x_A = a\cos\Omega t$

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \Delta \cos \Omega t$$ 0,25

avec

$$\Delta = \frac{kRa}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2}$$

$$\delta = \frac{\alpha}{M+2m}$$ 0,25

$$\omega_0^2 = \frac{mg + kR}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R}$$ 0,25

Solution : $\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$ 0,25

$\theta_H(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$ 0,25 , $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 0,25

$\theta_p(t) = B \cos(\Omega t + \varphi)$ 0,25 , notation complexe $\underline{\theta} = \underline{B}\, e^{j\Omega t}$ 0,25

$\underline{F} = \Delta e^{j\Omega t}$ 0,25 , on obtient

$$\Omega^2 \underline{B}\, e^{j\Omega t} + 2\delta j \Omega \underline{B}\, e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{B}\, e^{j\Omega t} = \Delta e^{j\Omega t}$$

$$\underline{B} = \frac{\Delta}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta j \Omega}$$

d'où $B = \dfrac{\Delta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$ 0,25 , $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ 0,25