Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B — 10 Jan 2023

Département de MI — Durée : 1,5 h

Examen -Optimisation sans contraintes- 3ème année

Exercice 01 :

1. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f \leq g$
   – Démontrer que : si f est coercive alors g est coercive.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x) = \langle ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c, \qquad \text{où} \quad a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^n.$$

– Etudier la coercivité de fonction f pour toute les valeurs de a.

3. Soient $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle ax, x\rangle}, \qquad \text{où } A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et } a \in \mathbb{R}^n.$$

– Calculer $\nabla f(x)$.

4. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction de deux variables $f(x, y) = \cos(xe^y)$ au voisinage de $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Exercice 02 :

1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.
   (a) Trouver une matrice carrée A symétrique d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$ pour laquelle f s'écrire sous la forme suivante
$$f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle + c \qquad \text{où } u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
   (b) Pour quelles valeurs de a, la fonction f est-elle convexe? strictement convexe?
2. Supposons que $a \in]-2, 2[$, et on considère le problème de minimisation suivant
$$(P_1) : \begin{cases} \min f(x, y) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$
   (a) Montrer que le problème (P_1) admet une seule solution.
   (b) Résoudre le problème (P_1), en déduire la valeur minimale de f.

Exercice 03 : On considère le problème d'optimalité suivant
$$(P_2) : \begin{cases} \min J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle, \\ v \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $v = (x_1; x_2)$, trouver les coefficients $a_i; i = \overline{1, 6}$ où
$$J(x_1; x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1 + a_5x_1 + a_6.$$
2. Trouver un vecteur $d \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ tel que les deux vecteur b et d sont A-conjugués.
3. En partant du point initial $(1; 1)$, calculer les deux premières itérations en appliquant la méthode du gradient conjugués.

Corrigé type de l'examen

Exo 1 :

1. Si $f \leq g \Rightarrow \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(x)$

si f est coercive $\Rightarrow \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, Alors $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(x) \geq +\infty$ (01)

$\Rightarrow \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow g$ est coercive.

2- Exemple de TD (2,5)

3- On sait que $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ (0,5) et $\begin{cases} \nabla\langle Ax, x\rangle = (A + A^T)(x) & (0,5) \\ \nabla\langle ax, x\rangle = a\nabla\langle x, x\rangle = 2ax & (0,5) \end{cases}$

Alors $\nabla \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle ax, x\rangle} = \frac{\langle ax,x\rangle (A + A^T)(x) - 2ax\langle Ax, x\rangle}{\langle ax, x\rangle^2}$

4) la fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ car elle est composition et produit des fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ donc elle admet un developpement de Taylor à l'ordre "2" au voisinage de $(\pi/2, 0)$, et on a : (0,5)

et on a : $f(h_1 + \pi/2, h_2) = f(0,0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2)$

tq $\varepsilon(h_1, h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2) \to (\pi/2, 0)]{} 0$

$f(x,y) = \cos(xe^y) \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}, 0) = \cos \pi/2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^y \sin(xe^y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 0) = -1$ (0,25) $\times 6$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^y \sin(xe^y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 0) = -\pi/2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -e^{2y} \cos(xe^y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi/2, 0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -xe^y \sin(xy) - x^2 e^{2y} \cos(xe^y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pi/2, 0) = -\pi/2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -e^y \sin(xe^y) - xe^{2y} \cos(xe^y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi/2, 0) = -1$

$f(h_1 + \pi/2, h_2) = -h_1 - \frac{\pi h_2}{2} - \frac{\pi h_2^2}{2} - h_1 h_2 + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(h_1, h_2)$

tq $\varepsilon(h_1, h_2) \xrightarrow{(h_1,h_2) \to (\pi/2, 0)} 0$

Exo2 :

1) $A = 2\begin{pmatrix}1 & a/2\\ a/2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & a\\ a & 2\end{pmatrix}$ 0,5 , $b = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ 0,5 , $c = 0$ 0,5

A est symétrique et on a

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda & a\\ a & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2-\lambda = \pm a$ 01

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm a \Leftrightarrow \lambda_1 = 2+a \,,\ \lambda_2 = 2-a$

* Pour A soit convexe il faut (A est semi-définie positive) $\begin{cases}\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow 2+a \geq 0 \Rightarrow a \geq -2\\ \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow 2-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2\end{cases} \Rightarrow a \in [-2,2]$ 0,5

* Pour A soit strictement convexe il faut $a \in \,]-2,2[$. (pour que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$) 0,5
(A est définie positive).

2) On a A est symétrique définie positive, alors la fonction f est coercive et d'après la question 1 - elle est strictement convexe ($a \in \,]-2,2[$) 02 et elle est continue (polynome d'ordre "2") et propre donc le pb (P_1) admet une seul solution. 0,5

$\nabla f(x^*,y^*) = 0 \Leftrightarrow AX^* - b = 0 \Leftrightarrow AX^* = b \Leftrightarrow$

$\begin{cases}2x^* + ay^* = 2\\ 2y^* + ax^* = 2\end{cases} \Rightarrow x^* = \dfrac{\begin{vmatrix}a & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\ a & 2\end{vmatrix}} = \dfrac{2a-4}{4-a^2}$ 0,5

et $y^* = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ a & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\ a & 2\end{vmatrix}} = \dfrac{4-2a}{4-a^2}$ 0,5

$f(x^*,y^*) =$ 0,5

Exercice 03 : $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$, $C = 0$.

1)

$f(x_1,x_2) = x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{2} + x_1x_2 + x_1 - 2x_2$ 0,25 × 6

Donc $a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = -2,\ a_6 = 0$.

* Considérons $d\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, d_1 et d_2 sont A-conjugués ssi $\cancel{bAd} = 0$ 0,5

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0$$ 0,5

$$0 d_1 + 1 d_2 = 0 \Leftrightarrow d_2 = 0$$

Si on pose $d_1 = 1 \Rightarrow d_2 = 0 \Rightarrow d\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

* $x_0 = (1,1)$, $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -\nabla f(1,1) = d_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_0 = -\frac{(-4,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{(-4,0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{+16}{(-8\ -4)\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{16}{32} = 0,5 = \frac{1}{2}$$ 0,5

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 + 0,5 \times 4 = 3 \\ x_2^1 = x_2^0 + 0,5 \times 0 = 1 \end{cases}$$ 0,5

$$\beta_1 = \frac{\nabla^T f(-1,82, -0,86)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{(-3\ -2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}} = \frac{(-4,5; -2,68)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{14}$$ 0,5

$$= \frac{(-11,68; -7,18)\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{14} = \frac{49,4}{14} \simeq 3,53$$

$$d_1 = -\nabla f(-1,82, -0,86) + 3,53\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15,09 \\ -9,74 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\alpha_1 = -\frac{d_1^T \nabla f(x_1^1, x_2^1)}{d_1^T A d_1} = -\frac{(-15,09; -9,74)\begin{pmatrix} -4,5 \\ -2,68 \end{pmatrix}}{(-15,09; -9,74)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15,09 \\ -9,74 \end{pmatrix}} \simeq \frac{94}{(-39,92; -24,83)\begin{pmatrix} -15,09 \\ -9,74 \end{pmatrix}}$$

$$\simeq \frac{94}{844,24} \simeq 0,11$$ 0,5