3. STATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES

3.1 Caractéristiques des fluides

Les fluides sont des substances susceptibles de s'écouler et de prendre la forme du récipient qui les contient; on dit qu'ils sont sans forme propre.

On peut répartir les fluides en deux grandes catégories:

- les liquides
- les gaz

Les liquides sont pratiquement incompressibles. Ils produisent des surfaces libres, occupent des volumes bien définis quand ils sont en contact avec l'atmosphère.

Les gaz sont compressibles, ils se dilatent jusqu'à occuper toutes parties du récipient qui les contient.

3.1.1 Particule de fluide – Milieu continu

• En mécanique des fluides, on ne considère pas le comportement individuel des atomes, molécules qui composent le fluide.

• On étudie le mouvement, les propriétés d'une particule de fluide : élément de volume petit devant la taille des récipients, tuyaux, barrages… que nous allons étudier, mais grand devant les distances entre les molécules et contenant un grand nombre de molécules.

$\Rightarrow$ approximation du milieu continu

exemple :

Un cube de 1 µm^3 contient ≈ 3 10^7 molécules de gaz dans les conditions normales.

Les distances entre molécules sont ≈ 30 nm

$\Rightarrow$ l'approximation du milieu continu est valable.

3.1.2 Grandeurs caractéristiques

• masse volumique

La masse volumique d'un fluide détermine l'inertie d'un élément de volume

- Pour les liquides : $\rho \approx 10^3$ kg m-^{3}
- Pour les gaz :

La masse volumique d'un gaz est calculable à partir de son équation d'état (cf. chapitre suivant).

Pour un gaz considéré comme parfait, on a :

$$p\,V = n\,R\,T$$

- p : pression (Pa)
- V : volume (m^3)
- n : nombre de mol
- R : Constante molaire des gaz parfaits (GP)

$$R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

- T : Température (K)

Cette équation d'état peut être réécrite sous une autre forme en faisant intervenir la masse volumique et la masse molaire du gaz :

La masse de n mol de gaz de masse volumique ρ et occupant un volume V est :

$n \cdot M = \rho \cdot V$ où M est la masse molaire du gaz

d'où :

$$\frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$$

L'équation d'état peut donc s'écrire :,

$$p = \rho \frac{R}{M} T \qquad \text{ou encore} \qquad p\, V_S = \frac{R}{M} T$$

- ρ : masse volumique du gaz ($kg\ m^{-3}$)
- V_S : volume spécifique ($1/\rho$) ($m^3.kg^{-1}$)

Cette équation est parfois établie en fonction de la constante massique des gaz définie par :

$$r = \frac{R}{M} \qquad J\ K^{-1}\ kg^{-1} \qquad p = \rho\ r\ T$$

La constante r est définie pour chaque gaz.

$r = 259.82\ J\ K^{-1}\ kg^{-1}$ pour le dioxygène

$r = 297\ J\ K^{-1}\ kg^{-1}$ pour le diazote

• compressibilité

La <u>compressibilité</u> caractérise l'aptitude d'un fluide à changer de volume sous l'effet d'une variation de pression. On définit de coefficient de compressibilité isotherme χ_T par :

$$\frac{dV}{V} = -\chi_T \,.\, dp \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \chi_T \,.\, dp$$

Si la pression augmente ($dp > 0$) alors le volume diminue et la masse volumique augmente.

Exemples :

- eau (dans les conditions normales)

  $\chi_0 = 0.5\ 10^{-9}\ m^2\ N^{-1}$ (Pa^{-1})

L'eau peut être considérée comme quasiment incompressible. On notera toutefois que si l'eau de mer était réellement incompressible, le niveau moyen des eaux serait surélevé de 30 m.

- gaz

  $\chi_0 = 10^{-5}\ m^2\ N^{-1}$

- **Viscosité**
- La viscosité d'un fluide caractérise sa capacité à s'écouler dans un tube, un canal, un récipient.

- La viscosité d'un fluide est principalement due à l'interaction entre les molécules constituant le fluide.

- Pour un fluide considéré comme parfait, les molécules constituant le fluide glissent les unes sur les autres sans frottement.

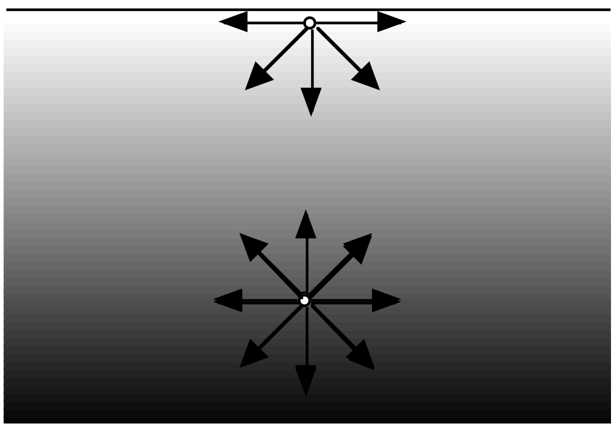
- Pour un fluide réel, la viscosité est prise en compte et se traduit par l'apparition de forces non conservatives (dissipant l'énergie mécanique sous forme de chaleur).

- Suivant la nature de l'écoulement, un fluide pourra être considéré parfait (la viscosité est négligeable) ou réel (la viscosité n'est plus négligeable).

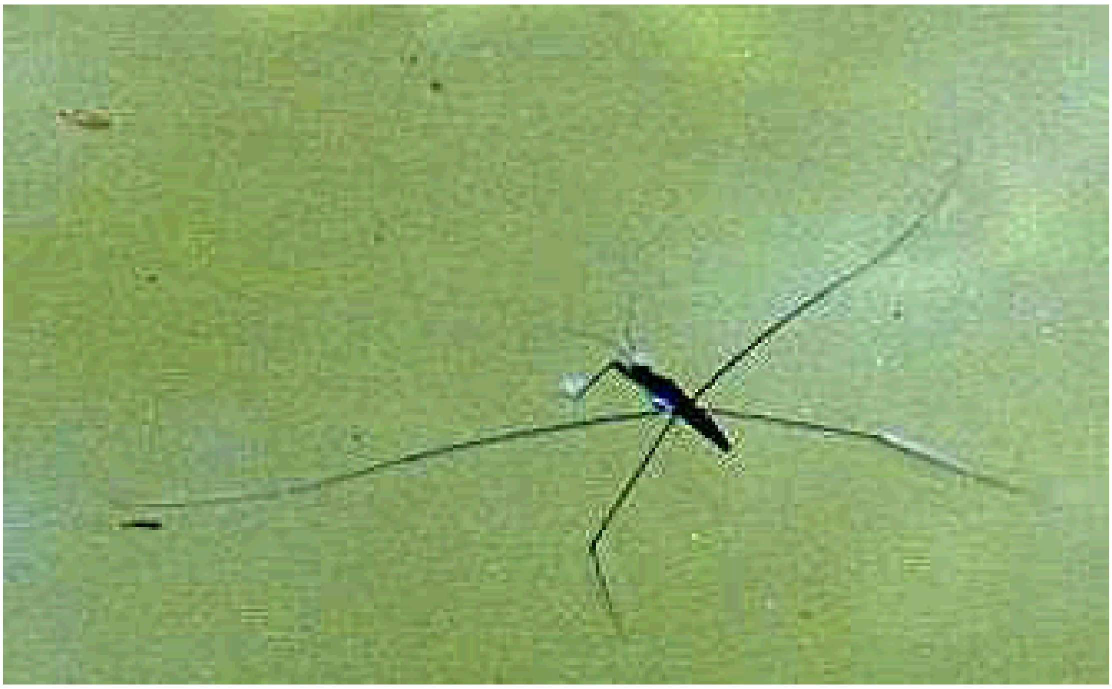
• Tension superficielle / énergie interfaciale

- La tension superficielle, ou énergie d'interface, ou énergie de surface, est la tension qui existe à la surface de séparation de deux milieux.
- L'existence du volume propre est la manifestation des forces de cohésion entre les atomes (ions, molécules) qui les constituent.

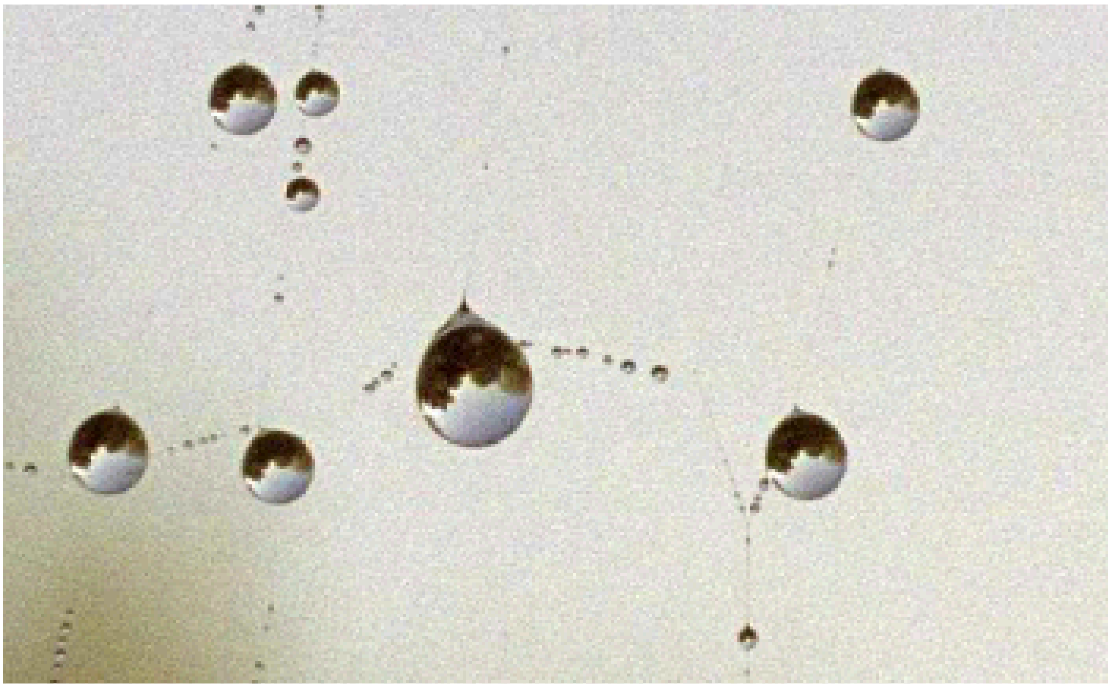
Rôle de la surface



- La molécule à l'intérieur du liquide est soumise à des forces d'attraction agissant dans toutes les directions : la résultante est nulle
- La molécule située à la surface est soumise à des forces dont la résultante est dirigée vers l'intérieur du liquide



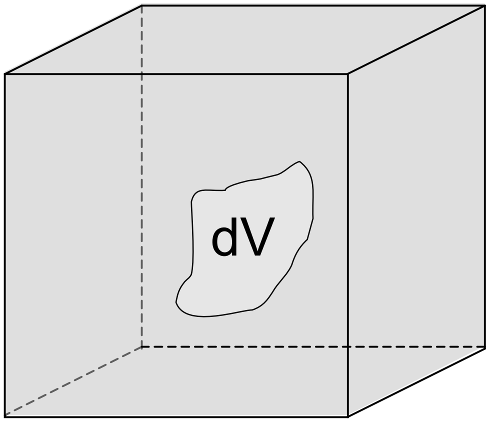
Insecte flottant sur l’eau



Gouttes de rosée

3.2 Forces de pression

Considérons un élément de volume de fluide de masse *dm* en équilibre mécanique avec le reste du fluide environnant :



$dm = \rho\, dV$

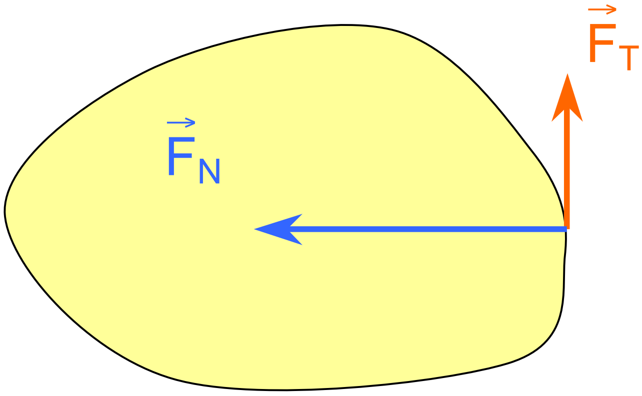
Cet élément de volume est soumis à :

• des forces de volume : dues à l'existence de champs auxquels peut être soumis dV :

- de gravité (pesanteur),
- accélération.

• des <u>forces de surface</u> : qui se décomposent en :

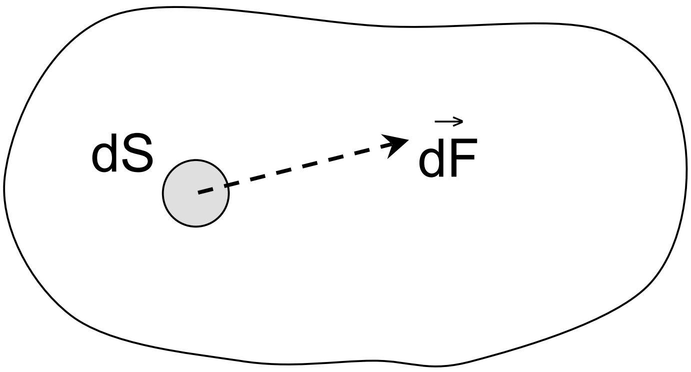
- forces tangentielles F_T liées à la viscosité du fluide
  → *ne concernent que les fluides en mouvement*
- forces normales (⊥) F_N à la surface au point considéré et <u>dirigées vers l'intérieur</u> de l'élément de volume : **forces de pression hydrostatique**



Nous nous limiterons à l'étude des forces de pression.

La pression hydrostatique est définie comme le rapport

$$p = \frac{dF}{dS}$$



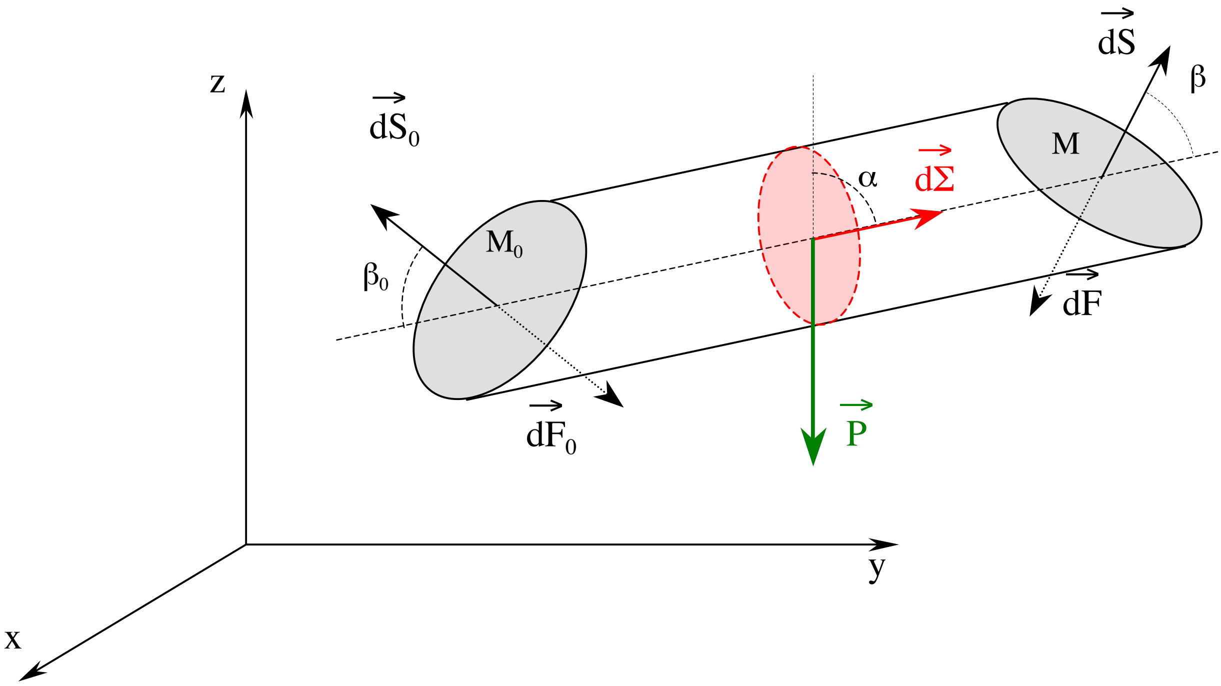
Lorsque la force F est uniformément répartie sur la surface S, on a

$$p = \frac{F}{S}$$

La pression est une grandeur scalaire ne dépend pas de la direction

3.3 Relation fondamentale de l'hydrostatique

On considère un liquide homogène, de masse volumique ρ (constante) et un système d'axes Oxyz,



- Soient 2 points M et M_0 de cotes respectives z et z_0, où règnent les pressions p et p_0.
- On s'intéresse au fluide contenu dans l'élément de volume dV défini par le cylindre de génératrice // à (MM_0) et les 2 surfaces dS et dS_0.

- Le fluide est en équilibre $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

1) Bilan des forces extérieures

- Forces de volume : le poids $P = \rho\, g\, dV$
- Forces de surface : pressions exercées
  - sur dS ($d\vec{F}$), sur dS_0 ($d\vec{F}_0$),
  - sur les parois latérales du cylindre

2) On écrit la condition d'équilibre en projetant sur M_0M (on oriente dans le sens $M_0 \rightarrow M$) :

$$-\rho\, g\, dV \cos\alpha + p_0\, dS_0 \cos\beta_0 - p\, dS \cos\beta = 0$$

or $\quad dV = M_0M \,.\, d\Sigma$ (note 1)

et $\quad M_0M.\ \cos\alpha = z - z_0$

de plus $\quad dS_0 \,.\, \cos\beta_0 = d\Sigma$ (note 2)

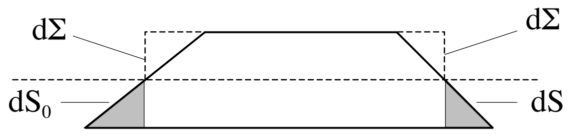
$\quad dS \,.\, \cos\beta = d\Sigma$

La condition d'équilibre s'écrit donc :

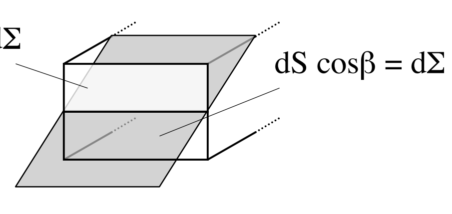
$$-\rho\, g\, (z - z_0) + p_0 - p = 0$$

---

[1] dV ne dépend pas de l'orientation de dS_0 et dS comme le montre le schéma ci-contre :



[2] on le montre facilement pour des sections comportant des angles droits :



ou encore

$$p_0 - p = \rho\, g\, (z - z_0)$$

Équation fondamentale de l'hydrostatique

Conséquences :

- les surfaces isobares sont horizontales

$$p = C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad z = C^{te}$$

- la surface libre d'un liquide au repos est horizontale

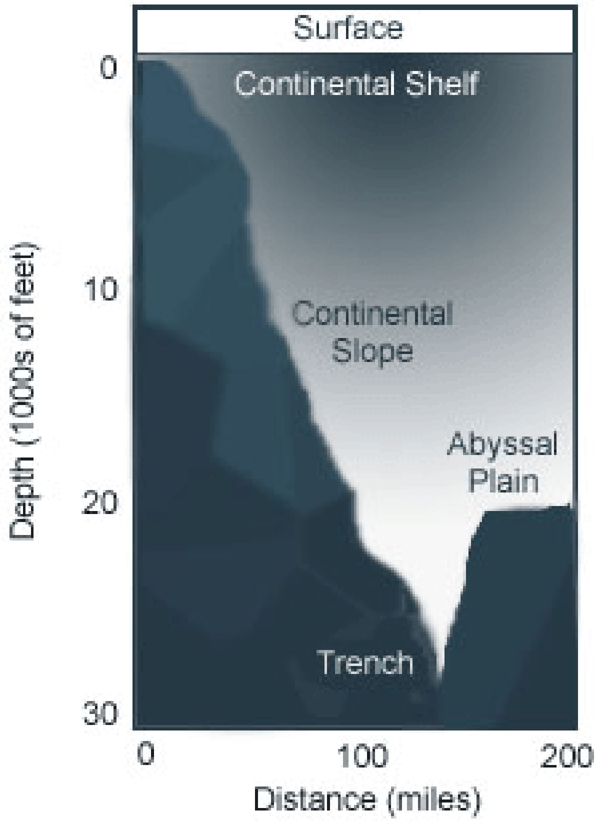
$$p = C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad z = C^{te}$$

- principe des vases communicants

- baromètres, piézomètres

Applications :

Pression au fond de la fosse des Mariannes (-10196 m)



$p_0 = p_{atm} = 101325$ Pa

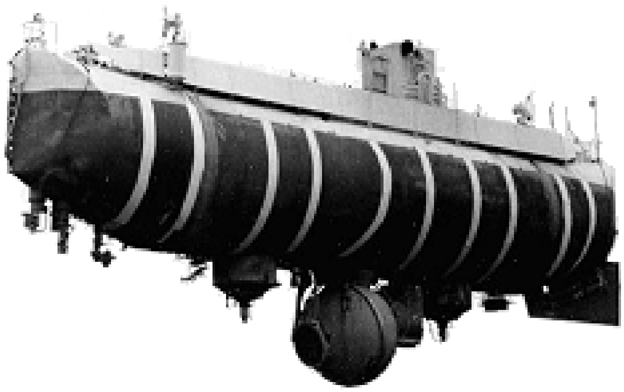
$z_0 = 0$ (niveau de référence)

$z = -10196$ m

$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$

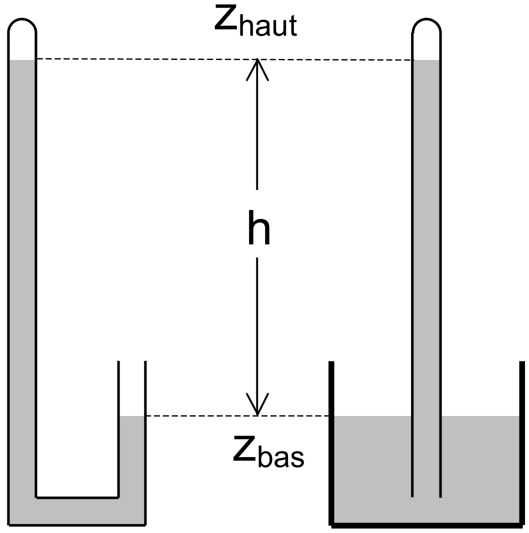
$p = 101325 + 1030 \times 9.81 \times 10196 = 103.12\ 10^6$ Pa

≈ 1018 atm



photographie du bathyscaphe d'Auguste Picard

Baromètre : Dispositif inventé par E. Torricelli (1608-1647)



Les deux dispositifs représentés ci-contre sont équivalents : ils sont remplis par un liquide de masse volumique ρ.

La relation fondamentale de l'hydrostatique appliquée à ce système est :

$$p(z_{haut}) + \rho\, g\, z_{haut} = p(z_{bas}) + \rho\, g\, z_{bas}$$

$$\Delta p = p(z_{bas}) - p(z_{haut}) = \rho\, g\, (z_{haut} - z_{bas}) = \rho\, g\, h$$

→ La différence de pression est proportionnelle à la hauteur de la colonne de liquide.

• Or $p(z_{haut}) = 0$; c'est le vide (en toute rigueur; ce n'est pas vrai car le liquide s'évapore un peu).

• $p(z_{bas}) = p_{atm}$; la surface libre du liquide est à la pression atmosphérique

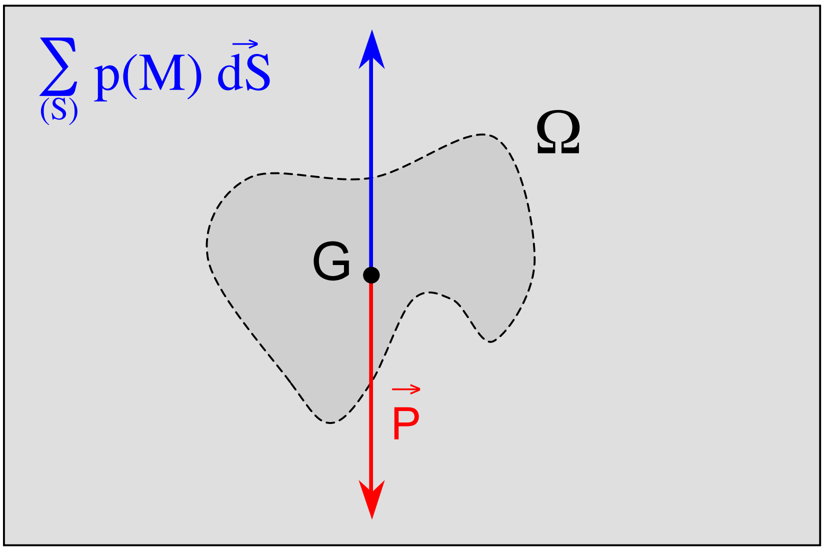
→ La hauteur de la colonne de liquide est proportionnelle à la pression atmosphérique

• On utilise généralement du mercure (ρ = 13570 kg m^{-3}); p_{atm} équivaut à une hauteur de liquide égale à 760 mm.

• Si on voulait construire un baromètre en utilisant de l'eau; il faudrait une hauteur de 10.33 m.

3.4 Poussée d'Archimède (287 – 212 av JC)

On considère un certain volume de fluide Ω au sein d'une masse de fluide (gaz ou liquide).



Le volume de fluide considéré, Ω, est en équilibre. Il est soumis à :

- son propre poids $\vec{P}$
- les forces de pression s'exerçant sur sa surface :

$$\sum_{(S)} p(M)\, d\vec{S}$$

La situation d'équilibre est :

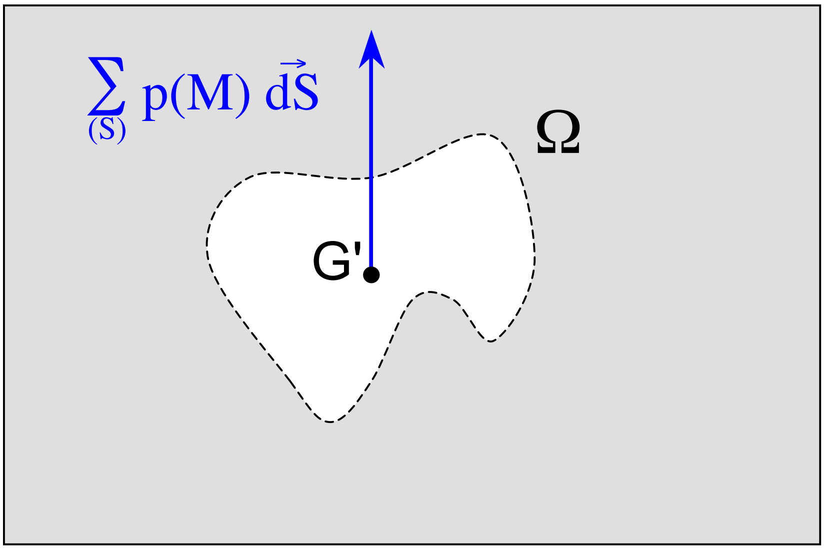
$$\vec{P} + \sum_{(S)} p(M)\, d\vec{S} = \vec{0}$$

D'où :

$$\sum_{(S)} p(M)\,\vec{dS} = -\vec{P}$$

La somme des forces de pression exercées sur la surface de Ω est exactement compensée par le poids du fluide contenu dans Ω.

Remplaçons le volume de fluide par un corps différent (solide, liquide ou gazeux) ayant le même contour :



La surface définissant le volume étant identique, les forces de pression sont les mêmes que précédemment : en intensité et point d'application

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE

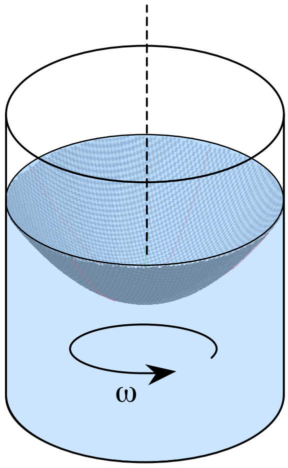
Les forces de pression sur un volume quelconque immergé dans un(des) fluide(s) en équilibre mécanique peuvent être modélisés par une résultante, la poussée d'Archimède, égale à l'opposée du poids qu'aurait ce même volume occupé par des fluides en équilibre, et s'appliquant au centre de gravité G' de ce volume de fluide.

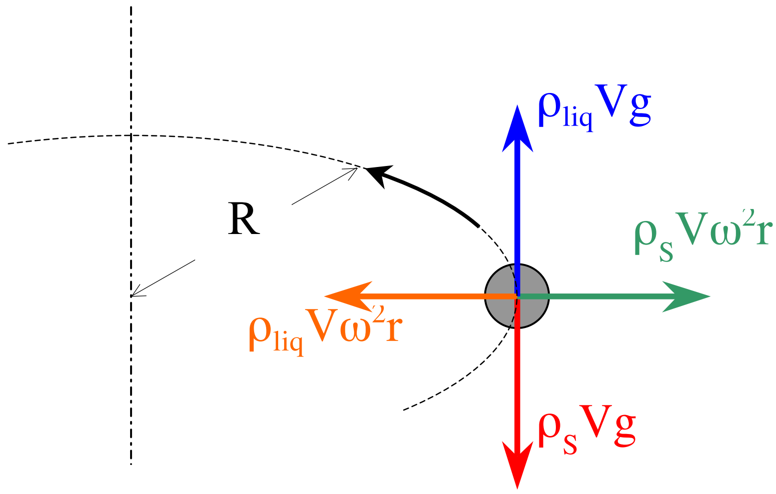
Équilibre des corps flottants / immergés :

- si la densité du corps immergé est supérieure à celle du fluide, le corps tombe car son poids est supérieur à la poussée exercée par le fluide.
- si la densité du corps immergé est égale à celle du fluide, le corps est en équilibre.
- si la densité du corps immergé est inférieure à celle du fluide, le corps flotte (ou remonte) car son poids est inférieur à la poussée exercée par le fluide.

• Application : Centrifugation / Ultracentrifugation

Une particule de masse volumique ρ_S et de volume V est placée dans un fluide de masse volumique ρ_{liq} en rotation (à la vitesse angulaire ω)





Cette particule est soumise à :

- son propre poids ρ_S V g
- une force d'inertie centrifuge : ρ_S V ω^2 R
- à la poussée d'Archimède qu'elle subirait si le fluide n'était pas en rotation : ρ_{liq} V g
- à la force que subirait le même volume de liquide soumis à la force d'inertie centrifuge et en équilibre mécanique : ρ_{liq} V ω^2 R

Cette dernière force est l'équivalent de la poussée d'Archimède dans le cas d'une accélération qui n'est pas due au champ de pesanteur.

Deux cas de figures :

- si ρ_S est supérieure à ρ_{liq} alors la somme des forces est dirigée vers le bas et vers l'extérieur
- si ρ_S est inférieure à ρ_{liq} alors la somme des forces est dirigée vers le haut et vers l'intérieur

Il est possible de séparer par centrifugation des particules ayant des tailles et des masses volumiques différentes.
Par ultracentrifugation, il est également possible de séparer par des molécules et isotopes de masses volumiques différentes.

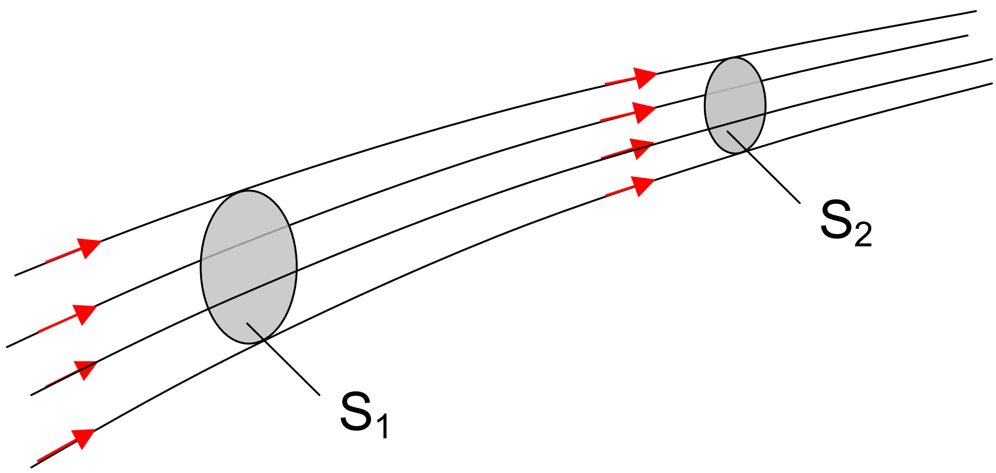
3.5 Relation de Bernouilli (Daniel 1700 – 1782)

3.5.1 Conservation du débit

• Débit massique

On considère un fluide parfait en mouvement stationnaire (invariant dans le temps)

Dans l'ensemble de ce fluide en mouvement, on isole un **tube de courant** : partie élémentaire du fluide en mouvement, construit sur les lignes de courant (courbe tangente aux vecteurs vitesse de chaque particule de fluide).

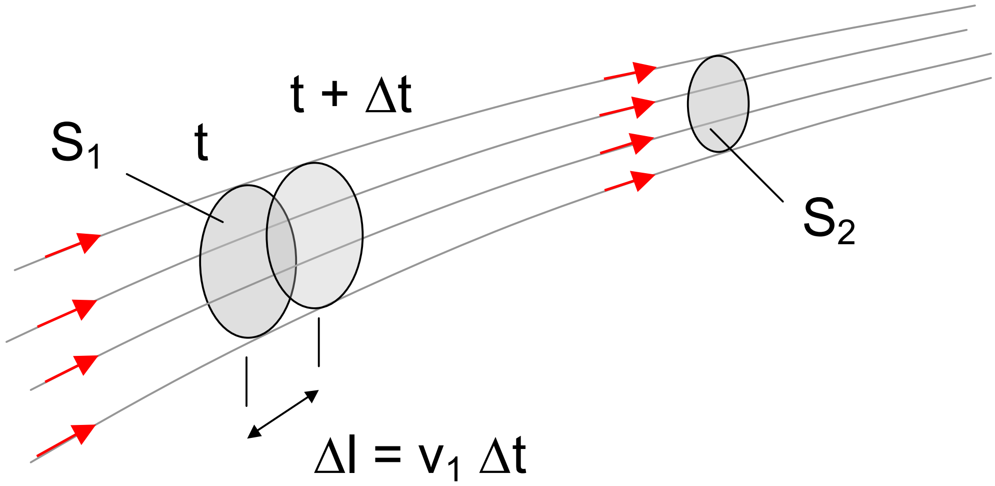


Par construction, comme les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs vitesse, aucune particule de fluide de peut sortir du tube de courant.

Tout ce qui passe par S_1 passe par S_2.

→ *analogie avec les péages autoroutiers*

Entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$,



Pendant l'intervalle de temps Δt, la masse de fluide Δm qui s'écoule à travers S_1 est :

$$\Delta m = \rho\, S_1\, \Delta l = \rho\, S_1\, v_1\, \Delta t$$

La quantité $D_m = \rho\, S\, v$ est appelé **débit massique** :

$[D_m] = M\, T^{-1}$ $\quad\quad$ D_m en kg s^{-1}

On peut également définir le **débit volumique** :

$D_m = \rho\, D_v$ $\quad\quad$ $[D_v] = L^3\, T^{-1}$ $\quad\quad$ D_v en $m^3\, s^{-1}$

Pour un écoulement stationnaire, la conservation du débit massique entre les surfaces S_1 et S_2 impose :

$$D_m(S_1) = D_m(S_2)$$

Pour un fluide incompressible : $\rho = C^{te}$, il s'ensuit que :

$$D_v(S_1) = D_v(S_2)$$

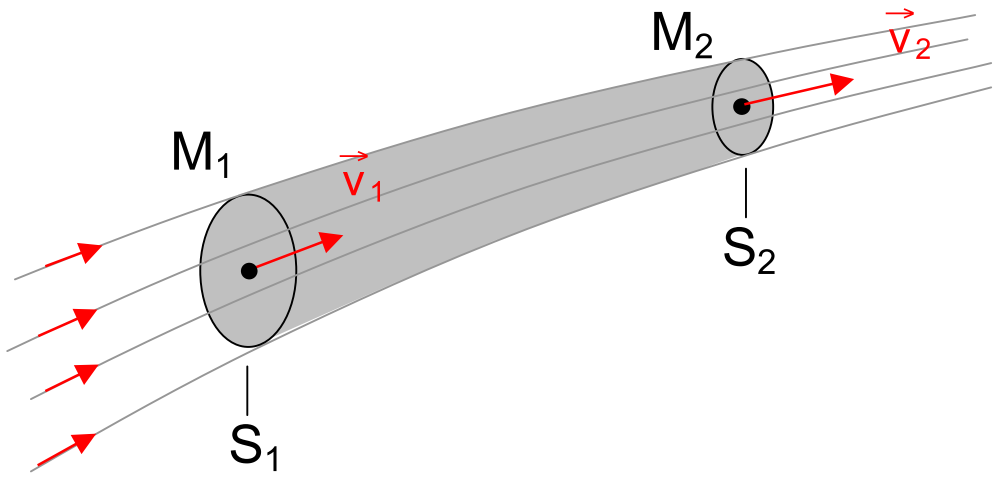
ou encore : $\quad S_1\, v_1 = S_2\, v_2$

3.5.2 Relation de Bernouilli

On considère un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur uniforme.

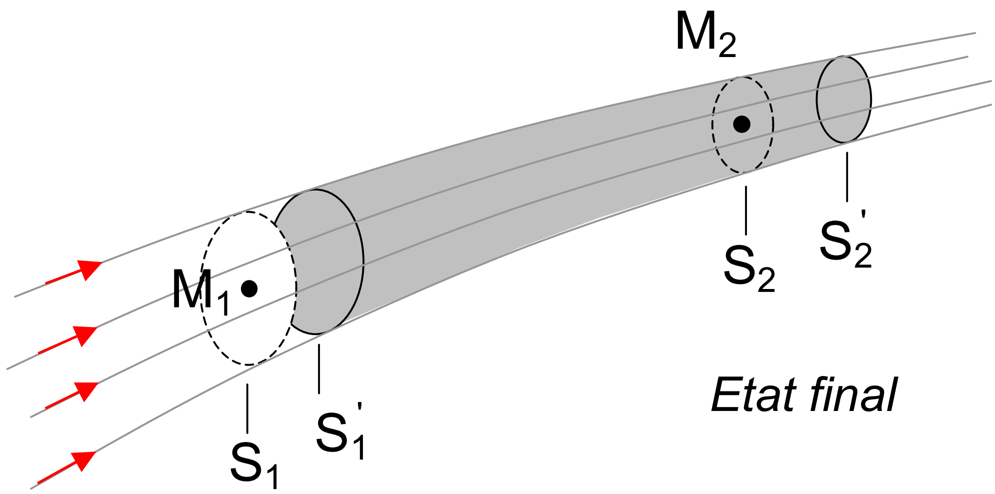
On s'intéresse au déplacement du volume de fluide (masse δm et volume δV) compris entre les surfaces S_1 et S_2 à l'instant t :

- S_1 centrée autour du point M_1 de cote z_1 soumis à la pression p_1, vitesse du fluide = v_1
- S_2 centrée autour du point M_2 de cote z_2 soumis à la pression p_2, vitesse du fluide = v_2



Etat initial

À l'instant t + Δt, le volume de fluide a avancé : il occupe maintenant le volume compris entre $S_1^{'}$ et $S_2^{'}$:



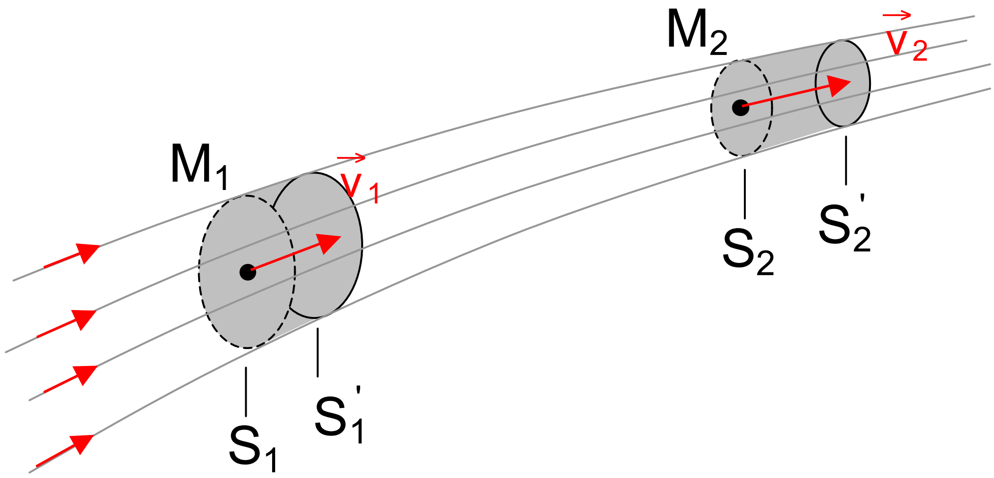
On veut déterminer la variation d'énergie mécanique du système. Celui-ci est soumis à :

- son poids
- les forces de pression exercées sur la surface du tube de courant :
  - $p_1 \cdot S_1$ en M_1, dirigée dans le sens de $\vec{v}_1$
  - $p_2 \cdot S_2$ en M_2, dirigée dans le sens opposé à $\vec{v}_2$
  - les forces exercées sur les parois latérales du tube, ces dernières étant perpendiculaires en chaque point au vecteur vitesse, leur travail sera nul

Remarques :

- Comme le fluide est incompressible, il y a conservation des débits massique et volumique.
- La masse δm et le volume δV considérés à l'instant initial sont les identiques à ceux de l'état final

En termes d'énergie mécanique, tout se passe comme si on avait déplacé la masse située dans le volume compris entre S_1 et $S_1^{'}$ vers le volume compris entre S_2 et $S_2^{'}$



Bilan énergétique :

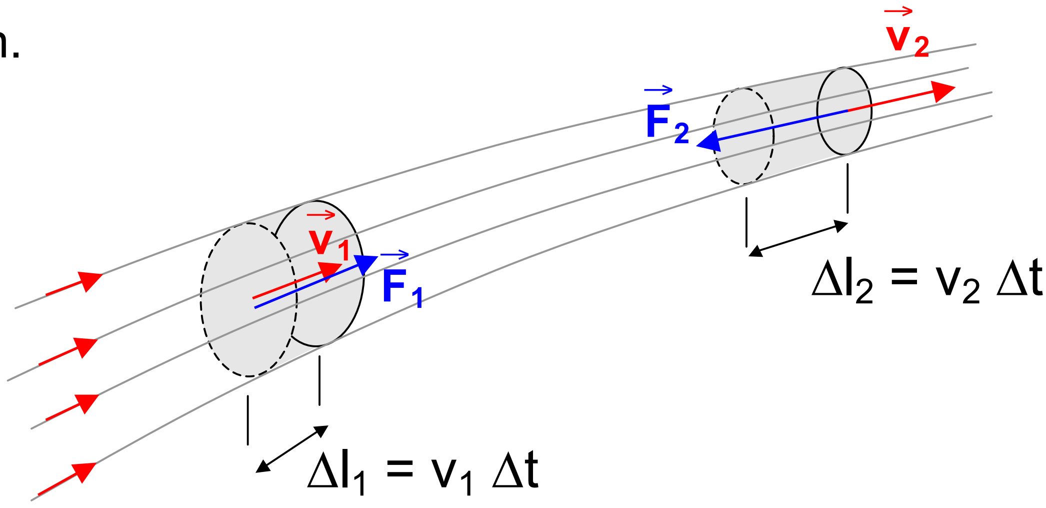
- Variation d'énergie potentielle :

$$\Delta Ep_{(i \to f)} = \delta m \, g \, (z_2 - z_1)$$

- Variation d'énergie cinétique :

$$\Delta Ec_{(i \to f)} = \frac{1}{2} \delta m \, (v_2^2 - v_1^2)$$

Cette variation d'énergie mécanique est compensée par le travail des forces extérieures en l'occurrence les forces de pression.



$\vec{F}_1$ dans le sens du déplacement :

$$\Delta W_1 = +\ F_1\ \Delta l_1 = +\ p_1\ S_1\ v_1\ \Delta t = p_1\ \frac{\delta m}{\rho}$$

$\vec{F}_2$ opposée au déplacement :

$$\Delta W_2 = -\ F_2\ \Delta l_2 = -\ p_2\ S_2\ v_2\ \Delta t = -\ p_2\ \frac{\delta m}{\rho}$$

Le travail total des forces de pression est :

$$\Delta W = (p_1 - p_2)\ \frac{\delta m}{\rho}$$

D'où, finalement :

$$\Delta Ep_{(i \to f)} + \Delta Ec_{(i \to f)} = \Delta W$$

$$(p_1 - p_2)\ \frac{\delta m}{\rho} = \delta m\ g\ (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\ \delta m\ (\ v_2^2 - v_1^2\ )$$

soit :

$$(p_2 - p_1) + \rho\ g\ (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\ \rho\ (\ v_2^2 - v_1^2\ ) = 0$$

ou encore :

$$p_1 + \rho\, g\, z_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = p_2 + \rho\, g\, z_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 = C^{te}$$

Relation de Bernouilli, valable pour un fluide parfait, incompressible en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur uniforme.

La quantité $p_1 + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ est conservée le long d'une ligne de courant.

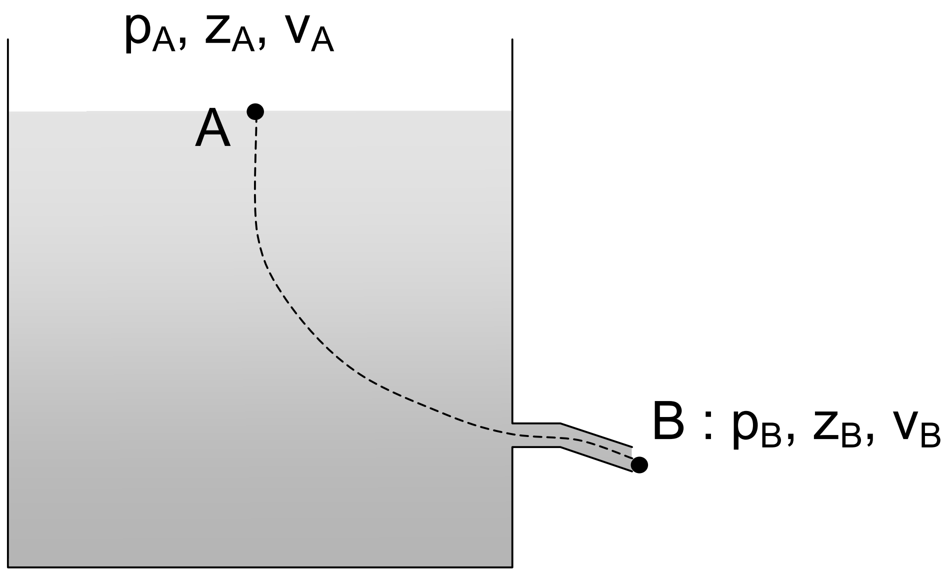
Effectuons une analyse dimensionnelle de cette équation. Tous les termes de cette équation sont homogènes à une pression, c'est-à-dire à une **force / unité de surface** ce qui est équivalent à une **énergie /unité de volume**.
Il apparaît ainsi que l'équation de Bernouilli traduit la conservation de l'énergie. : pour un fluide parfait, le travail des forces extérieures (forces de pression) correspond à la variation d'énerge mécanique du fluide.

En d'autres termes, une variation de pression est capable de :

- modifier l'énergie potentielle d'un fluide (aspiration dans une paille)
- modifier la vitesse d'écoulement d'un fludie

Applications

• Vidange d'un réservoir



On suppose le réservoir très grand $v_A \approx 0$

En A : $p_A = p_{atm}$, $z = z_A$, $v = v_A = 0$

En B : $p_B = p_{atm}$, $z = z_B$, $v = v_B$

La relation de Bernouilli appliquée de A à B :

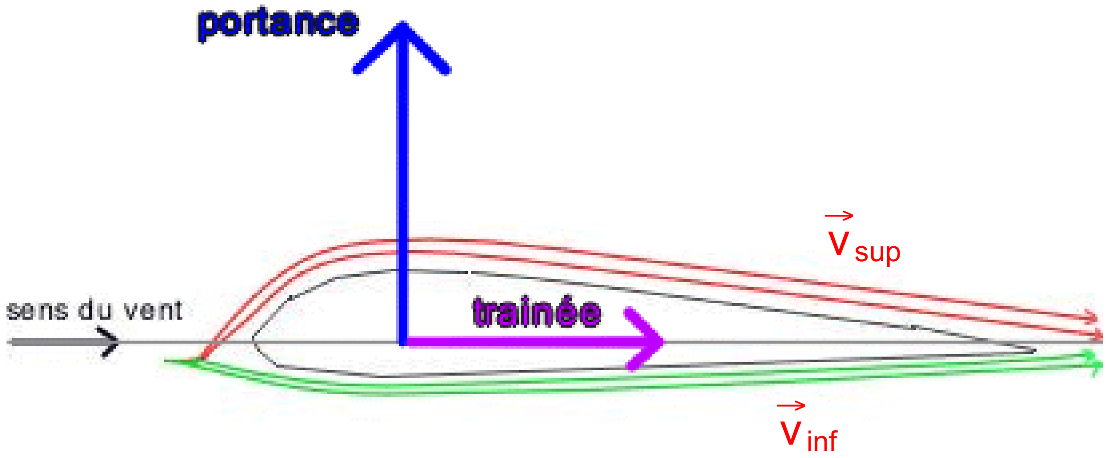
$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

d'où :

$$v_B = \sqrt{2\,g\,(z_A - z_B)} = \sqrt{2\,g\,h}$$

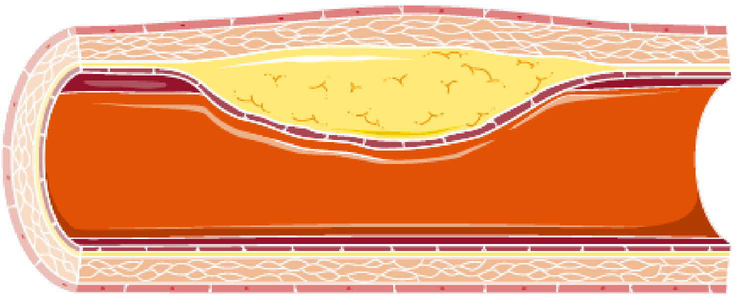
Formule de Torricelli

- Portance d'une aile



$v_{sup} > v_{inf} \quad \Rightarrow \quad p_{sup} < p_{inf}$

- Athérosclérose



- Effet Magnus