حل السلسلة رقم (02) حول الجمل التفاضلية الخطية

حل التمرين 01

1/ لتكن المصفوفة $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

حساب A^2 و A^3 ثم استنتاج A^k مهما يكن $k\in\mathbb{N}^*$ ثم حساب e^A.

$$A_1^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=A_1,\quad A_1^3=A_1$$

ومنه (*) $\boxed{A^k=A,\quad \forall k\geq 1}$

لابد من التأكد باستعمال البرهان بالتراجع

إيجاد: e^{A_1}؟

$$e^{A_1}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A_1^k=I_2+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}A_1^k$$

بتعويض (*) نجد:

$$e^{A_1}=I_2+A_1\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}=I_2+A_1(e-1)$$

(لأن $e=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}$)

$$e^{A_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+(e-1)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{A_1}=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}}$$

2/ ① $A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

$$A_2^2=A_2,\quad A_2^3=A_2$$

$$A_2^k=A_2,\quad \forall k\geq 1$$

حساب e^{A_2}؟ (بنفس الطريقة A_1)

نجد

$$e^{A_2}=I_2+(e-1)A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+(e-1)\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$e^{A_2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e-1&1-e\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}e&1-e\\0&1\end{pmatrix}=e^{A_2}}$$

② $A_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$A_3^2=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A_3^3=\begin{pmatrix}2^3&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A_3^k=\begin{pmatrix}2^k&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \forall k\geq 1.$$

لكن لابد أن نتأكد باستعمال البرهان بالتراجع.

حساب e^{A_3}؟

$$e^{A_3}=I_2+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}A^k=I_2+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$e^{A_3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum_{k\geq 1}\frac{2^k}{k!}&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{A_3}=\begin{pmatrix}1+e^2&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

③ $A_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

$A_4^2=-I_2,\quad A_4^3=-A_4,\quad A_4^4=I_2$. ومنه من أجل $k\geq 0$.

$$A_4^{2k}=(A_4^2)^k=(-I_2)^k=(-1)^kI_2^k=(-1)^kI_2.$$

$$A_4^{2k+1}=A_4^{2k}A_4=(-1)^kI_2\cdot A_4=(-1)^kA_4$$

$$e^{A_4}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}A_4^n=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k)!}A_4^{2k}+\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)!}A_4^{2k+1}.$$

$$e^{A_4}=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right)I_2+\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)A_4$$

تذكير:

$$\cos x=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

$$\sin x=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

ومنه

$$e^{A_4}=\cos(1)\,I_2+\sin(1)\,A_4.$$

حل السلسلة رقم «02» حول الجمل التفاضلية الخطية

$$e^{A_8}=e^{O}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}O^k=I_n+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}O^k$$

$$e^{A_8}=e^{O}=I_n+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}O=\boxed{I_n=e^{O}}$$

حل التمرين 02: لدينا $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

حساب e^A و e^B و $D=e^A\times e^B$ و $E=e^{A+B}$.

مع الملاحظة والتعليل .

نلاحظ أن $A=A_1$ و $B=A_2$ ما حسوب 1 ومنه

$$e^A=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}\qquad e^B=\begin{pmatrix}e&1-e\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$D=e^A\times e^B=\begin{pmatrix}e^2&-(e-1)^2\\0&1\end{pmatrix},\quad A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=A_3$$

$$E=e^{A+B}=\begin{pmatrix}1+e^2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

نلاحظ أن $E=e^{A+B}\neq e^A\times e^B=D$.

لأن $B=A\times B\neq B\times A=A$.

حل التمرين 3: لدينا $A\in M_4(\mathbb{R})$

1/ إيجاد كثير الحدود المميز والقيم الذاتية لـ A ثم استنتاج $(A-I_4)^4$

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}\qquad P_A(\lambda)=(\lambda-1)^4$$

$\lambda_1=1$ بتعداد جبري $n_1=4$

إذن حسب نظرية هاملتون لدينا

$$P_A(A)=0\Rightarrow(A-I_4)^4=0.$$

2/ حساب $(A-I_4)^2$ و $(A-I_4)^3$.

$$(A-I_4)^2=\begin{pmatrix}3&9&0&-18\\1&3&0&-6\\3&9&0&-18\\1&1&0&-6\end{pmatrix},\quad(A-I_4)^3=0.$$

3/ البرهان أن: $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tA}=e^t e^{t(A-I_4)}$

$$e^{tA}=e^{tI_4+t(A-I_4)}=e^{tI_4}\cdot e^{t(A-I_4)}.$$

$$\Rightarrow\boxed{e^{tA}=e^t e^{t(A-I_4)}}$$

4/ حساب e^{tA}.

$$e^{tA}=e^te^{t(A-I_4)}=e^t\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}(A-I_4)^k.$$

من السؤال (1) و (2) لدينا $(A-I_4)^k=0,\ \forall k\geq 3$.

$$\boxed{e^{tA}=e^t\left[I_4+t(A-I_4)+\frac{t^2}{2}(A-I_4)^2\right]}$$

$$e^{A_4}=\cos(1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sin(1)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{A_4}=\begin{pmatrix}\cos(1)&\sin(1)\\-\sin(1)&\cos(1)\end{pmatrix}}$$

(4) $A_5=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

$$A_5^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \forall k\geq 3.$$

$$e^{A_5}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A_5^k=I_3+\frac{1}{1!}A_5+\frac{1}{2!}A_5^2.$$

$$e^{A_5}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$e^{A_5}=\begin{pmatrix}1&1&2-\frac{1}{2}\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=e^{A_5}}$$

(5) $A_6=I_n\in M_n(\mathbb{R})$ ، $A_6^2=I_n$ ، $A_6^3=I_n$.

$$A^k=I_n,\ \forall k\geq 0.$$

$$e^{A_6}=e^{I_n}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}I_n^k=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\right)I_n$$

$$\boxed{e^{I_n}=e\,I_n}$$

(6) $A_7=\alpha I_n$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$e^{\alpha I_n}=\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}I_n^k=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}\right)I_n$$

$$\boxed{e^{\alpha I_n}=e^{\alpha}I_n}$$

(7) $A_8=O\in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة معدومة

$$A_8^2=0,\ A_8^3=0,\ O^k=O,\ \forall k\geq 1$$

$$e^{tA} = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 2+3t^2 & -6t+9t^2 & 0 & 6t-18t^2 \\ -4t+t^2 & 2-14t+3t^2 & 0 & 26t-6t^2 \\ 3t^2 & -6t+9t^2 & 2 & 6t-18t^2 \\ -2t+t^2 & -8t+3t^2 & 0 & 2+14t-6t^2 \end{pmatrix}$$

$Y(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t)\ h(t))^T$

$Y_0 = (x_0\ y_0\ z_0\ h_0)$.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^t}{2}[(2+3t^2)x_0 + (9t^2-6t)y_0 + (6t-18t^2)h_0 \\ y(t) = \frac{e^t}{2}[(t^2-4t)x_0 + (2-14t+3t^2)y_0 + (26t-6t^2)h_0 \\ z(t) = \frac{e^t}{2}[3t^2x_0 + (9t^2-6t)y_0 + 2z_0 + (6t-18t^2)h_0 \\ h(t) = \frac{e^t}{2}[(t^2-2t)x_0 + (3t^2-8)y_0 + (2+14t-6t^2)h_0 \end{cases}$$

حل التمرين 04:

لتكن $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 13 \\ -6 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

من أجل الحصول على القيم الذاتية نبحث عن جذور لـ P_A من أجل ذلك نحسب

$P_A(1) = -1+3+2 = 4 \neq 0$

$P_A(-1) = 1-3+2 = 0$

إذن -1 جذر، ثم نقوم بالقسمة الإقليدية

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3+3\lambda+2 & \lambda+1 \\ \hline \lambda^3+\lambda^2 & -\lambda^2+\lambda+2 \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \\ -\lambda^2-\lambda & \\ 2\lambda+2 & \\ 2\lambda+2 & \\ 0+0 & \end{array}$$

إذن

إذن $-\lambda^3+3\lambda+2 = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$

نبحث عن جذور $-\lambda^2+\lambda+2$ فنجدها -1 و 2 ومنه

$P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

القيم الذاتية هي:

$\lambda_1 = -1$ بتعداد جبري $n_1 = 2$

$\lambda_2 = 2$ بتعداد جبري $n_2 = 1$.

البحث عن فضاء الأشعة الذاتية.

من أجل $\lambda_1 = -1$:

$X \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I_3)X = 0$

$$(A+I_3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 13 \\ -6 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 0 & \text{—(1)} \\ -6x_1 - 3x_2 - 11x_3 = 0 & \text{—(2)} \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد

$x_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 0}$ —(3)

بتعويض (3) في (1) (أو (2)):

$6x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$.

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{E_{-1} = \left\langle \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle} \quad \boxed{\alpha_1 = \dim E_{-1} = 1.}$$

من أجل $\lambda_2 = 2$

$X \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ -6 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 0 & (4) \\ -6x_1 - 6x_2 - 11x_3 = 0 & (5) \\ -3x_3 = 0 & (6) \end{cases}$$

$(6) \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

بتعويض (6) في (4) (أو (5)) نجد

$\boxed{x_2 = -x_1}$

$$X \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_2 = \left\langle \left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}$$

بما أن $1 = \alpha_1 \neq n_1 = 2$ إذن

للتقطير ومنه نستعمل:

الطريقة (1) فضاء الأشعة المعممة

$X \in E_{-1}^2 \Leftrightarrow (A+I_3)^2 X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 18 & 9 & 45 \\ -18 & -9 & -45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x_1 + 9x_2 + 45x_3 = 0 & (7) \\ -18x_1 - 9x_2 - 45x_3 = 0 & (8) \end{cases}$$

بقسمة (7) على 9 (أو بقسمة (8) على (-9)):

$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1 - 5x_3$

حل السلسلة رقم «02» حول الجمل التفاضلية الخطية

$$X\in E_{-1}^{2}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-2x_1-5x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=x_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$$

$$E_{-1}^{2}=\left\langle\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

ومنه $\boxed{A=QDQ^{-1}}$ —(*)

$$Q=(e_1\,e_2\,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-5&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\0&0&1\\2&1&5\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{array}{c|c}Ae_1\ \ Ae_2\ \ Ae_3 & \\ \begin{pmatrix}-1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} & \begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}\end{array}$$

$Ae_1=-1e_1$

$Ae_2=(-1)e_2+\alpha e_1$

$Ae_3=2e_3$

$$Ae_2=\begin{pmatrix}-2\\9\\-1\end{pmatrix}=-e_2+\alpha e_1=\begin{pmatrix}\alpha\\5-2\alpha\\-1\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد. $\alpha=-2$ اذن

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1&0\\0&2\end{pmatrix}}$$

حيث: $D_1=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$

$$A=QDQ^{-1}\Rightarrow \alpha A=Q(\alpha D)Q^{-1}.$$

$$\boxed{e^{\alpha A}=Qe^{\alpha D}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}e^{\alpha D_1}&0\\0&e^{\alpha 2}\end{pmatrix}Q^{-1}.}$$

حساب e^{D_1} :

$D_1=-I_2+N_1$;

$$N_1=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow N_1^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow N_1^k=0,\ \forall k\geq 2$$

$$e^{\alpha D_1}=e^{-\alpha I_2+\alpha N_1}=e^{-\alpha}e^{\alpha N_1}=e^{-\alpha}\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}N_1^k$$

$$e^{\alpha D_1}=e^{-\alpha}(I_2+\alpha N_1).$$

$$e^{\alpha D_1}=e^{-\alpha}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{e^{\alpha D_1}=\begin{pmatrix}e^{-\alpha}&-\alpha 2e^{-\alpha}\\0&e^{-\alpha}\end{pmatrix}}$$

وبالتعويض في (*) نجد $e^{\alpha A}$

$$e^{\alpha A}=Q\begin{pmatrix}e^{-\alpha}&-2\alpha e^{-\alpha}&0\\0&e^{-\alpha}&0\\0&0&e^{2\alpha}\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

لنضع $\boxed{a=e^{-\alpha}\quad b=e^{2\alpha},\ c=-2\alpha e^{-\alpha}}$ —(9)

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-5&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\0&0&1\\2&1&5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}2b-a&b-a&5b-5a+c\\2a-2b&2a-b&5a-5b-2c\\0&0&a\end{pmatrix}}\ \text{—(10)}$$

من أجل التحقق من الحساب يكفي أن نعوض $a=-1$ و $b=2$ و $c=-2$ لا بد أن نتحصل على A

$$\begin{pmatrix}5&3&13\\-6&-4&-11\\0&0&-1\end{pmatrix}=A$$

تعويض (9) في (10) نجد

$$\boxed{e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}2e^{2\alpha}-e^{-\alpha}&e^{2\alpha}-e^{-\alpha}&5e^{2\alpha}-5e^{-\alpha}-2\alpha e^{-\alpha}\\2e^{-\alpha}-2e^{2\alpha}&2e^{-\alpha}-e^{2\alpha}&5e^{-\alpha}-5e^{2\alpha}+4\alpha e^{-\alpha}\\0&0&e^{-\alpha}\end{pmatrix}}\ (11)$$

إستنتاج حل مسألة كوشي $\begin{cases}Y'=AY\\Y(t_0)=Y_0\end{cases}$ حيث

$Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $Y(t_0)=Y_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

لنضع $R(t,t_0)$ النواة الحالة للجملة ومنه الحل يعطى بالعلاقة $Y(t)=R(t,t_0)Y_0$

بما أن $A\in M_3(\mathbb{R})$ مصفوفة ثابتة ومنه.

$$R(t,t_0)=e^{(t-t_0)A}$$

ومنه يكفي أن نضع $\alpha=t-t_0$ نجد

$$R(t,t_0)=\begin{pmatrix} 2e^{2(t-t_0)}-e^{(t_0-t)} & e^{2(t-t_0)}-e^{(t_0-t)} & 5e^{2(t-t_0)}-5e^{(t_0-t)}-2(t-t_0)e^{(t_0-t)} \\ 2e^{(t_0-t)}-2e^{2(t-t_0)} & 2e^{(t_0-t)}-e^{2(t-t_0)} & 5e^{(t_0-t)}-5e^{2(t-t_0)}+4(t-t_0)e^{(t_0-t)} \\ 0 & 0 & e^{(t_0-t)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = R(t,t_0)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

$$(14)\quad\begin{cases} x(t)=\left[2e^{2(t-t_0)}-e^{(t_0-t)}\right]x_0+\left[e^{2(t-t_0)}-e^{(t_0-t)}\right]y_0 \\ \qquad +\left[5e^{2(t-t_0)}-5e^{(t_0-t)}-2(t-t_0)e^{(t_0-t)}\right]z_0. \\ y(t)=\left[2e^{(t_0-t)}-2e^{2(t-t_0)}\right]x_0+\left[2e^{(t_0-t)}-e^{2(t-t_0)}\right]y_0 \\ \qquad +\left[5e^{(t_0-t)}-5e^{2(t-t_0)}+4(t-t_0)e^{(t-t_0)}\right]z_0. \\ z(t)=e^{(t_0-t)}z_0 \end{cases}$$

الطريقة 02: اختزال جوردان

نضع:

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P=(u_1\ u_2\ u_3).$$

لدينا $A=PJP^{-1} \Rightarrow AP=PJ$.

$$A(u_1u_2u_3)=(u_1\ u_2u_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(Au_1, Au_2, Au_3)=(-u_1, u_1-u_2, 2u_3)$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} Au_1=-u_1 \Rightarrow u_1\in E_{-1} \Rightarrow \boxed{u_1=e_1}. \\ Au_2=u_1-u_2 \quad (11) \\ Au_3=2u_3 \Rightarrow u_3\in E_2 \Rightarrow \boxed{u_3=e_3} \end{cases}$$

$(11) \Rightarrow (A+I_3)u_2=u_1=e_1$. نضع $u_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 3 & 13 \\ -6 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+13x_3=1 \quad (15) \\ -6x_1-3x_2-11x_3=-2 \quad (16) \\ 0=0 \end{cases}$$

بجمع (15) + (16) طرفا لطرف نجد،

$$2x_3=-1 \Rightarrow \boxed{x_3=-\frac{1}{2}}$$

بتعويض x_3 في (15) نجد

$$6x_1+3x_2-\frac{13}{2}=1$$

$$6x_1+3x_2=\frac{13}{2}+1=\frac{15}{2}.$$

نختار $\boxed{x_1=0}$ ، ومنه نجد

$$3x_2=\frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{5}{2}}$$

$$u_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=u_2}$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=PJP^{-1}=P\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\alpha A=P\alpha\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} \alpha J_1 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$e^{\alpha A}=P\begin{pmatrix} e^{\alpha J_1} & 0 \\ 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

حساب $e^{\alpha J_1}$

$$J_1=-I_2+N_2 \qquad N_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2^2=0$$

$$\Rightarrow N_2^k=0, \ \forall k\geq 2$$

$$e^{\alpha J_1}=e^{-\alpha I_2+\alpha N_2}=e^{-\alpha}e^{\alpha N_2}$$

$$e^{\alpha J_1}=e^{-\alpha}\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}N_2^k=e^{-\alpha}(I_2+\alpha N_2)$$

$$e^{\alpha J_1}=\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & \alpha e^{-\alpha} \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

بالتعويض في علاقة $e^{\alpha A}$ نجد:

$$e^{\alpha A}=P\begin{pmatrix}e^{-\alpha}&\alpha e^{-\alpha}&0\\0&e^{-\alpha}&0\\0&0&e^{2\alpha}\end{pmatrix}P^{-1}$$

نضع

$$a=e^{-\alpha},\quad b=e^{2\alpha}\quad d=\alpha e^{-\alpha}\qquad (12)$$

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&\frac{5}{2}&-1\\0&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&-3\\0&0&-2\\2&1&5\end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}2b-a&b-a&5b-5a-2d\\2a-2b&2a-b&5a-5b+4d\\0&0&a\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $c=-2d$ (16)

بالتعويض في (16) نتحصل على (15).

من أجل التحقق من الحساب يكفي أن نعوض $a=-1$ و $b=2$ و $d=1$ لا بد أن نتحصل على A

بتعويض (15) في (16) نتحصل على (11). وبنفس الطريقة السابقة نكمل الحل لنتحصل على كل من (13) و (14).

* نفس التمرين (4) مع المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&-2\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&A_1\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

A قطرية بالكتل ومنه

$$\alpha A=\begin{pmatrix}-3\alpha&0\\0&\alpha A_1\end{pmatrix}\Rightarrow e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}e^{-3\alpha}&0\\0&e^{\alpha A_1}\end{pmatrix}$$

يكفي حساب $e^{\alpha A_1}$ ؟

$P_{A_1}(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+5$.

$\lambda_1=2-i$ و $n_1=1$ ،

$\lambda_2=2+i$ و $n_2=1$

$$E_{2-i}=\left\langle\left\{e_1=\begin{pmatrix}1-i\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$E_{2+i}=\left\langle\left\{e_2=\begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$Q=\begin{pmatrix}1-i&1+i\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&1-i\\-i&1+i\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2-i&0\\0&2+i\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha D=\begin{pmatrix}\alpha(2-i)&0\\0&\alpha(2+i)\end{pmatrix}$$

$$A_1=QDQ^{-1}\Rightarrow \alpha A_1=Q\alpha DQ^{-1}$$

$$e^{\alpha A_1}=Qe^{\alpha D}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}e^{\alpha(2-i)}&0\\0&e^{\alpha(2+i)}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

نضع $a=e^{\alpha(2-i)}$ و $b=e^{\alpha(2+i)}$

$$e^{\alpha A_1}=Q\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}Q^{-1}=$$

$$e^{\alpha A_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}i(a-b)&-i(a-b)\\\frac{i}{2}(a-b)&\frac{1}{2}(a+b)-\frac{i}{2}(a-b)\end{pmatrix}$$

+ من أجل التحقق من صحة الحساب يكفي أن نعوض $a=2-i$ و $b=2+i$ في العلاقة الأخيرة لا بد أن نتحصل على A نترك التحقق للطالب

$$a=e^{\alpha(2-i)}=e^{2\alpha}e^{-i\alpha}=e^{2\alpha}(\cos\alpha-i\sin\alpha).$$

$$b=e^{\alpha(2+i)}=e^{2\alpha}e^{i\alpha}=e^{2\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

ومنه

$$a+b=2e^{2\alpha}\cos\alpha.$$

$$i(a-b)=2e^{2\alpha}\sin\alpha$$

بالتعويض في عبارة $e^{\alpha A_1}$ نجد:

$$e^{\alpha A_1}=\begin{pmatrix}e^{2\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)&-2e^{2\alpha}\sin\alpha\\e^{2\alpha}\sin\alpha&e^{2\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)\end{pmatrix}.$$

بالتعويض في عبارة $e^{\alpha A}$

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}e^{-3\alpha}&0&0\\0&e^{2\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)&-2e^{2\alpha}\sin\alpha\\0&e^{2\alpha}\sin\alpha&e^{2\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)\end{pmatrix}$$

إستنتاج حل مسألة كوشي $\begin{cases}Y'=AY\\Y(t_0)=Y_0\end{cases}$

نضع $R(t,t_0)$ النواة الحالة للجملة ومنه الحل يعطى بالعلاقة $Y(t)=R(t,t_0)Y_0$

بما أن $A\in M_3(\mathbb{R})$ مصفوفة ثابتة ومنه

$R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

يكفي أن نضع $\alpha = t-t_0$ نجد:

$$R(t,t_0) = \begin{pmatrix} e^{3(t_0-t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)}(\cos(t-t_0)+\sin(t-t_0)) & -2e^{2(t-t_0)}\sin(t-t_0) \\ 0 & e^{2(t-t_0)}\sin(t-t_0) & e^{2(t-t_0)}(\cos(t-t_0)-\sin(t-t_0)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = R(t,t_0)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{3(t_0-t)}x_0 . \\ y(t) = e^{2(t-t_0)}\left[(\cos(t-t_0)+\sin(t-t_0))y_0 - 2\sin(t-t_0)z_0\right] \\ z(t) = e^{2(t-t_0)}\left[\sin(t-t_0)y_0 + [\cos(t-t_0)-\sin(t-t_0)]z_0\right] \end{cases}$$

ويمكننا كتابتها على الشكل:

$$\begin{cases} x(t) = e^{3(t_0-t)}x_0 \\ y(t) = e^{2(t-t_0)}\left[\cos(t-t_0)y_0 + \sin(t-t_0)(y_0-2z_0)\right] \\ z(t) = e^{2(t-t_0)}\left[\sin(t-t_0)(y_0-z_0) + \cos(t-t_0)z_0\right] \end{cases}$$

** نفس التمرين (4) مع المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

و $n_1 =$.

و $n_2 =$.

البحث عن فضاء الأشعة الذاتية.

من أجل $\lambda_1 = -2$

$X \in E_{-2} \Leftrightarrow (A+2I_3)X = 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & (1) \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 & (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x_3 = -x_2$ —— (3)

بتعويض (3) في (1) نجد $3x_1 = x_2$

إذن:
$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 \\ x_3 &= -x_2 = -3x_1 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_{-2} = \left\langle \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle} \quad \dim E_{-2} = 1 \quad \boxed{\alpha_1 = 1}$$

من أجل $\lambda = 1$

$X \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 & (4) \\ 3x_3 = 0 & (5) \\ -3x_3 = 0 \end{cases}$$

$(5) \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$ —— (6)

بالتعويض (6) في (4) نجد $\boxed{x_2 = 0}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\boxed{E_1 = \left\langle \left\{ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle} \quad \dim E_1 = 1$$

$\alpha_2 = \neq n_1 = 2$

المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

ومنه نستعمل أحد الطريقتين.

الطريقة (1) فضاء الأشعة المعممة.

$X \in E_1^2 \Leftrightarrow (A - I_3)^2 X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & +9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_3 = 0 \\ -9x_3 = 0 \\ 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_1^2 = \left\langle \left\{ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}$$

إذن: $A = QDQ^{-1}$.

$$Q = (e_1\ e_2\ e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل السلسلة رقم «02» حول الجمل التفاضلية الخطية

$$D=\begin{array}{c} \begin{matrix} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&\delta\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}$$

$Ae_1=-2e_1$

$Ae_2=e_2$

$Ae_3=\delta e_2+e_3$

$$\Rightarrow (A-I_3)e_3=\delta e_2$$

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \boxed{\delta=1}$$

إذن:

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

الطريقة 02: اختزال جوردان

لنضع

$$J=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ P=(u_1\ u_2\ u_3).$$

$$A=PJP^{-1}\Leftrightarrow AP=PJ$$

$$A(u_1\ u_2\ u_3)=(u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(Au_1\ Au_2\ Au_3)=(-2u_1,\ u_2,\ u_2+u_3)$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases}Au_1=-2u_1\Rightarrow u_1\in E_{-2}\Rightarrow \boxed{u_1=e_1}\\ Au_2=u_2\Rightarrow u_2\in E_1\Rightarrow \boxed{u_2=e_2}\\ Au_3=u_2+u_3\Rightarrow (A-I_3)u_3=u_2=e_2\end{cases}$$

لنضع $u_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ومنه

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2+2x_3=1\\ 3x_3=0\Rightarrow \boxed{x_3=0}\\ -3x_3=0\end{cases}$$

$x_3=0$ بالتعويض في المعادلة الأولى: $\boxed{x_2=1}$

يمكن إعطاء أي قيمة لـ x_1 مثلا $\boxed{x_1=0}$

ومنه

$$\boxed{u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=e_3}$$

في هذا المثال تحصلنا على $J=D$

و $Q=P$

$$A=QDQ^{-1}\quad D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&D_1\end{pmatrix},\ D_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\alpha A=Q\alpha DQ^{-1}=Q\begin{pmatrix}-2\alpha&0\\0&\alpha D_1\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$e^{\alpha A}=Q\begin{pmatrix}e^{-2\alpha}&0\\0&e^{\alpha D_1}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

حساب $e^{\alpha D_1}$:

$$D_1=I_2+N,\ N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow N^k=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \forall k\geq 2.$$

$$\alpha D_1=\alpha I_2+\alpha N\Rightarrow e^{\alpha D_1}=e^{\alpha}e^{\alpha N}$$

$$e^{\alpha D_1}=e^{\alpha}\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}N^k=e^{\alpha}(I_2+\alpha N).$$

$$\boxed{e^{\alpha D_1}=\begin{pmatrix}e^{\alpha}&\alpha e^{\alpha}\\0&e^{\alpha}\end{pmatrix}}$$

$$e^{\alpha A}=Q\begin{pmatrix}e^{-2\alpha}&0&0\\0&e^{\alpha}&\alpha e^{\alpha}\\0&0&e^{\alpha}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

(7)

لنضع: $c=\alpha e^{\alpha}$ ، $b=e^{\alpha}$ ، $a=e^{-2\alpha}$

$$e^{\alpha A}=Q\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&0&b\end{pmatrix}Q^{-1}$$

هذا حل التحقق من الحساب يكفي أن نعوض $a=-2$ ، $b=1$ و $c=1$ يترك للطلبة

$$\boxed{e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}b&c&\frac{1}{3}(b-a)+c\\0&b&b-a\\0&0&a\end{pmatrix}}$$

(8)

بتعويض (8) في (7) نجد

$$e^{\alpha A}=\begin{pmatrix}e^{\alpha}&\alpha e^{\alpha}&\frac{1}{3}(e^{-2\alpha}-e^{\alpha})+\alpha e^{\alpha}\\0&e^{\alpha}&e^{-2\alpha}-e^{\alpha}\\0&0&e^{-2\alpha}\end{pmatrix}$$

بتعويض $\alpha=t-t_0$ نجد

$$R(t,t_0)=\exp((t-t_0)A)$$

$$\boxed{R(t,t_0)=\begin{pmatrix}e^{(t-t_0)}&(t-t_0)e^{(t-t_0)}&\frac{1}{3}\left(e^{2(t_0-t)}-e^{(t-t_0)}\right)+(t-t_0)e^{(t-t_0)}\\0&e^{(t-t_0)}&e^{2(t_0-t)}-e^{(t-t_0)}\\0&0&e^{2(t_0-t)}\end{pmatrix}}$$