Exo1 (10 pts):

Soit un écoulement exprimé par son champ de vitesse:

$$u = - 4.x.y \ , \quad v = 2.(y^2-x^2), \ w = ?$$

1- Déduire la composante w pour un écoulement isovolume et en choisir la valeur.

2- Déterminer la fonction de courant.

3- Est-ce que cet écoulement est irrotationnel ?

4- Déterminer la fonction potentielle.

Exo2 (10 pts):

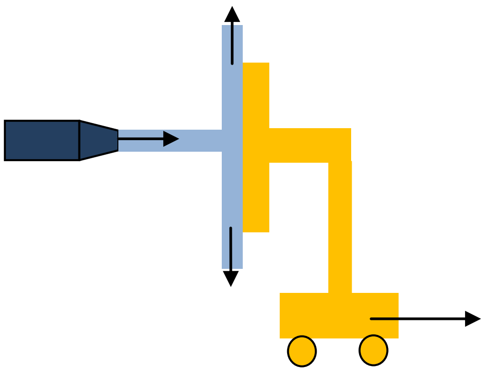
Soit une vanne qui délivre un jet d'eau avec une vitesse constante V_{jet} . Ce jet impacte de manière orthogonale sur une plaque plane se déplaçant à une vitesse constante V_p par le chariot, la plaque divise le jet d'eau <u>en deux parties égales</u>.

Données : V_{jet} = 20 m/s, V_p = 15 m/s, A_{jet} = 3cm^2, ρ = 1000 kg/m^3, les poids de l'eau et de la plaque sont négligés. En utilisant le théorème de transport de Reynolds :

1- Représenter le volume de contrôle V.C sur le schéma, puis en utilisant la conservation du débit volumique en écoulement permanent, en déduire la vitesse du jet à l'entrée et sorties du V.C.

2- Déterminer la force appliquée sur la vanne quand la vitesse du chariot V_p est nulle.

3- Déterminer la force appliquée sur la vanne quand la vitesse du chariot V_p est dans le sens du jet.



Bon courage !

Corrigé type

Exo 1 (10 pts) :

$$u = -4.x.y\ ,\ \ v = 2.(y^2-x^2),\ w = ?$$

1. Ecoulement isovolume satisfait l'équation de continuité suivante : **(3 pts)**

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{donc} \qquad -4.y + 4.y + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ce qui implique que $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ w est indépendante de z , w peut etre constante.

Pour définir la fonction de courant dans la suite de l'exercice l'écoulement doit être bidimensionnel donc il faut que **w = 0.**

1- Fonction de courant **(2.5 pts)**

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -vdx + udy = -2(y^2 - x^2)dx - 4.x.ydy$$

$$\psi(x,y) = \int -2(y^2 - x^2)dx + c(y) = -2y^2x + \frac{2}{3}x^3 + c(y) \qquad (1)$$

De l'équation (1) on dérive par rapport à y : $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4yx + c'(y) = u = -4xy$

Donc $c'(y) = 0$ *ce qui revient à* $c(y) = c = cte$

$$\psi(x,y) = \int -2(y^2 - x^2)dx + c(y) = -2y^2x + \frac{2}{3}x^3 + c$$

2- L'écoulement est il irrotationnel ? **(2 pts)**

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = rot\vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (-4x + 4x)\vec{k} = \vec{0}$$

Donc l'écoulement est irrotationnel

3- Fonction du potentiel des vitesses ϕ **(2.5 pts)**

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = udx + vdy = -4.x.ydx + 2(y^2 - x^2)dy$$

$$\phi(x,y) = \int -4yxdx + c(y) = -2yx^2 + c(y) \qquad (2)$$

De l'équation (2) on dérive par rapport à y :

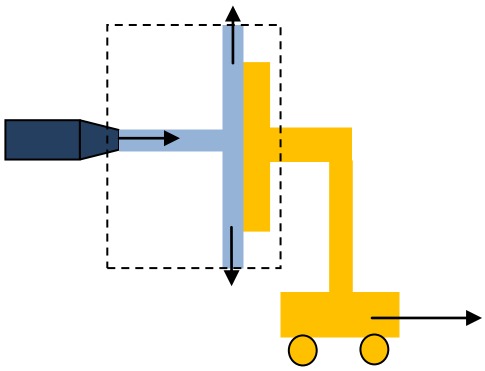
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2x^2 + c'(y) = v = 2(y^2 - x^2) \ \text{ donc } c'(y) = 2y^2$$

$$c(y) = \int 2y^2dy = \frac{2}{3}y^3 + c$$

$$finalement\ on\ a\ : \qquad \phi(x,y) = -2yx^2 + c(y) = -2yx^2 + \frac{2}{3}y^3 + c$$

Exo 2 (10 pts) :

le cadre en pointillé est le volume de contrôle V.C **(1 pts)**



1- Conservation de la quantité de matière

$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dv + \int_{Sc} \rho b\,(\vec{u}_r.\vec{n})ds$ **(1 pts)**

L'écoulement est permanent donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

Pour la conservation de la masse B= m et b =1

$$\frac{dm}{dt} = \int_{Sc} \rho\,(\vec{u}_r.\vec{n})ds = 0$$

Avec $\vec{u}_r = \vec{V_j} - \vec{V_p}$

$- \int_{entrée} \rho\, V_{entrée}\, ds + \int_{sort\,1} \rho\, V_1 ds + \int_{sort\,2} \rho\, V_2 ds = 0$ **(1 pts)**

$$V_{entrée}\,.\,A_{entrée} = V_1.A_1 + V_2.A_2$$

comme le jet se divise en deux parties égales: $A_{entrée} = 2.A_1 = 2.A_2$

alors : $(V_1 + V_2).\frac{A_{entrée}}{2} = V_{entrée}\,.\,A_{entrée}$ donc $V_1 + V_2 = 2.V_{entrée}$ **(1.5 pts)**

Les deux sorties ont la même section donc elles ont la même vitesse aussi et donc:

$$V_1 = V_2 = V_{entrée} = V_j - V_p = 20 - 15 = 5\ m/s$$ **(0.5 pts)**

2- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dv + \int_{Sc} \rho b\,(\vec{u}_r.\vec{n})ds$$

Dans ce bilan : $B = m\vec{V}$ et $b = \vec{V}$

$\frac{dm\,\vec{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{V}dv + \int_{Sc} \rho\vec{V}\,(\vec{u}_r.\vec{n})ds = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$ **(1 pts)**

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \int_{entrée} -\rho\, \overrightarrow{V_{entrée}} . V_{entrée}\, ds + \int_{sort\,1} \rho\, \overrightarrow{V_1} . V_1 ds + \int_{sort\,2} \rho\, \overrightarrow{V_2} . V_2 ds$ **(1 pts)**

Par projection sur les deux axes :

(ox) : $\sum F_x = -\dot{m}_{entrée} . V_{entrée\ x} + \dot{m}_1 V_{1x} + \dot{m}_2 V_{2x} = -\dot{m}_{entrée} . (V_j - V_p)$ car les vitesses de sortie n'ont pas de composantes suivant ox. **(1 pts)**

(oy) : $\sum F_y = -\dot{m}_{entrée} . V_{entrée\ y} + \dot{m}_1 V_{1y} - \dot{m}_2 V_{2y} = 0$

Avec $\dot{m}_{entrée}$, $\dot{m}_1, \dot{m}_2$ sont les débit massiques du fluide à l'entrée et sorties.

$\sum F_x = -\dot{m}_{entrée} . V_{entrée} = -\rho(V_j - V_p) . A_{entrée} (V_j - V_p) = -\rho(V_j - V_p)^2 A_j$ **(1 pts)**

a/ si $V_p = 0$ m/s **(0.5pts)**

$$\sum F_x == -\rho(V_j - V_p)^2 A_j = -\rho V_j^2 . A_l = -1000 . 20^2 . 3 . 10^{-4} = -120\ N$$

b/ si $V_p = 15$ m/s

$\sum F_x = -\rho(V_j - V_p)^2 A_j = -1000 . (20 - 15)^2 . 3 . 10^{-4} = -7.5\ N$ **(0.5 pts)**