Exo1 : force du fluide sur le coude

1- Calcul de la pression à la sortie

En utilisant l'équation de Bernoulli, on écrit : $\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\Delta H$

ΔH = 1.2m est la perte de charge

Comme la section est constante, la vitesse est constante aussi donc

$$\Delta H=\frac{p_1-p_2}{\rho g}\quad donc$$

$$p_2=p_1-\rho g\Delta H=2.10^5-872.9{,}81.1{,}2=1.897\,.10^5 Pa=1.897\ bar$$

2- Théorème de transport :

$$\boldsymbol{\left.\frac{dB}{dt}\right]_{syst}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho b dv+\int_{SC}\rho b(\vec{u}.\vec{n})dS=\sum_{VC}\overrightarrow{F_{ext}}}$$

Le volume de contrôle est fixe, **B** est la quantité de mouvement, l'écoulement est permanent, donc on applique la relation finale

$$\sum_{VC}\overrightarrow{F_{ext}}=Q_m(\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1})$$

$$V_1=V_2=\frac{Q_m}{\rho S}=\frac{872.\,0{,}86}{872.\frac{\pi d^2}{4}}=4.38\ m/s$$

S=$\frac{\pi d^2}{4}=0.196$ m^2

Les forces appliquées sur le volume sont la force du coude $\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}}$ et les pressions à l'entrée et à la sortie.

Par projection sur ox, on a :

$$F_{cx}+P_1S+0=\ Q_m(0-V_1)\quad donc\quad F_{cx}=872\,.\,0{,}86\,(-4.38)-\ P_1S$$
$$=\ -3284{,}65-39200=\ -42484{,}65\ N=\ -42{,}5KN$$

Par projection sur oy, on a :

$$F_{cy}+0-P_2S=\ Q_m(V_2-0)\quad donc\quad F_{cy}=872\,.\,0{,}86\,(4.38)+P_2S$$
$$=\ 3284{,}65+\ 37181{,}2=40465{,}85\ N=40{,}5KN$$

La composante suivant x est opposée à x et a la plus grande valeur, le coude essayera de vaincre la pression appliquée qui est plus grande à l'entrée qu'à la sortie et la composante suivant y est positive et un peu plus faible.

La force du fluide sur le coude est la réaction à la force du coude sur le fluide : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_f}}=-\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}}$

Exo2 : débit et vitesse dans un réservoir

Le bilan de masse correspondant à l'application du théorème de transport de Reynolds donne :

Equation de transport générale :

$$\left.\frac{dB}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dv + \int_{SC} \rho b(\vec{u}_{rel}.\vec{n})dS$$

Le volume de contrôle choisi est le réservoir en entier , il ne bouge pas donc la vitesse du fluide est égale à sa vitesse absolue ($\vec{u}_{rel} = \vec{u}$) et B= m , la masse donc b = 1

$$\left.\frac{dm}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho.dv + \int_{SC} \rho.(\vec{u}.\vec{n})dS = 0 \quad car \text{ conservation de la masse totale du fluide}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho.dv + \int_{SC} \rho.(\vec{u}.\vec{n})dS = \frac{\partial}{\partial t}(\rho.A.h) - \rho.V_{ent}.a + \rho.V_{sor}.a$$

Le signe du débit dépend du produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$, la normale de la surface est un vecteur sortant de la surface

Donc : $0 = A.\frac{dh}{dt} - V_{ent}.a + V_{sor}.a$ ce qui donne

$V_{ent} = \frac{dh}{dt}\frac{A}{a} + V_{sor} = 10^{-3}.\frac{0,1}{0.0025} + \sqrt{2.9,81.10^{-3}}$ = 4.47 m/s

Conclusion: dans ce système il ya accumulation de la masse dans le réservoir pendant le temps dt

NB : en pointillé est le volume de contrôle choisi V.C

Exo3 : force de poussée

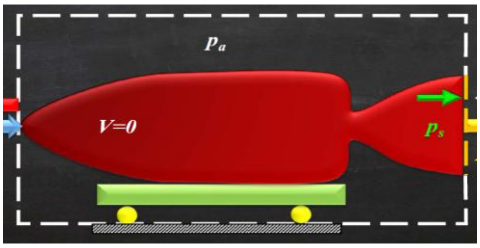
Dans cet exercice, on applique le théorème de transport de Reynolds pour la quantité de mouvement : $B = m.\vec{V}$ et $b = \vec{V}$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dv + \int_{SC} \rho b(\vec{u}_{rel}.\vec{n})dS$$

Et donc :

$$\left.\frac{d(m.\vec{V})}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho.\vec{V}.dv + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{u}_{rel}.\vec{n})dS$$

Le volume de contrôle est comme indiqué sur l'image de la fusée portée par un chariot



1/ le chariot est immobile (ne se déplace pas) $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{u}_c = \vec{u}$

Le bilan donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho.\vec{u}.dv + \int_{SC} \rho\vec{u}.(\vec{u}_{rel}.\vec{n})dS = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \dot{m}(\vec{V_2} - \vec{V_1})$$

Car $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho.\vec{u}.dv = \vec{0}$ l'écoulement est stationnaire, il n'ay pas d'accélération locale (temporelle), V_2 vitesse à la sortie des gaz du réacteur, V_1 à l'entrée du volume de contrôle et $\dot{m}$ est le débit massique des gaz.

La projection des forces sur l'axe horizontal ox : T est la poussée

$$\sum F_x = T + p_1.A_1 - p_2.A_2 = \int_{SC} \rho\vec{u}.(\vec{u}.\vec{n})dS = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2 - V_1) = \dot{m}.V_2$$

$p_1 = p_a$ est la pression sur la surface en amont de la fusée (face avant) et p_2=p_s est la pression sur la face en aval ou face arrière. A la face avant il n'ya pas d'entrée de fluide donc V_1=0.

$$T = \dot{m}.V_2 - (p_1 - p_2).A_s = \dot{m}.V_s + (p_s - p_a).A_s$$

La réaction du fluide sur la fusée est R opposée à T.

Refaire les calculs pour :

2/ cas ou le chariot a une vitesse u_c opposée à l'écoulement des gaz

3/ cas ou le chariot a une vitesse u_c dans le même sens que les gaz brulés

Exo4 : bilan éolienne

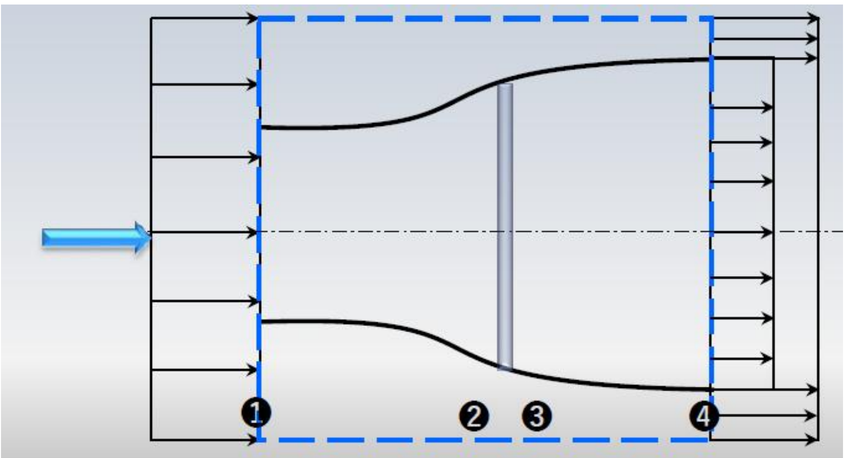
1/ En appliquant le TTR (théorème de transport de Reynolds) sur le volume de contrôle ci-dessous pour la masse on trouvera :

$$\left.\frac{dm}{dt}\right]_{syst} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dv + \int_{SC} \rho(\vec{V}.\vec{n})dS$$

Ecoulement considéré permanent donc : $\int_{SC} \rho(\vec{V}.\vec{n})dS = 0$ **c'est la conservation du débit massique donc :**

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m}_4$$

D'où $V_1 S_1 = V_4 S_4$ (car ρ de l'air est considérée constante)



2/ En appliquant le TTR pour la quantité de mouvement on trouvera

$$\left.\frac{\boldsymbol{dm\vec{V}}}{\boldsymbol{dt}}\right]_{syst} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}\int_{VC}\boldsymbol{\rho\vec{V}dv} + \int_{SC}\boldsymbol{\rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})dS} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext}$$

$$F_{eol} + p_1 S_1 - p_4 S_4 = \dot{m}(V_4 - V_1)$$

Comme l'éolienne est entourée d'air à pression considérée uniforme, la différence de pression entre les sections 1 et 4 est négligée.

Donc la force de l'éolienne est :

$$F_{eol} = \dot{m}(V_4 - V_1)$$

- La puissance de l'éolienne est donnée par le travail de la force sur le temps, donc

$$\dot{W}_2 = F_{eol} . V_2$$

car la vitesse au niveau de l'éolienne (l'éolienne est sous forme de pales en gris sur la figure) est :

V_2 = déplacement/temps

Donc :

$$\dot{W}_2 = \dot{m}_2(V_4 - V_1).V_2 = \rho S_2 V_2^2 (V_4 - V_1) \quad \textbf{(eq.1)}$$

3/ en appliquant le TTR de l'énergie totale E permet d'obtenir la puissance du fluide par:

$$\left.\frac{\boldsymbol{dE}}{\boldsymbol{dt}}\right]_{syst} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}\int_{VC}\boldsymbol{\rho e dv} + \int_{SC}\boldsymbol{\rho e(\vec{V}.\vec{n})dS} = \mathbf{0} \quad \textbf{(conservation de l'énergie totale)}$$

Donc en termes de puissance (énergie/temps) : $\dot{W}_f$ est la puissance enlevée au fluide par les pales de l'éolienne

c'est-à-dire l'énergie retirée de l'énergie à l'entrée e_e en traversant l'éolienne

$$\int_{SC} \boldsymbol{\rho e(\vec{V}.\vec{n})dS} = \dot{W}_f + \dot{m}_2.e_s - \dot{m}_2.e_e = \dot{W}_f \dot{+} \dot{m}_2(e_4 - e_1) = 0$$

$$donc \quad \dot{W}_f = \rho S_2 V_2 \ (\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{V_4^2}{2} - \frac{p_4}{\rho})$$

Or $p_1 = p_4$ donc $\boldsymbol{\dot{W}_f = \rho S_2 V_2 (\frac{V_1^2 - V_4^2}{2})} = \boldsymbol{\dot{W}_2}$ **(eq. 2) : c'est la même puissance de (eq.1).**

Soit par égalité :

$$\rho S_2 V_2^2 (V_4 - V_1) = \rho S_2 V_2 (\frac{V_1^2 - V_4^2}{2}) \textbf{ donc } \quad \boldsymbol{V_2 = \frac{V_1 + V_4}{2}} \quad \textbf{(eq.3)}$$

Sachant que

$$\dot{W}_2 = \rho S_2 V_2^2 (V_4 - V_1) = \rho S_2 \left(\boldsymbol{\frac{V_1 + V_4}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} .(V_4 - V_1)$$

En calculant la puissance maximale que peut avoir l'éolienne, on calcule la dérivée par rapport à la vitesse de l'air à la sortie :

$$\frac{d\dot{W}_2}{dV_4} = 0 \quad on\ obtient \quad V_1 = 3V_4 \quad \textbf{(eq.4)}$$

On remplace V_4 par **eq. 4** et on recalcule $\dot{W}_2$ qui atteindra sa valeur maximale

$$\dot{W}_2 = \frac{8}{27} \rho S_2 V_1^3 = \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} \rho S_2 V_1^3\right)$$

La quantité entre parenthèse est la puissance du fluide (équation eq.1 et eq.2)) à la condition $V_1 = 3V_4$

Donc le pourcentage maximum récupéré de l'énergie du vent par l'éolienne est de 16/27 qui est de 59.26%.