Correction de l'intérogation

Exercice 01 :

① $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - xy + 2x + 5$

On a : $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow -2xy \geq -x^2 - y^2$

$\Leftrightarrow -xy \geq -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ —— ①

et $(x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -\frac{1}{2}x^2 - 2$ —— ②

En substituant ① et ② dans l'expression de f, on obtient

$$f(x,y) \geq 2x^2 + 3y^2 - xy + 2x + 5 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2$$

$$= x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3 \geq x^2 + y^2 + 3 = \|(x,y)\|^2 + 3 \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty$$

Par conséquent f est coercive.

② $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - x + z - 8$

Si on prend la suite $t_k = (0, 0, -k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

on a :

$\|t_k\|^2 = k^2 \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} \|t_k\| = +\infty$.

et

$\lim\limits_{k \to +\infty} f(t_k) = -k - 8 = -\infty \Longrightarrow f$ n'est pas coercive.

③ voir Série N°3 exercice 01

Exercice 02 :

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + C$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + b_1 x + b_2 y + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(ax^2 + (b+c)xy + dy^2 \right) + b_1 x + b_2 y + C = x^2 + y^2 - 14x - 6y - 7 .$$

Après l'identification, on obtient

$a = 2$; $b = c = 0$ (par exemple), $d = 2$, $b_1 = 14$, $b_2 = -6$, $C = -7$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ Il faut A est semi definie positive

On a $2 > 0$ et $\det A = 4 > 0$, (les valeurs propres de A est $\lambda = 2 > 0$)

$\Rightarrow$ A est strictement convexe $\Rightarrow$ f est convexe.

(3) Voir Serie N° 1 . Exercice 07