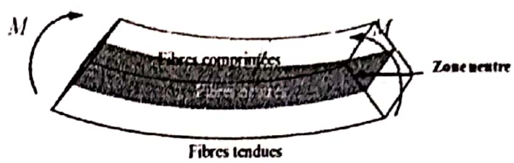
Contraintes Normales et Tangentielles en Flexion

Contraintes en Flexion :

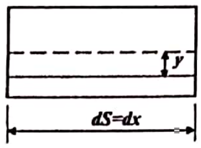
- contraintes normales dues au moment fléchissant M_z
- contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant Q_y



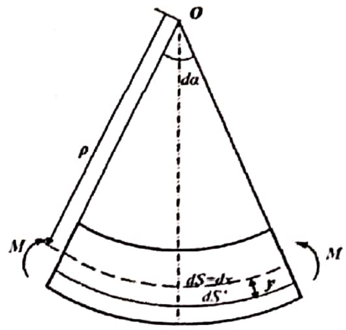
Etude des déformations **:**

Elément de poutre fléchit avant et après déformation.

Avant déformation



Après déformation



ρ : rayon de courbure de l'élément dS de la déformée.

-Déformation dans la direction de l'axe :

$$\varepsilon_x = \frac{dS - dS'}{dS} = \frac{(\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

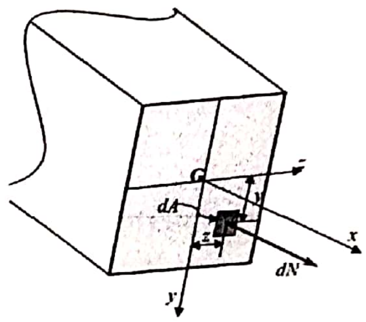
$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$

$\kappa = \dfrac{1}{\rho}$: est la courbure de la déformée.

1. *Les contraintes normales.*

L'équation de La contrainte normale s'écrit alors selon la loi de Hooke :

$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\dfrac{y}{\rho}$, E est le module de Young



Action due à la flexion dans une section droite

Equations d'équilibre :

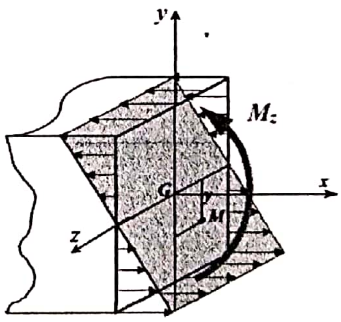
La 1ère condition d'équilibre :

$$N = \int_{(A)} dN = 0 \qquad dN = \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y dA$$

$$N = \int_{(A)} \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y dA = 0$$

$\dfrac{E}{\rho}$: Ce rapport ne dépend pas des dimensions de la section ; donc seul le terme $\int_{(A)} y dA$ représentant le moment statique de l'aire de la section par rapport à l'axe 'z' est nul : $\int_{(A)} y dA = 0$

Conclusion : l'axe 'z' est un axe central c'est-à-dire qui passe par le centre de gravité de la section.



Distribution des contraintes normales σ_x dans la section.

- Le moment par rapport à l'axe 'z'.

$$dM_z = y dN = y\sigma_x dA = y\frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA \quad \Rightarrow \quad M_z = \int_{(A)} dM_z = \int_{(A)} \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y^2 dA$$

La quantité $\int_{(A)} y^2 dA$ représente le moment quadratique I_z

Nous écrivons donc :

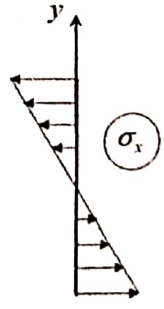
$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

M_z : le moment fléchissant sur la section,

EI_z : ce produit représente la rigidité à la flexion de la poutre.

Equation des contraintes normales en flexion :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} = E\frac{M_z y}{EI_z} = \frac{M_z y}{I_z} \qquad \sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$



M_z : Le moment fléchissant agissant su la section droite

I_z : Moment quadratique par rapport à l'axe 'z'

y : L'ordonnée du point considéré.

Remarque : σ_x est calculée en tous point $M(x,y)$ d'une section.

Considérons deux poutres collées le long de la surface de contact, de sorte qu'ils deviennent une seule poutre. Lorsque cette poutre est chargée, ***des contraintes de cisaillement horizontales*** doivent se développer le long de la surface collée afin d'éviter le glissement illustré à la figure ci-contre

Phénomène de cisaillement du à la flexion

2. Les contraintes tangentielles en flexion :

Distributions des contraintes tangentielles τ_{xy} pour les différentes géométries de la section.

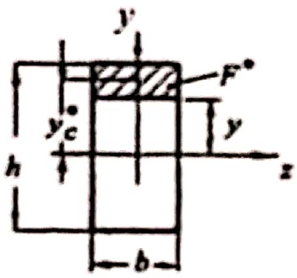
En un point arbitrairement choisi de la section droite d'une poutre en flexion, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par la formule bien connue :

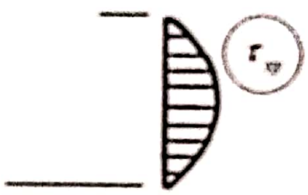
$$\tau_{xy} = \frac{Q_y\, S_z^*(y)}{I_z\, b(y)}$$

- Q_y est l'effort tranchant dans la section ;
- $S_z^*(y)$ est le moment statique par rapport à l'axe neutre z de la partie de l'aire de la section droite située au-dessus du niveau y où la contrainte est déterminée ;
- $b(y)$ est la largeur de la section au niveau de y ;
- I_z est le moment d'inertie de l'aire de la section.

Remarque : la distribution de la contrainte tangentielle τ_{xy} selon la hauteur de la section dépend des deux grandeurs $S_z^*(y)$ et $b(y)$ et est une distribution non-linéaire.

Considérons comme exemple, la poutre d'une section rectangulaire :





Distribution des contraintes tangentielle dans une section droite rectangulaire

Pour la section considérée, on a :

b = constante

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad \text{et} \quad S_z^*(y) = F^*.y_c^*$$

d'où l'on peut tirer :

$$S_z^*(y) = b\cdot\left(\frac{h}{2} - y\right)\cdot\left[\frac{h}{2} - \frac{(h/2) - y}{2}\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} Q_y \left(\frac{1}{bh} - \frac{4y^2}{bh^3}\right)$$

On peut voir que :

$$\tau_{xy}\big|_{y=\pm h/2} = 0\ ,\ \tau_{xy}\big|_{y=0} = \left(\tau_{xy}\right)_{max} = 3Q_y/2A$$

Où $A = bh$ est l'aire de la section droite de la poutre.