Table des matières

Introduction **2**

1 Equations du premier ordre **2**

1.1 Introduction 2

1.2 Solution maximale et globale d'une équation du premier ordre 4

1.3 Existence de la solution du problème de Cauchy 9

1.3.1 Problème de Cauchy 9

1.3.2 Théorème de Cauchy-Piano-Arzela 9

1.4 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy 11

1.4.1 Fonctions Lipschitzienne par rapport à y 12

1.4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz 14

1.5 Existence de la solution globale 21

1.6 Exercices 23

1.7 Exercices supplémentaires 38

1.8 Fiche : Equations différentielles d'ordre 1 40

1.8.1 Définitions 40

1.8.2 Résultats 42

2 Systèmes linéaires à coefficients variables **45**

2.1 Introduction 45

2.2 L'existence de la solution 47

2.2.1 Le problème de Cauchy 47
2.2.2 Le système homogène et non homogène 48
2.3 La résolvante du système homogène (H) 51
2.4 Le système fondamental de (H) 53
2.5 La matrice fondamentale de (H) 55
2.6 Le wronskien d'un système de solutions de (H) 56
2.7 La résolvante et le système non homogène 57
2.8 Exercices 59

3 Systèmes linéaires à coefficients constants **76**
3.1 Méthode de l'exponentielle de matrice 76
3.1.1 L'exponentielle de matrice 76
3.1.2 La résolvante en terme de l'exponentielle de matrice 84
3.1.3 Systèmes homogènes 88
3.1.4 Systèmes non homogène 91
3.2 Méthode spectrale 91
3.3 Exercices 95
3.4 Fiche : Résolution des systèmes linéaires à coefficients variables 106
3.5 Fiche : Résolution des systèmes linéaires à coefficients constants 107

4 Stabilité **110**
4.1 Définitions 110
4.2 Théorèmes de stabilité 111
4.3 Exercices 114

5 Examens **119**

Chapitre 1

Equations du premier ordre

1.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. *Rappelons que les intervalles ouverts non vide de* $\mathbb{R}$ *sont de la forme* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\,,]a, +\infty[\,,]-\infty, b[$ et $]a, b[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire (en abrégé EDO) d'ordre* n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *est une relation entre la variable* t*, la fonction inconnue* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et ses dérivées successives par rapport à* t : $y^{'}, ..., y^{(n)}$.*On peut l'écrire comme suit*

$$\mathcal{F}\left(\; t, \quad y, \quad y^{'}, \quad \cdots, \quad y^{(n)} \; \right) = 0.$$

Où $\mathcal{F} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n+1}$ *sont des ouverts non vides de* $\mathbb{R}$*. Rappellons que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $x \in \Omega$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $x \in]x - \alpha, x + \alpha[\subset \Omega$.

Exemple 1 $(t^2 + 1)\, y^3 y^{(3)} + t\sqrt{y} y^{''} + \frac{2}{y+1} y^{'} = 0$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 3.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n = 5$.

Définition 1.1.2 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est sous la forme normale si elle est de la forme*

$$y^{(n)} = \mathcal{G}\left(t, \quad y, \quad y^{'}, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)} \right).$$

Où $\mathcal{G} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 2 *L'équation* $y^{(4)} = y^{(3)} + y^{''} + y^{'}$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 4 *sous la forme normale.*

Test : Donner une équation différentielle ordinaire d'ordre 7 sous la forme normale.

Remarque 1.1.1 *Toutes les dérivées dans les définitions ci-dessus sont par rapport à la seule variable t d'où le terme ordinaire. Si la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables alors la relation entre les variables, la fonction inconnue et ses dérivées partielles s'appelle une équation aux dérivées partielle (EDP). Par exemple, l'équation* $\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x) = t + x$ *est une équation aux dérivées partielles.*

Dans ce cours, on s'intérresse aux équations différentielles ordinaires.

Définition 1.1.3 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle veut dire déterminer toutes ses solutions.*

Remarque 1.1.2 *En général, pour résoudre une équation différentielle, on regarde sa forme puis on trouve la classe où elle appartient et on rappelle que chaque classe a sa méthode de résolution.*

Quelques classes d'équations :

1. Equation linéaire d'ordre un : $y^{'} + ay = b$ avec a et b deux fonctions données.
2. Equation linéaire d'ordre deux : $y^{''} + ay^{'} + by = c$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et c une fonction donnée.
3. Equation à variables séparées (séparable) : $y^{'} = p(t)\, q(y)$ avec p et q deux fonctions données.

1.2 Solution maximale et globale d'une équation du premier ordre

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *L'équation*

$$y^{'} = f(t, y) \tag{E}$$

est appellée une équation différentielle du premier ordre (où bien d'ordre un) sous la forme normale.

Exemple 3 $y^{'} = ty$ *est une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale. Ici,* $f(t, y) = ty$ *et* $I = \Omega = \mathbb{R}$.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale..

Définition 1.2.2 *On dit que* y *est une solution de* (E) *s'il existe un intervalle non vide* $J \subset I$ *tel que*

1. *Pour tout* $t \in J$, *on a* $y(t) \in \Omega$.
2. y *est dérivable sur* J *et vérifie* $y^{'}(t) = f(t, y(t))$ *pour tout* $t \in J$.

Exemple 4 *Considérons l'équation* $y^{'} = \frac{t}{y}$. *On a* $f(t, y) = \frac{t}{y}$. *Alors,* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. *On prend* $I = \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\Omega = \mathbb{R}^*$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrons que la fonction* y *définie sur* $J =]-\infty, 0[$ *par* $y(t) = t$ *est une solution de* $y^{'} = \frac{t}{y}$:

1. *Pour tout* $t \in J =]-\infty, 0[$, *on a* $y(t) = t \in \mathbb{R}^* = \Omega$.
2. y *est dérivable sur* $J =]-\infty, 0[$ *(Pourquoi). De plus, pour tout* $t \in J$, *on a* $y^{'}(t) = 1$ *et* $\frac{t}{y(t)} = 1$. *Ainsi, pour tout* $t \in J$, *on a* $y^{'}(t) = \frac{t}{y(t)}$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]0, +\infty[$ par $y(t) = t$ est une solution de $y^{'} = \frac{t}{y}$.

Remarque 1.2.1 *Si $\Omega = \mathbb{R}$ alors la condition* 1 *dans la définition de la solution de* (E) *est toujours vérifiée.*

Exemple 5 *Considérons l'équation $y' = y^2$. On a $f(t,y) = y^2$. Alors, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On prend $I = \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que la fonction y définie sur $J =]1, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est une solution de $y' = y^2$: On a y est dérivable sur $J =]1, +\infty[$ car c'est l'inverse d'une fonction dérivable non nulle sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in J$, on a $y'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $(y(t))^2 = \frac{1}{(1-t)^2}$. Ainsi, pour tout $t \in J$, on a $y'(t) = (y(t))^2$.*

Remarque 1.2.2 *Toute solution de (E) correspond à la donnée de deux éléments : un intervalle non vide $J \subset I$ et une fonction $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Définition 1.2.3 *Soient $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E). Si $J \subset \widetilde{J}$ et $\widetilde{y} = y$ sur J alors on dit que $\widetilde{y}$ est un prolongement de y.*

Exemple 6 *Considérons sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $y' = \frac{2y}{t}$. Soit $y : J =]3, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution définie par $y(t) = t^2$. La solution $\widetilde{y} : \widetilde{J} =]2, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{y}(t) = t^2$ est un prolongement de y car $J =]3, +\infty[$ et $\widetilde{J} =]2, +\infty[$ alors $J \subset \widetilde{J}$. Montrons que $\widetilde{y} = y$ sur J : Soit $t \in J$ (donc $t \in \widetilde{J}$). Ainsi, $y(t) = t^2 = \widetilde{y}(t)$. C. à dire, on a montré que $y(t) = \widetilde{y}(t)$ pour tout $t \in J$. Ceci implique que $\widetilde{y} = y$ sur J.*

Test : On considère l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1, 1[$ par $y(t) = 0$. Montrer que la fonction $\widetilde{y}$ définie par

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} -(t+3)^2 & \text{si } t < -3, \\ 0 & \text{si } -3 \leq t \leq 2, \\ (t-2)^2 & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

est une solution qui prolonge y.

Remarque 1.2.3 *On voit que y prolonge y car $J \subset J$ et $y = y$ sur J.*

Définition 1.2.4 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution maximale si elle n'admet aucun prolongement $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $J \subsetneq \widetilde{J}$. C'est à dire y est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible (un intervalle maximale). Notons que $J \subsetneq \widetilde{J}$ veut dire J est strictement inclus dans $\widetilde{J}$.*

Exemple 7 *La fonction y définie sur $J = \mathbb{R}$ par $y(t) = e^{-4t}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -4y$ car elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle de définition maximale.*

Lemme 1.2.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

1. *Soit y une solution de (E) définie sur $]\alpha, +\infty[$. Si $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.*
2. *Soit y une solution de (E) définie sur $]-\infty, \beta[$. Si $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.*

Preuve 1

1. *Par l'absurde, on suppose que y n'est pas maximale alors elle admet un prolongement $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $]\alpha, +\infty[\subsetneq \widetilde{J}$. Puisque $\widetilde{J}$ est un intervalle alors $\alpha \in \widetilde{J}$. D'une part, $\widetilde{y}$ est une solution de (E) alors elle dérivable sur $\widetilde{J}$. Ceci implique qu'elle est continue sur $\widetilde{J}$. Ainsi, elle est continue en $t_0 = \alpha$. Alors $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a $\widetilde{y} = y$ sur J alors $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) = \lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$. C. à dire $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) \in \mathbb{R}$. Ceci est une contradiction avec $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ n'existe pas.*
2. *Similaire à (1).*

Application : La fonction y définie sur $J =]-\infty, -1[$ par $y(t) = \frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$ car $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} y(t) = \lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} \frac{1}{t+1} = -\infty$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$.

Lemme 1.2.2 *Toute solution y de (E) se prolonge en une solution maximale $\widetilde{y}$.*

Preuve 2 *Voir [De]*

Remarque 1.2.4 *En général, le prolongement maximale d'une solution y n'est pas unique. Par exemple, on considère l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1,1[$ par $y(t) = 0$. On considère la fonction $\widetilde{y}_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{y}_1(t) = 0$ et la fonction $\widetilde{y}_2$ définie par*

$$\widetilde{y}_2(t) = \begin{cases} -(t+2)^2 & si\ t \in]-\infty,-2[, \\ 0 & si\ t \in [-2,2], \\ (t-2)^2 & si\ t \in]2,+\infty[. \end{cases}$$

1. *On a $\widetilde{y}_1$ est la fonction constante 0 définie sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. En plus, $\widetilde{y}_1' = 0$ et $2\sqrt{|\widetilde{y}_1|} = 0$ alors $\widetilde{y}_1' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_1|}$. Ceci implique que $\widetilde{y}_1$ est une solution de $y' = 2\sqrt{|y|}$. Montrons que $\widetilde{y}_1$ est maximale : Puisque $\widetilde{y}_1$ est définie sur $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ qui représente l'intervalle de définition le plus grand possible alors elle est maximale. Montrons que $\widetilde{y}_1$ est un prolongement de y : On a $J =]-1,1[$ et $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ alors $J \subset \widetilde{J}_1$. D'autre part, pour tout $t \in J$ (donc $t \in \widetilde{J}_1$), on a $\widetilde{y}_1(t) = 0 = y(t)$.*

   Conclusion : $\widetilde{y}_1$ est une solution maximale qui prolonge y.

2. *Montrons que $\widetilde{y}_2$ est aussi une solution maximale qui prolonge y : Notons au début que $\widetilde{J}_2 =]-\infty,-2[\cup [-2,2] \cup]2,+\infty[= \mathbb{R}$.*

   (a) *Sur $]-\infty,-2[$: $\widetilde{y}_2(t) = -(t+2)^2$ alors elle est dérivable sur $]-\infty,-2[$. De plus, pour tout $t \in]-\infty,-2[$, on a $\widetilde{y}_2'(t) = -2(t+2)$ et $2\sqrt{|\widetilde{y}_2|} = -2(t+2)$ (car $t+2<0$). Alors $\widetilde{y}_2' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ sur $]-\infty,-2[$.*

   (b) *De même, on montre que $\widetilde{y}_2$ est une fonction dérivable sur $]-2,2[$ (resp. sur $]2,+\infty[$) et elle vérifie $\widetilde{y}_2' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ sur $]-2,2[$ (resp. sur $]2,+\infty[$).*

   (c) *Au point $t=-2$: On a*

$$\lim_{t \xrightarrow{<} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t) - \widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = \lim_{\substack{t \xrightarrow{<} -2 \\ \neq}} \frac{-(t+2)^2}{t+2} = \lim_{t \xrightarrow{<} -2} -(t+2) = 0.$$

De même, on trouve $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t)-\widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = 0$. Ce qui implique que $\widetilde{y}_2$ est dérivable au point $t = -2$. En plus, on a $\widetilde{y}_2^{'}(-2) = 0$. Mais, $2\sqrt{|\widetilde{y}_2(-2)|} = 0$ alors $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ pour $t = -2$.

(d) Au point $t = 2$: De même, on montre que $\widetilde{y}_2$ est dérivable au point $t = 2$. En plus, $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ pour $t = 2$.

Ainsi, $\widetilde{y}_2$ est une solution de $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$.

D'autre part, on peut montrer que $\widetilde{y}_2$ est maximale et elle prolonge y (A faire).

Définition 1.2.5 *Si la solution y de (E) est définie sur tout I (ie. $J = I$) alors on dit que y est une solution globale.*

Exemple 8 *La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = y$ car elle est une solution définie sur tout $I = \mathbb{R}$.*

Test : Montrer que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = 2y$.

Lemme 1.2.3 *La solution globale est une solution maximale.*

Preuve 3 *La solution globale est définie sur l'intervalle tout entier qui est l'intervalle de définition le plus grand possible. Ceci implique qu'elle est une solution maximale.*

Application : La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = y^2$ alors elle est une solution maximale.

Test : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = 2y$

Remarque 1.2.5 *Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Par exemple, la fonction y définie sur $J =]-\infty, -1[$ par $y(t) = \frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = -y^2$ (voir l'exemple ci-dessus) mais elle n'est pas globale car $J =]-1, +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$ alors $J \neq I$. C. à dire, elle n'est pas définie sur tout I.*

1.3 Existence de la solution du problème de Cauchy

1.3.1 Problème de Cauchy

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$.

Définition 1.3.1 *L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appelée une condition initiale de l'équation (E).*

Définition 1.3.2 *Le problème*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{PC}$$

est appellé problème de Cauchy.

Exemple 9 *Le problème* $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ *est un problème de Cauchy.*

Définition 1.3.3 *$y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du (PC) si elle est une solution de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.4 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution maximale du (PC) si elle est une solution maximale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.5 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution globale du (PC) si elle est une solution globale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

1.3.2 Théorème de Cauchy-Piano-Arzela

Théorème 1.3.1 *(Théorème de Cauchy-Piano-Arzela) On suppose que f est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (PC) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$, $M := \sup_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$ et $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$. Cette solution est appelée solution locale.*

Preuve 4 *La démonstration est basée sur la construction des solutions approchées par la méthode d'Euler. Pour plus de détails voir* $[De]$.

Application : Montrons que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *admet une solution locale définie sur* $[-T, T]$ où T est donné dans le théorème de Cauchy-Piano-Arzela *:* La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Si par exemple, on prend $T_0 = \frac{1}{2}$ et $r_0 = 1$ alors

$$C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$$

et

$$\begin{aligned} M &= \sup_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} \left|t^2 + e^{-y^2}\right| \\ &= \max_{(t,y)\in C} \left(t^2 + e^{-y^2}\right) = \frac{1}{4} + e^{-0^2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution locale définie sur $[-T, T] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ à valeur dans $[-r_0, r_0] = [-1, 1]$.

Remarque 1.3.1 *Soient* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ *et* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. *De tels* T_0 *et* r_0 *existent. En effet,* I *est un intervalle ouvert alors il est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Puisque* $t_0 \in I$ *alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $t_0 \in \left]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\right[\subset I$ *alors il suffit de prendre* $T_0 < \alpha$ *pour que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset \left]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\right[$ *ce qui implique que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$. *De même, pour* r_0.

Remarque 1.3.2 *Si* f *est continue sur* $I \times \Omega$ *alors elle est continue sur* $C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times$

$[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ce qui implique que* $M := \sup_{(t,y)\in C} |f(t,y)|$ *existe car toute fonction continue sur un compacte d'un espace métrique est bornée et elle atteint ses bornes. Ici* C *est un compacte de* $\mathbb{R}^2$ *car* C *est borné et fermé de* $\mathbb{R}^2$*. On a aussi* $M > 0$ *car on prend* f *une fonction non nulle.*

Lemme 1.3.1 *Si* f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$*, le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale.*

Preuve 5 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, d'aprés le théorème de Cauchy-Piano-Arzela, le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution locale* y*. Cette solution est une solution de* (E) *donc elle se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$ *de* (E)*. Puisque* $\widetilde{y} = y$ *sur* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ *alors* $\widetilde{y}(t_0) = y(t_0) = y_0$*. Ainsi,* $\widetilde{y}$ *est une solution maximale de* (PC)*.*

Remarque 1.3.3 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$*. Il suffit que* f *soit continue sur un ensemble* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *pour que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale et une solution locale définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$*.*

1.4 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Ils existent des problèmes de Cauchy qui admettent plus qu'une solution maximale. Par exemple, le problème $\begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet les deux solutions maximales y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$. Ainsi, la continuité de la fonction f est une condition insuffisante pour avoir l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. On va voir ci-aprés que si f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors on a l'unicité de la solution maximale.

1.4.1 Fonctions Lipschitzienne par rapport à y

Définition 1.4.1 *Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur C s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : \left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq k \left| y_1 - y_2 \right| .$$

Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t.

Exemple 10 *Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1, +\infty[$ alors*

$$\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| = 2 \left| \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \right| = 2 \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}.$$

Mais $y_1 \geq 1$ et $y_2 \geq 1$ donc $\sqrt{y_1} \geq 1$ et $\sqrt{y_2} \geq 1$ d'où $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2}$. Alors $\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq k \left| y_1 - y_2 \right|$, avec $k = 1 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in [1, +\infty[: \left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq k \left| y_1 - y_2 \right| .$$

Ceci implique que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$ est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $C = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

Exemple 11 *Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = y$. Soient $t \in I = \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R}$. On a $\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| = |y_1 - y_2| \leq k |y_1 - y_2|$ avec $k = 2 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall t \in I = \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R} : \left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq k \left| y_1 - y_2 \right| .$$

Ceci implique que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t.

Remarque 1.4.1 *Le terme uniformément dans les définition ci-dessus veut dire que le rapport k ne dépend pas de t. Si on considère, par exemple, la fonction f définie par $f(t,y) = 2t\sqrt{y}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1,+\infty[$ on a $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 2|t| \left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right| \leq k(t)|y_1 - y_2|$ avec $k(t) = 2|t|$ est une fonction non majorée dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la fonction f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y, sur $C = \mathbb{R} \times [1,+\infty[$. Mais non pas uniformément par rapport à t car le rapport k dépend de t.*

Définition 1.4.2 *On dit que f est une fonction **localement** Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ ils existent $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur C.*

Exemple 12 *La fonction f définie par $f(t,y) = y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. En effet, soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soient $T_0, r_0 > 0$ quelconques. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left|y_1^2 - y_2^2\right| = |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2|.$$

Mais

$$|y_1| = |(y_1 - y_0) + y_0| \leq |y_1 - y_0| + |y_0| \leq r_0 + |y_0|.$$

De même, on trouve que $|y_2| \leq r_0 + |y_0|$. Ainsi, $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ avec $k = 2(r_0 + |y_0|)$.

Notons ici que f est Lipschitzienne, par rapport à y uniforrmément par rapport à t, sur tout $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ car il n'y a aucune condition sur T_0 et r_0.

Lemme 1.4.1 *Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$. Rappellons que $f \in C^1(I \times \Omega)$ veut dire que $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $I \times \Omega$ et elles sont continues sur $I \times \Omega$.*

Preuve 6 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. *Choisissant* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ *et* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. *Soient* $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ *et* $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Si on applique le théorème des accroissements finis sur* f *dans l'intervalle* $[y_1, y_2]$ *on trouve* $c \in \,]y_1, y_2[\, \subset [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *tel que* $f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c)(y_1 - y_2)$. *Ainsi* $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, c)\right| . |y_1 - y_2|$. *Puisque* $f \in C^1(I \times \Omega)$ *alors* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $I \times \Omega$. *Ainsi,* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors elle est bornée sur* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ce qui implique que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \left(\sup_{(t,y)\in C} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right|\right) . |y_1 - y_2| = k\,|y_1 - y_2| .$$

Avec $k = \sup_{(t,y)\in C} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right|$. *Ce qui implique que* f *est localement lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$.

Application : La fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = t^2 y^2$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ car c'est une fonction polynôme. Ceci implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

Test : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \,]1, +\infty[$ par $f(t, y) = \frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R} \times \,]1, +\infty[$.

1.4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.4.1 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que* f *est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$. *Alors, pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution unique définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeur dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ici* $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ *avec* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* f *soit Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *et* $M = \sup_{(t,y)\in C} |f(t, y)|$.

Preuve 7 *On va utiliser la méthode d'aproximations successives de Picard : Pour cela on va considérer la suite de fonction* (y_n) *définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *par*

$$\begin{cases} y_0(t) := y_0, \\ y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrons que* (y_n) *est bien définie : Pour cela, on montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]\right) \text{ et } y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T]).$$

   Par récurrence :

   (a) *Pour* $n = 0$ *: Pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_0(t) := y_0 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *En plus, on a* y_0 *est la fonction constante* y_0 *alors elle est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

   (b) *Supposons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *et* $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *et montrons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *et* $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *: Soit* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. *On a*

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du \right| \leq \sup_{(t,y)\in C} |f(t,y)|\, |t - t_0| = M\,|t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0 \text{ car } T \leq \frac{r_0}{M}. \end{aligned}$$

   Ce qui implique que $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *D'autre part, puisque* $f \in C^0([t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0])$ *et* $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *alors la fonction* $t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du$ *est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$. *Ainsi,* $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$.

2. *Montrons que la suite* (y_n) *est uniformément convergente vers une fonction continue* y *: Au début, on montre, par récurrence, que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq M k^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) *Pour* $n = 0$: *On a pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{0+1}(t) - y_0(t)| &= |y_1(t) - y_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(u, y_0(u))\, du \right| \\ &\leq M|t - t_0| = Mk^0 \frac{|t - t_0|^{0+1}}{(0+1)!}. \end{aligned}$$

(b) *Supposons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq Mk^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}$.

On a pour $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(u, y_n(u)) - f(u, y_{n-1}(u))]\, du \right| \\ &\leq k \int_{t_0}^{t} |y_n(u) - y_{n-1}(u)|\, du \overset{hyp.récu}{\leq} Mk^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (u - t_0)^n\, du \\ &= Mk^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De même, on montre

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ce qui achève la démonstration. Puisque $|t - t_0| \leq T$ *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \frac{M}{k} \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'autre part, si $p, q \in \mathbb{N}$ *avec* $q \geq p$ *alors on a pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *:*

$$\begin{aligned}
|y_q(t) - y_p(t)| &= |(y_q(t) - y_{q-1}(t)) + (y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)) + ... + (y_{p+1}(t) - y_p(t))| \\
&\leq |y_{p+1}(t) - y_p(t)| + ... + |y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)| + |y_q(t) - y_{q-1}(t)| \\
&\leq \frac{M}{k}\frac{(kT)^{p+1}}{(p+1)!} + ... + \frac{M}{k}\frac{(kT)^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{M}{k}\frac{(kT)^{q}}{q!} = \frac{M}{k}\sum_{l=p+1}^{l=q}\frac{(kT)^l}{l!} \\
&\leq \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{l=q}\frac{(kT)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Soit $\frac{M}{k}\sum_{p}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!}$ *le reste de la série numérique convergente* $\frac{M}{k}\sum_{0}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!}$ *alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p : p \geq N \Rightarrow \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Ici $\|g\| := \sup_{t\in[t_0-T, t_0+T]} |g(t)|$. *Ainsi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \varepsilon.$$

D'aprés le critère de Cauchy, on trouve que (y_n) *est une suite uniformément convergente vers une fonction notée* y *dans* $[t_0 - T, t_0 + T]$. *En plus, elle est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *car, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* y_n *sont continues sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3. Montrons que y *vérifie l'équation intégrale* $y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y)\, du$ *et que* y *est une* *fonction à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$: *On a*

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Puisque (y_n) *est une suite uniformément convergente vers* y *alors après passage à la limite, on trouve*

$$y(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du \text{ pour tout } t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \qquad (EI)$$

De plus, on peut montrer que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y(t) - y_0| \leq r_0$ *(A faire). Ce qui implique que, pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, *on a* $y(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

4. *Montrons que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution locale : Puisque* y *est une fonction continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *et elle vérifie l'équation intégrale* (EI) *alors, d'aprés l'exercice 5 du td I,* y *est une solution de* (PC).

5. *Montrons l'unicié de la solution de* (PC) *sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$: *Soit* $\widetilde{y}$ *une autre solution de* (PC) *définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors, d'aprés l'exercice 5 du td I, pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, *on a* $\widetilde{y}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \widetilde{y}(u))\, du$. *Ainsi pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, \widetilde{y}(u)))\, du\right|$. *Si* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *alors*

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(u, y(u)) - f(u, \widetilde{y}(u))|\, du.$$

Puisque f *est Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $[t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| \leq k \int_{t_0}^{t} |y(u) - \widetilde{y}(u)|\, du$ *pour tout* $t \in [t_0, t_0 + T]$. *Si on applique le lemme de Gronwall (voir td I exercice 2) avec* $a = t_0$, $b = t_0 + T$, $c = 0$, $d = k > 0$ *et* ψ *la fonction continue sur* $[a, b] = [t_0, t_0 + T]$ *définie par* $\psi(t) = |y(t) - \widetilde{y}(t)|$ *on trouve* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| = \psi(t) \leq ce^{d(t-a)} = 0$ *pour tout* $t \in [a, b] = [t_0, t_0 + T]$. *Ainsi* $y(t) = \widetilde{y}(t)$ *pour tout* $t \in [t_0, t_0 + T]$.

De même, on montre que $y(t) = \widetilde{y}(t)$ *pour* $t \in [t_0 - T, t_0]$.

Application : Montrons que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *admet une solution locale unique définie sur* $[-T, T]$ *où* T *est donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz :* La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. En plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ donc elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Remarque 1.4.2 *L'unicité de la solution sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *veut dire que si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de* (PC) *définies sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *alors* $y_1 = y_2$.

Remarque 1.4.3 *La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz peut se faire en utilisant une autre méthode qui est la méthode du point fixe (voir* [De]*).*

Lemme 1.4.2 *Soit* f *une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t*, sur* $I \times \Omega$*. Si* y_1 *est une solution de* (PC) *définie sur* J_1 *et* y_2 *est une solution de* (PC) *définie sur* J_2*. Alors* $y_1 = y_2$ *sur* $J_1 \cap J_2$.

Preuve 8 *On remarque que* $J_1 \cap J_2$ *est un intervalle non vide car l'intersection de deux intervalles est un intervalle, en plus,* $t_0 \in J_1 \cap J_2$*. Considérons l'ensemble* $A = \{t \in J_1 \cap J_2 : y_1(t) = y_2(t)\}$.

1. *On a* $A \subset J_1 \cap J_2$ *(Par construction).*
2. A *est un fermé de* $J_1 \cap J_2$ *car*

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2 : (y_1 - y_2)(t) = 0\} = (y_1 - y_2)^{-1}\{0\}.$$

$\{0\}$ *est fermé de* $\mathbb{R}$ *et* $y_1 - y_2$ *est une fonction continue sur* $J_1 \cap J_2$.

3. *A est un ouvert de $J_1 \cap J_2$. En effet, Soit $t \in A$ (Ici t est fixé). Afin de simplifier, on écrit t_* au lieu de t. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $t_* \in \left]t_* - \alpha, t_* + \alpha\right[\subset A$: Puisque $t_* \in A$ alors $t_* \in J_1 \cap J_2$ et $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. On pose $y_* = y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Alors, y_1, y_2 sont deux solutions de $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_*) = y_*. \end{cases}$ Soient $T_1, T_2 > 0$ tels que $[t_* - T_1, t_* + T_1] \subset J_1$ et $[t_* - T_2, t_* + T_2] \subset J_2$. Soit T donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué sur (t_*, y_*). Posons $T_* = \min(T_1, T_2, T)$. Ainsi, y_1 et y_2 sont deux solutions définies sur $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset [t_* - T, t_* + T]$ du même problème de Cauchy. D'aprés l'unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on trouve que $y_1 = y_2$ sur $[t_* - T_*, t_* + T_*]$. Donc $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset A$. D'où le résultat avec $\alpha < T_*$.*

4. *Conclusion : On a $\varnothing \neq A$ est un ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$ et $J_1 \cap J_2$ est un connexe (car $J_1 \cap J_2$ est un intervalle de $\mathbb{R}$) alors $A = J_1 \cap J_2$ ie. $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Corollaire 1.4.1 *Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique.*

Preuve 9 *Considérons toutes les solutions y du problème de Cauchy (PC) et considérons tout les intervalles de définition J. On pose $J_{\max} := \underset{y \text{ solution de } (PC) \text{ définie sur } J}{\cup J}$. On a $J_{\max} \subset I$ et $t_0 \in J_{\max}$.*

Montrons que $J_{\max}$ est un intervalle : Soient $a, b \in J_{\max}$ tels que $a < b$. Alors ils existent deux solutions y_1 et y_2 de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 telles que $a \in J_1$ et $a \in J_2$. On distingue 3 cas :

Cas 1 : Si $t_0 \in \left]a, b\right[$ alors $[a, t_0] \subset J_1$ et $[t_0, b] \subset J_2$ car J_1 et J_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, t_0 \in J_1$ et $t_0, b \in J_2$. Ainsi, $[a, b] = [a, t_0] \cup [t_0, b] \subset J_{\max}$.

Cas 2 : Si $t_0 \leq a$ alors $[a, b] \subset [t_0, b] \subset J_2 \subset J_{\max}$.

Cas 3 : Si $b \leq t_0$ alors $[a, b] \subset [a, t_0] \subset J_1 \subset J_{\max}$.

Considérons la fonction $y_{\max}$ définie sur $J_{\max}$ comme suit si $t \in J_{\max}$ alors il existe une solution y de (PC) définie sur J telle que $t \in J$. Alors on définit $y_{\max}(t) := y(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ *est bien définie : Soient* y_1 *et* y_2 *deux solutions de* (PC) *définies (resp.) sur* J_1 *et* J_2 *telles que* $t \in J_1 \cap J_2$. *Puisque* $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ *alors* $y_1 = y_2$ *sur*$J_1 \cap J_2$. *Ainsi,* $y_1(t) = y_2(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ *est une solution de* (PC) : *Soit* $t \in J_{\max}$. *On a* $y'_{\max}(t) := y'(t) = f(t, y(t)) = f\left(t, y'_{\max}(t)\right)$. *Ainsi, pour tout* $t \in J_{\max}$, *on a* $y'_{\max}(t) = f\left(t, y'_{\max}(t)\right)$. *En plus,* $y_{\max}(t_0) := y(t_0) = y_0$.

Montrons que $y_{\max}$ *est maximale : Par l'absurde, on suppose qu'il existe un prolongement* $\widetilde{y}$ *de* $y_{\max}$ *définie sur* $\widetilde{J}$ *tel que* $J_{\max} \subsetneqq \widetilde{J}$. *Mais par définition de* $J_{\max}$ *on a* $\widetilde{J} \subset J_{\max}$. *Contradiction.*

Montrons que $y_{\max}$ *est la seule solution maximale : Par l'absurde (A faire).*

Remarque 1.4.4 *Géométriquement, les graphes de deux solutions maximales de* (E) *sont ou bien confondus ou bien disjoints.*

Remarque 1.4.5 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. *Il suffit que* f *soit continue et Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur un ensemble* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *pour que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale unique et une solution locale unique définie sur* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ *à valeur dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

Remarque 1.4.6 *L'unicité de la solution maximale dans le corollaire 1.4.1 veut dire que si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions maximale de* (PC) *définies (resp.) sur* J_1 *et* J_2 *alors* $J_1 = J_2$ *et* $y_1 = y_2$.

1.5 Existence de la solution globale

On a vu dans la remarque 1.2.5 qu'ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Dans le théorème suivant, on va voir que, sous certaines conditions sur f, cela est possible :

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c, k : I \rightarrow R_{+}$ telles que*

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

Preuve 10 *Voir [De]*

Application : Considérons l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$. Soient $t, y \in \mathbb{R}$ avec $ty \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= \left|t\sqrt{t^2 + y^2}\right| = |t| \frac{(t^2 + y^2)}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2 + y^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{y^2}} = |t|^2 + |t| |y| . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

Avec c et k sont les deux fonctions continues sur $I = \mathbb{R}$ définies par $c(t) = |t|^2$ et $k(t) = |t|$. Ce qui implique que toute solution maximale de l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ est globale.

Corollaire 1.5.1 *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution globale unique.*

Preuve 11 *f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue alors elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \mathbb{R}$ (A faire). Puisque elle est continue sur $I \times \mathbb{R}$ alors les conditions de Cauchy-Lipschitz sont vérifies alors (PC) admet une solution maximale unique y.*

D'autre part, pour tout $(t,y) \in I \times \mathbb{R}$, *on a*

$$|f(t,y)| \leq |f(t,0)| + |f(t,y) - f(t,0)| \leq |f(t,0)| + k(t)|y-0|.$$

Ainsi

$$\forall (t,y) \in I \times \mathbb{R}\, |f(t,y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

avec $c(t) = |f(t,0)|$. *D'aprés le théorème 1.5.1, on trouve que la solution maximale* y *de* (PC) *qui est une solution maximale de* (E) *est globale.*

Application : Considérons l'équation $y' = a(t)y$ où a est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t,y) = a(t)y$ est continue. De plus, si $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ alors $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |a(t)||y_1 - y_2| \leq k(t)|y_1 - y_2|$. Avec $k(t) = |a(t)| + 1$. Ici k est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Ainsi, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = a(t)y, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique.

Remarque 1.5.1 *On peut étendre les résultats de ce chapitre au fonctions* f *définies sur des ouverts quelquonque de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

1.6 Exercices

Exercice 1 *(Résolution des équations à variables séparées)*

1. *Résoudre l'équation* $y' = e^{-y}$.
2. *Trouver la solution qui vérifie* $y(0) = 1$.

Exercice 2 *(Lemme de Gronwall)*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a,b])$. On suppose que $\psi(t) \leq c + d\int_a^t \psi(u)\,du$ pour tout $t \in [a,b]$. On considère la fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(t) = c + d\int_a^t \psi(u)\,du$. *Notons que* h *est une fonction définie par une intégrale.*

1. *Montrer que $h \in C^1([a,b])$ et calculer sa dérivée.*

   Réponse : Puisque $\psi \in C^0([a,b])$ alors $h \in C^1([a,b])$ et $h'(t) = d\psi(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

2. *Montrer que pour tout $t \in [a,b]$ on a $h'(t) \leq dh(t)$. Puis, déduire que $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a,b]$.*

   Réponse : Par hypothèse, $\psi(t) \leq h(t)$ alors $h'(t) = d\psi(t) \leq dh(t)$. Ceci implique que $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a,b]$. Donc, $h'(t) - dh(t) \leq 0$ alors $\frac{d}{dt}\left(e^{-d(t-a)}h(t)\right) = e^{-d(t-a)}\left(h'(t) - dh(t)\right) \leq 0$. Aprés intégration sur $[a,t]$, on trouve $e^{-d(t-a)}h(t) \leq h(a) = c$. Ce qui implique que $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$.

3. *Déduire que $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a,b]$.*

   Réponse : Par hypothèse, $\psi(t) \leq h(t)$ alors, de la question précédente, on trouve $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$.

Remarque 1.6.1 *Ils existent plusieurs versions du lemme de Gronwall.*

Exercice 3 *(Régularité de la solution)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que si $f \in C^k(I \times \Omega)$ alors toute solution y de $y' = f(t,y)$ est de classe $C^{k+1}(J)$. Ici, J est le l'intervalle de définition de y.*

   Réponse : Rappelons qu'une fonction f est de classe $C^k(I \times \Omega)$ si ses dérivées partielles d'ordre k sont continues sur $I \times \Omega$. $C^0(I \times \Omega)$ représente l'ensemble des fonctions continues sur $I \times \Omega$. Notons $\mathcal{H}_k$ la propriété suivante :

$$\left[f \in C^k(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+1}(J)\right].$$

   On veut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_k.$$

   Donc, on le démontre par récurrence :

(a) Pour $k = 0$: On suppose que $f \in C^0(I \times \Omega)$ ie : f est continue sur $I \times \Omega$ donc elle est continue sur $J \times \Omega \subset I \times \Omega$. Soit y une solution de (E) alors $y' = f(t, y)$ ce qui implique que y' est continue sur J car c'est la composition de fonctions continues f, y et g avec $g(t) = t$ sur J. Mais y est une fonction dérivable sur J alors $y \in C^1(J)$.

(b) On suppose que $\left[f \in C^k(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+1}(J)\right]$ et on montre que $\left[f \in C^{k+1}(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+2}(J)\right]$. Soient $f \in C^{k+1}(I \times \Omega)$ et y une solution de (E). Puisque $C^{k+1}(I \times \Omega) \subset C^k(J \times \Omega)$ alors $f \in C^k(J \times \Omega)$ d'aprés l'hypothèse de récurrence $y \in C^{k+1}(J)$. Mais $y' = f(t, y)$ ce qui implique que $y' \in C^{k+1}(J \times \Omega)$ car c'est la composition de fonction de classe $C^{k+1}(J \times \Omega)$. Ainsi, $y \in C^{k+2}(J)$.

2. **Application** : *Montrer que les solutions de l'équation* $y' = e^t + y$ *sont de classe* $C^2(J)$.

   Réponse : On pose $f(t, y) = e^t + y$. Puisque $f \in C^{k=0}(I \times \mathbb{R})$ alors $y \in C^{k+1}(J) = C^2(J)$.

Exercice 4 *(Intervalle de définition d'une solution maximale)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. *Montrer que l'intervalle de définition* J *de toute solution maximale de l'équation* $y' = f(t, y)$ *est ouvert.*

   Réponse : Voir $[De]$.

2. **Application** : *Est ce que la fonction définie sur* $]-\infty, 2]$ *par* $y(t) = e^{1+t}$ *est une solution maximale de l'équation* $y' = y$.

   Réponse : Puisque la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = y$ est continue. En plus, l'intervalle de définition $]-\infty, 2]$ de y n'est pas un intervalle ouvert alors y n'est pas une solution maximale de l'équation $y' = y$.

Exercice 5 *(Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient J un intervalle non vide de I et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *y est une solution sur J du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$
2. *y est une fonction continue sur J. En plus, pour tout $t \in J$, on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du$.*

Réponse : Voir $[De]$.

Exercice 6 *(Condition de Lipschitz)*

1. *Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.*

   Réponse : La fonction f est la fonction polynôme alors elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. (Indication : Considérer $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$)*

   Réponse : *Montrons, d'abord, que pour tout $T_0, r_0 > 0$, la fonction f n'est pas Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$* : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $T_0, r_0 > 0$ tels f est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$. Alors, il existe $k > 0$ tel que

   $$\forall t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [-r_0, r_0] : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

   Pour $y_2 = 0 \in [-r_0, r_0]$ on trouve $|f(t, y_1) - f(t, 0)| \leq k |y_1 - 0|$. Mais $|f(t, y_1) - f(t, 0)| = \left|2\sqrt{|y_1|} - 0\right| = 2\sqrt{|y_1|}$. Alors, pour tout $y_1 \in [-r_0, r_0]$, on a $2\sqrt{|y_1|} \leq k |y_1|$.

Ceci implique que pour tout $y_1 \in]0, r_0]$, on a $\frac{4}{k^2} \leq y_1$. Ce qui implique que $]0, r_0] \subset \left[\frac{4}{k^2}, +\infty\right[$ ce qui représente une contradiction.

Conclusion : Puisque il existe des élements de la forme $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tel que f n'est pas lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur tout ensemble de forme $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$ alors, la fonction f n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 *(Fonctions Lipschitziennes)*

Les fonctions suivantes sont elles localement Lipschitzienne en y sur des domaines de la forme $I \times \Omega$: $f_1(t, y) = e^{ty}$, $f_2(t, y) = ye^{t^2}$, $f_3(t, y) = t\sqrt{|y|}$, $f_4(t, y) = \sin(ty)$ et $f_5(t, y) = |y| \ln(1 + t^2)$.

Réponse :

1/ Pour f_1, f_2, f_4 : Dans les trois cas, on a $I = \Omega = \mathbb{R}$.

Résultat : Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement Lipscitzienne en y sur $I \times \Omega$.

Puisque $f_1, f_2, f_4 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (Pourquoi) alors elles sont localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$.

2/ Pour f_3 : Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in]1, +\infty[$. Soient $T_0, r_0 > 0$ avec $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset]1, +\infty[$. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$|f_3(t, y_1) - f_3(t, y_2)| = |t| \left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right| = |t| \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \tag{1.1}$$

On a

* $y_1 > 1$ et $y_2 > 1$ donc $\sqrt{y_1} > 1$ et $\sqrt{y_2} > 1$ d'où $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} > 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} < \frac{1}{2}$.

** $|t| = |t - t_0 + t_0| \leq |t - t_0| + |t_0|$ mais $|t - t_0| \leq T_0$ (car $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$). Ainsi, $|t| \leq T_0 + |t_0|$

Remplaçons dans (5.11) pour trouver $|f_3(t,y_1) - f_3(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ avec $k = \frac{T_0+|t_0|}{2} > 0$. Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall (t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times]1, +\infty[, \exists T_0, r_0 > 0, \exists k > 0 : \\ \forall t &\in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0] : |f_3(t,y_1) - f_3(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Ceci implique que f_3 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

Remarque : On peut considérer l'ensemble $]a, +\infty[$ au lieu de $]1, +\infty[$ (Ici $a > 0$) et montrer que f_3 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R} \times]a, +\infty[$.

3/ Pour f_5 : Soient $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soient $T_0, r_0 > 0$. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$|f_5(t,y_1) - f_5(t,y_2)| = \left|\ln\left(1+t^2\right)\right| ||y_1| - |y_2|| \leq \left|\ln\left(1+t^2\right)\right| |y_1 - y_2|.$$

Mais il existe $k > 0$ tel que $|\ln(1+t^2)| \leq k$ pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ (fonction continue sur un intervalle fermé est bornée sur cet intervalle). Ainsi, $|f_5(t,y_1) - f_5(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$. Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall (t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \exists T_0, r_0 > 0, \exists k > 0 : \\ \forall t &\in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0] : |f_5(t,y_1) - f_5(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Ceci implique que f_5 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Pour f_5, on a aucune condition sur les réelles strictement positive T_0 et r_0.

Q. : Donner la définition de $f \in C^1(I \times \Omega)$.

Exercice 8 *(Primitive et EDO)*

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue et $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit F la primitive de $\frac{1}{f}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en t_0.

1. *Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un certain intervalle ouvert J :*

   Réponse : F est une primitive de $\frac{1}{f}$ alors

   * F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, elle est continue sur $\mathbb{R}$ (Pourquoi)

   ** $F' = \frac{1}{f} > 0$ sur $\mathbb{R}$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ (pourquoi). Ainsi, F est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   C'est-à-dire, F est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$.

   Montrons que $J := F(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert : Puisque F est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ alors $J = F(\mathbb{R}) = F(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim_{t \longrightarrow -\infty} F(t), \lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t)\right[$.

2. *Etablir que F^{-1} est une solution sur J de $y' = f(y)$ vérifiant $y(0) = t_0$: (Ici F^{-1} existe car $F : \mathbb{R} \longrightarrow J = F(\mathbb{R})$ est une bijection. En plus, $F^{-1} : J = F(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$)*

   Réponse : *Montrons que* $(F^{-1})' = f(F^{-1})$ et $F^{-1}(0) = t_0$:

   * Soit $x \in J$ alors $x = F(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. On a

   $$\begin{aligned} \left(F^{-1}\right)'(x) &= \left(F^{-1}\right)'(F(t)) = \frac{1}{F'(t)} \text{ (Dérivée de la fonction réciproque)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{f(t)}} = f(t) = f\left(F^{-1}(x)\right). \end{aligned}$$

   C'est à dire, on a montré que pour tout $x \in J$ on a $(F^{-1})'(x) = f(F^{-1}(x))$. Ceci implique que $(F^{-1})' = f(F^{-1})$.

   ** On a $F(t_0) = 0$ (Pourquoi) alors $F^{-1}(F(t_0)) = F^{-1}(0)$. Ce qui implique que $F^{-1}(0) = t_0$.

3. *Justifier que F^{-1} est une solution maximale sur J.*

   Réponse : Posons $a := \lim_{t \longrightarrow -\infty} F(t)$ et $b := \lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t)$ alors $J = \left]\lim_{t \longrightarrow -\infty} F(t), \lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t)\right[=]a, b[$. On va étudier les cas de $a \in \mathbb{R}$ ou bien $b \in \mathbb{R}$ (Pourquoi) : Pour $b \in \mathbb{R}$, *il suffit de montrer que $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} F^{-1}(x)$ n'existe pas (Voir cours) :* On a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = b$ alors, en utilisant les graphes de F et F^{-1}, on obtient que $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} F^{-1}(x) = +\infty$. De même, on montre que si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} F^{-1}(x) = -\infty$ (A le faire).

Exercice 9 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 1)*

Considérons l'équation $y' = (1 + \cos t)\, y - y^3$.................................(e)

1. *Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Etudier l'existence et l'unicité de la solution maximale y de l'équation (e) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

   Réponse : La fonction f définie par $f(t, y) = (1 + \cos t)\, y - y^3$ est continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ (Pourquoi). De plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ (Pourquoi) alors elle est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont vérifiées. Ce qui implique que l'équation (e) admet une solution maximale unique qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

2. *Soit φ une solution maximale de (e) tel qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(\tau) = 0$. Que peut on dire sur φ.*

   Réponse : Puisque la fonction nulle ψ sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale de (e) qui vérifie $\psi(\tau) = 0$ (Pourquoi). Alors, φ et ψ sont deux solutions maximales du même problème de Cauchy $\begin{cases} y' = (1 + \cos t)\, y - y^3, \\ \qquad y(\tau) = 0. \end{cases}$ D'aprés l'unicité de la solution maximale de ce problème de Cauchy avec $(t_0, y_0) = (\tau, 0) \in \mathbb{R}^2$ (Voir question 1), on trouve que $\varphi = \psi$ et $J_\varphi = \mathbb{R}$. Ainsi, φ est la solution nulle sur $\mathbb{R}$.

3. *Montrer que la solution maximale ϕ de (e) qui vérifie $\phi(0) = 1$ est une fonction strictement positive sur son intervalle de définition J. Puis, montrer que $\phi(t) \leq e^{2t}$ pour tout $t \in J_+ = \{t \in J : t \geq 0\}$.*

   Réponse : Puisque $\psi(0) = 0$ et $\phi(0) = 1$ alors $\psi(0) \neq \phi(0)$. Donc, ψ et ϕ sont deux solutions maximales différentes ($\psi \neq \phi$). Ce qui implique que leurs graphes ne se coupent pas. Ce qui implique que le graphe de ϕ est ou bien en dessus ou bien en dessous de l'axe des abscisses qui est le graphe de la fonction nulle ψ.

Puisque $\phi(0) = 1 > 0$ alors le graphe de ϕ est en dessus. Ainsi, ϕ est une fonction strictement positive sur J.

Montrons que que $\phi(t) \leq e^{2t}$ *pour tout* $t \in J_+ = \{t \in J : t \geq 0\}$: Pour tout $u \in J$, on a

$$\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} = \frac{(1+\cos u)\,\phi(u) - \phi^3(u)}{\phi(u)} \leq 2 \text{ car } \phi > 0 \text{ et } \cos u \leq 1.$$

Soit $t \in J_+$. On a

$$\ln(\phi(t)) \underset{\phi>0}{\overset{\phi(0)=1}{=}} \ln|\phi(t)| - \ln|\phi(0)| = \int_0^t \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}du \leq 2\int_0^t du = 2t.$$

C'est à dire, $\ln(\phi(t)) \leq 2t$. Prenons l'exponentielle pour trouver $\phi(t) \leq e^{2t}$. Ainsi, on a démontré que, pour tout $t \in J_+$, on a $\phi(t) \leq e^{2t}$.

Exercice 10 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 2)*

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = t^3 + y^3$ qui vérifie $y(0) = a > 0$ et $J =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.

1. *Montrer que* y *est strictement croissante sur* $[0, \beta[$

   Réponse : On a $y \in C^1(J)$ (Pourquoi) alors y' est continue sur J. Mais $y'(0) = 0^3 + y^3(0) = a^3 > 0$. Alors, y' garde son signe sur un voisinage V de $t = 0$ (Propriété des fonctions continues). Si $[0, \beta[\subset V$ la démonstration est terminée. Sinon, soit γ tel que $0 < \gamma < \beta$ et $[0, \gamma[\subset V$ alors $y' > 0$ sur $[0, \gamma[$. Ceci implique que $y(\gamma) = \lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \gamma} y(t) \geq y(0) > 0$. Ainsi $y(\gamma) > 0$. De même, on montre que $y'(\gamma) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y' > 0$ sur $[\gamma, \gamma + \varepsilon[$. Continuons cette opération jusqu'a qu'on obtient $y' > 0$ sur $[0, \beta[$. Ceci implique que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$.

2. *Montrer que* β *est fini.*

   Réponse : Soit $t \in [0, \beta[$. Pour tout $u \in [0, t]$, on a $y'(u) = u^3 + y^3(u) \geq y^3(u)$ mais $y(u) \geq y(0) > 0$ alors $\int_0^t \frac{y'(u)}{y^3(u)}du \geq \int_0^t du = t$. Mais $\int_0^t \frac{y'(u)}{y^3(u)}du = \frac{1}{2y^2(0)} -$

$\frac{1}{2y^2(t)} \leq \frac{1}{2a^2}$, alors $0 \leq t \leq \frac{1}{2a^2}$. C'est à dire, on a montré que

$$\forall t \in [0, \beta[: t \in \left[0, \frac{1}{2a^2}\right].$$

ce qui implique que $[0, \beta[\subset \left[0, \frac{1}{2a^2}\right]$. Ainsi, β est fini car $\beta \leq \frac{1}{2a^2}$.

Exercice 11 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 3)*

1. *Justifier l'existence de la solution maximale unique y de $y^{'} = \frac{1}{1+ty}$ qui vérifie $y(0) = 0$.*

   Réponse : La fonction f définie par $f(t, y) = \frac{1}{1+ty}$ est de classe C^1 sur **l'ouvert** D_f=R $^2 - \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + ty = 0\}$ car c'est l'inverse de la fonction polynôme qui est une fonction non nulle et de classe C^1 sur cet ensemble. Ce qui implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur D_f. En plus, elle est continue sur cet ensemble. On a $(0, 0) \in D_f$. Ainsi, les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifies. Ceci implique que l'équation $y^{'} = \frac{1}{1+ty}$ admet une solution maximale unique qui vérifie $y(0) = 0$.

2. *Montrer que y est une fonction impaire sur son intervalle de définition.*

   Réponse : Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de définition de y. Considérons la fonction z définie sur $]-\beta, -\alpha[$ par $z(t) = -y(-t)$. Soit $t \in]-\beta, -\alpha[$. On a $z(t) = -y(-t) \in [-r_0, r_0]$ (Pourquoi) et

$$z^{'}(t) = (-y(-t))^{'} = y^{'}(-t) = f(-t, y(-t)) = \frac{1}{1 - ty(-t)} = \frac{1}{1 + tz(t)} = f(t, z(t)).$$

   En plus, on a $z(0) = -y(0) = 0$. Ainsi, z est une autre solution de $y^{'} = \frac{1}{1+ty}$ qui vérifie $y(0) = 0$. Puisque y est une solution maximale de $y^{'} = \frac{1}{1+ty}$ alors elle est un prolongement de la solution z ie. $]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$ et $z = y$ sur $]-\beta, -\alpha[$. On a $]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$ implique que $0 < \beta = -\alpha$ (Pourquoi). De plus, $z = y$ sur $]-\beta, -\alpha[$ implique que $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in]-\beta, -\alpha[=]-\beta, \beta[$. Ceci veut dire que y est impaire sur $]-\beta, \beta[=]\alpha, \beta[$.

3. *Montrer que y est une fonction croissante sur son intervalle de définition.*

   Réponse : Puisque $f \in C^0(D_f)$ alors d'aprés l'exercice 3 avec $k = 0$, la solution $y \in C^1(]\alpha, \beta[)$. Ce qui implique que $y' \in C^0(]\alpha, \beta[)$. Mais $y' = \frac{1}{1+ty} \neq 0$ sur $]\alpha, \beta[$ alors y' a un signe constant sur $]\alpha, \beta[$. On a $y'(0) = \frac{1}{1+0y(0)} = 1 > 0$ alors y' est une fonction positive sur $]\alpha, \beta[$. Ceci implique que y est une fonction croissante sur $]\alpha, \beta[$.

Exercice 12 *(Propriétés de la solution du Problème de Cauchy 4)*

Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ....(P)

1. *Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale $\varphi : J =]-T, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.*

   Réponse : Le problème (P) est un problème de Cauchy sous la forme $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec f est une fonction définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) := -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2$. $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

   1/ *Montrons que (P) admet une unique solution maximale :* On a

   * f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car $f = f_1 + f_2$ est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$: $f_1(t, y) = -\frac{2t}{1+t^2}y = \frac{-2ty}{1+t^2}$ (quotient de deux fonctions polynômes (continues sur $\mathbb{R}^2$) et $1 + t^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^2$) et $f_2(t, y) = -t^2y^2$ (continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme).

   ** f est localemnt Lipschitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$. car $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *Question : Pourquoi* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

   *** $(t_0, y_0) = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

   Alors, le problème (P) admet une unique solution maximale φ définie sur un intervalle J.

   2/ *Montrons que $J =]-T, T[$:* On a $J =]S, T[$ (car φ est maximale) avec $S < 0 < T$ (car le domaine de définition de φ contient le temps initial $t_0 = 0$). Considèrons maintenant la fonction z définie sur $]-T, -S[$ par $z(t) = -\varphi(-t)$. Montrons, ensuite, que z est aussi une solution de (P). Puisque φ est une solution maximale alors $]-T,-S[\ \subset\ ]S,T[$. Ainsi, $S=-T$ (Pourquoi). Ce qui implique que $J=\ ]S,T[\ =\ ]-T,T[$.

3/ *Montrons que* $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$: On a $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ car $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$ (*Résultat :* Soit $k\in\mathbb{N}$. *Si* $f\in C^k(I\times\Omega)$ *alors toute solution* y *de* $y'=f(t,y)$ *est de classe* $C^{k+1}(J)$. *Ici,* J *est le l'intervalle de définition de* y.)

2. *Vérifier que* φ *est de classe* C^2 *sur* J.

   Réponse : Puisque $f\in C^{k=1}(\mathbb{R}^2)$ alors $\varphi\in C^{k+1=1+1}(J)=C^2(J)$. (Ici $f(t,y):=-\frac{2t}{1+t^2}y-t^2y^2$ pour tout $(t,y)\in\mathbb{R}^2$)

3. *Est ce que* φ *est de classe* $C^\infty(J)$.

   Réponse : *Montrons que pour tout* $m\in\mathbb{N}$ *on a* $\varphi\in C^m(J)$: Soit $m\in\mathbb{N}$. Puisque $f\in C^{k=m-1}(\mathbb{R}^2)$ alors la solution $\varphi\in C^{k+1=(m-1)+1}(J)=C^m(J)$.

4. *Montrer que pour tout* $t\in J$ *on a* $\varphi(t)>0$.

   Réponse : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $t_*\in J$ tel que $\varphi(t_*)\leq 0$.

   Cas 1 : Si $\varphi(t_*)=0$ alors φ est aussi une solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'=-\frac{2t}{1+t^2}y-t^2y^2 \\ y(t_*)=0 \end{cases}$. Mais la solution nulle est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de ce système (Pourquoi). Alors, on obtient que $\varphi=0$ sur $J\cap\mathbb{R}=J$. Puisque $0\in J$ alors $\varphi(0)=0$. Contradiction avec $\varphi(0)=1$.

   Cas 2 : Si $\varphi(t_*)<0$ (Ici $t_*\neq 0$ pourquoi) alors on utilise le théorème des valeurs intermidiaires dans l'intervalle d'extrimités 0 et t_* sur la fonction continue φ pour montrer qu'il existe $t^*\in(0,t_*)$ tel que $\varphi(t^*)=0$. Puis, on obtient la contradiction comme dans le cas 1. (A le faire)

5. *Déduire que* φ *est décroissante sur* $[0,T[$.

   Réponse : φ est la solution de (P) alors $\varphi'=-\frac{2t}{1+t^2}\varphi-t^2\varphi^2=-\left(\frac{2t}{1+t^2}\varphi+t^2\varphi^2\right)\leq 0$ sur $[0,T[$. Ainsi, φ est décroissante sur $[0,T[$.

6. *Déduire que* $0<\varphi(t)\leq 1$ *pour tout* $t\in[0,T[$.

Réponse : Soit $t \in [0, T[$:

* De la question 4, on trouve que $0 < \varphi(t)$.

** Puisque $t \geq 0$ et φ est décroissante sur $[0, T[$ alors $\varphi(t) \leq \varphi(0) = 1$. C'est à dire, $\varphi(t) \leq 1$.

7. *Montrer que* $T = +\infty$.

   Réponse : Par l'absurde, On suppose que $T < +\infty$. Puisque φ est décroissante sur $[0, T[$ (d'aprés Q 5) et minorée sur $[0, T[$ (d'aprés Q. 6) alors $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} T} \varphi(t)$ existe. Ensuite, on montre que le prolongement par continuité $\widetilde{\varphi}$ de φ est une solution de (P) sur $]-T, T]$ (A le faire). Ce qui représente une contradiction avec φ une solution maximale de (P) sur $J =]-T, T[$.

8. *Montrer que* $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$ *existe et vaut à zéro.*

   Réponse : Puisque φ est décroissante et minorée sur $[0, T[\; = [0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe. Posons $l := \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$.

   Au début, on note que puisque $0 < \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ alors, aprés passage à la limite, on trouve que $0 \leq \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = l$. C'est à dire, $l \geq 0$.

   Montrons que $l = 0$: Par l'absurde, supposons que $l \neq 0$. De la remarque ci-dessus, $l > 0$. Ceci implique que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi'(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \left[-\frac{2t}{1+t^2}\varphi - t^2\varphi^2\right] = -\infty$. Alors

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall u, u \geq B \Longrightarrow \varphi'(u) \leq -A.$$

   Pour $A = 1$, on trouve $B > 0$ tel que $\varphi'(u) \leq -1$ pour tout $u \geq B$.

   Pour tout $t \geq B$, on a

$$\varphi(t) = \varphi(B) + \int_B^t \varphi'(u)\, du \leq \varphi(B) - \int_B^t 1 du = \varphi(B) + B - t.$$

   C'est à dire, pour tout $t \geq B$ on a $\varphi(t) \leq \varphi(B) + B - t$. Puisque $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} (\varphi(B) + B - t) = -\infty$ alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty$ (pourquoi). Ceci est une contradiction avec $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = l \in \mathbb{R}$.

9. *Vérifier que la fonction définie par $\psi = \frac{1}{\varphi}$ est bien définie sur J.*

   Réponse : Puisque $\varphi > 0$ sur J alors $\varphi \neq 0$ sur J. Ainsi ψ est bien définie sur J.

10. *Trouver une équation différentille ordinaire ordinaire d'ordre un sur ψ.*

    Réponse : On a

$$\begin{aligned} \psi' &= \left(\frac{1}{\varphi}\right)' = \frac{-\varphi'}{\varphi^2} = \frac{-\left[-\frac{2t}{1+t^2}\varphi - t^2\varphi^2\right]}{\varphi^2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}\frac{1}{\varphi} + t^2 = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2 \end{aligned}$$

    C'est à dire $\psi' = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2$.

11. *Expliciter ψ. (Trouver ψ)*

    Réponse : *Ind.* Remarquer que ψ vérifie $\psi' = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2$ et $\psi(0) = 1$. Puis, on résout ce système.

12. *Vérifier que $\varphi(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t-arctgt)}$ pour tout $t \in J$.*

    Réponse : *Ind.* Remarquer que $\varphi = \frac{1}{\psi}$. Puis, on remplace ψ par sa valeur obtenu dans la question 11.

Exercice 13 *(Propriétés de la solution du pb de Cauchy 5)* **(Indication)**

Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ....(P)

1. *Montrer que les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont satisfaites.*

   Réponse : *Ind.* Les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont : f est continue et Localement Lipschitzienne en y sur $I \times \Omega$. Ici $f(t,y) = y^2 + t^2$ pour tout $(t,y) \in I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que si y est solution de (P) sur J_y alors la fonction définie par $-y(-t)$ est aussi une solution de (P) sur $-J_y$.*

   Réponse : *Ind.* Il suffit de montrer que $-y(-t)$ vérifie le problème (P).

3. *Prouvez que y est strictement croissante sur J_y.*

Réponse : *Ind.* Utiliser $y^{'}=y^2+t^2$.

4. On note $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (P).

   Montrer que u *est impaire (Ind.* Utiliser la question 2.). *Prouvez que* $\lim_{t\longrightarrow \sup J} u(t) = +\infty$ *et* $\lim_{t\longrightarrow \inf J} u(t) = -\infty$ *(Ind. Par l'absurde.)*

Exercice 14 *(Applications du théorème de Cauchy Lipschitz)*

1. *Résoudre l'équation* $y^{'}=y^2$.

   Réponse : Notons par ψ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On a ψ est une solution maximale de $y^{'}=y^2$. Soit y une solution maximale différente de ψ c. à dire il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $y(t_0)\neq\psi(t_0)$. Les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont vérifies (A faire). Ce qui implique que les graphes de y et ψ sont disjoints car ils ne sont pas confondus. Ainsi, y ne s'annulle jamais. Donc, on peut déviser sur y pour avoir $\int \frac{y^{'}}{y^2}dt=\int dt$. Alors, $\frac{-1}{y}=t+C$ ceci implique que $y=\frac{-1}{t+C}$ avec $t\neq -C$. Ainsi, les solutions de $y^{'}=y^2$ sont $\psi=0$, $y_1(t)=\frac{-1}{t+C}$ avec $t\in\left]-\infty,-C\right[$ et $y_2(t)=\frac{-1}{t+C}$ avec $t\in\left]-C,-\infty\right[$. Ici $C\in\mathbb{R}$.

2. *Utiliser le théorème de Cauchy Lipschitz pour démontrer que la fonction* f *définie par* $f(t,y)=2\sqrt{|y|}$ *n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à* y uniformément par rapport à t, *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Réponse : Par l'absurde, on suppose qu'elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors on trouve qu'elle vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz. Par conséquent, le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'}=2\sqrt{|y|}, \\ y(0)=0, \end{cases}$ admet une solution maximale unique. Ceci est une contradiction car ce problème de Cauchy admet deux solutions maximales différentes données par $y_1(t)=0$, $y_1(t)=t\,|t|$ et $J_1=J_2=\mathbb{R}$.

Exercice 15 *(Solution globale)*

1. *Sans calculer la solution ; justifier l'existence d'une solution maximale unique* y *de l'équation* $y^{'}=1+y$ *qui vérifie* $y(0)=1$.

Réponse : La fonction f définie par $f(t,y) = 1 + y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. Ce qui implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. En plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz. On a $(t_0, y_0) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ alors l'équation $y' = 1 + y$ admet une solution maximale unique qui vérifie $y(0) = 1$.

2. *Déterminer son intervalle de définition.*

Réponse : Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. On a $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1 - y_2| \leq k(t)|y_1 - y_2|$. Avec $k(t) = 2 > 0$. Ici k est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f est globalement Lipshitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \mathbb{R}$. Ainsi, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y + 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ admet une solution globale unique. Ce qui implique que l'intervalle de définition de y est $J = \mathbb{R}$.

1.7 Exercices supplémentaires

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Que veut dire y est une solution définie sur $[a,b]$ de l'équation (E).

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Soit y une solution de (E) définie sur $]\alpha, +\infty[$. Montrer que si $\lim_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.

   (b) Soit y une solution de (E) définie sur $]-\infty, \beta[$. Montrer que si $\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.

3. Montrer que la fonction y définie sur $]1, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est une solution de $y' = y^2$. Est ce que c'est une solution maximale (Justifier). Est ce que c'est une solution globale (Justifier)

   Même questions pour :

(a) La fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $y(t) = t$. L'équation $y' = \frac{t}{y}$. Que peut on dire si y est une solution de (E) définie sur $]-\infty, \beta[$ et $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ existe.

(b) La fonction y définie sur $]-\infty, 2]$ par $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$. L'équation $y' = y^3$.

(c) La fonction y définie sur $]2, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$. L'équation $y' = -y^2$.

(d) La fonction nulle sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution est maximale)

(e) La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$. L'équation $y' = 2y$.

(f) La fonction y définie sur $[3, 9]$ par $y(t) = e^{2t}$. L'équation $y' = 2y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution n'est pas maximale)

4. Considérons sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $y' = \frac{2y}{t}$. Soit $y : J =]3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution définie par $y(t) = t^2$. Montrer que la solution $\widetilde{y} : \widetilde{J} =]2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{y}(t) = t^2$ est un prolongement de y.

5. On considère sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1, 1[$ par $y(t) = 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \leq -1$ et $\beta \geq 1$ et on considère les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ définies par $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} (t-\beta)^2 & \text{si } t \geq \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta, \\ -(t-\alpha)^2 & \text{si } t \leq \alpha, \end{cases}$
Montrer que les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ sont des solutions maximales qui prolongent y. Que peut on déduire.

6. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution locale.

7. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ admet les deux solutions maximales y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = |t|\, t$. Que peut on déduire..
Remarquer que la fonction y_2 est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

8. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$ par $f(t, y) = \frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

9. Montrer, en utilisant deux méthodes, que la fonction f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.
10. Montrer que toutes les solutions de $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ sont globales.
11. Considérons l'équation $y' = a(t)\,y + b(t)$ où a, b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Sans calculer la solution, montrer le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique de classe $C^2(\mathbb{R})$.
12. Montrer que si f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors elle est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \Omega$. Que peut on dire si elle est en plus continue sur $I \times \Omega$.

1.8 Fiche : Equations différentielles d'ordre 1

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, J est un intervalle non vide de I et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$.

1.8.1 Définitions

1. L'équation
$$y' = f(t,y) \tag{E}$$
est appelée **une équation différentielle du premier ordre (ou bien d'ordre un) sous la forme normale.**
2. On dit que y **est une solution de** (E) s'il existe un intervalle non vide $J \subset I$ tel que
   (a) Pour tout $t \in J$ on a $y(t) \in \Omega$.
   (b) y est dérivable sur J et vérifie $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in J$.

3. Soient $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E). Si $J \subset \widetilde{J}$ et $y = \widetilde{y}$ sur J alors on dit que $\widetilde{y}$ **est un prolongement de** y.

4. Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **solution maximale** si elle n'admet aucun prolongement $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $J \subsetneq \widetilde{J}$. C'est à dire y est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible.

5. Si la solution y de (E) est définie sur tout I (ie. $J = I$) alors on dit que y est **une solution globale.**

6. L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appellée **une condition initiale de l'équation** (E).

7. Le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{PC}$$

   est appelé **problème de Cauchy.**

8. Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que f est une fonction **Lipschitzienne, par rapport à** y **uniformément par rapport à** t, **sur** C s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |x_1 - x_2|$$

   Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que f est **une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à** x **uniformément par rapport à** t, **sur** $I \times \Omega$.

9. On dit que f est une fonction **localement Lipschitzienne, par rapport à** y **uniformément par rapport à** t, **sur** $I \times \Omega$ si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ ils existent $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur C.

1.8.2 Résultats

1. *Lemme de Gronwall :* Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a, b])$. On suppose que
$$\psi(t) \leq c + d \int_a^t \psi(u)\, du \text{ pour tout } t \in [a, b].$$
Alors $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a, b]$.

2. *Régularité de la solution :* Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k(I \times \Omega)$ alors toute solution y de $y' = f(t, y)$ est de classe $C^{k+1}(J)$. Ici, J est le l'intervalle de définition de y.

3. *Intervalle de définition d'une solution maximale : Si* f est une fonction continue sur $I \times \Omega$ alors l'intervalle de définition J de toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est ouvert.

4. *Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy :* Soient J un intervalle non vide de I et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C^0(I \times \Omega)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) y est une solution du problème de cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

   (b) y est une fonction continue sur J, pour tout $t \in J$ on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\, du$.

5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et y une solution de (E) définie sur $]\alpha, +\infty[$. Si $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ **n'existe pas** alors y **est une solution maximale.**

6. Toute solution y de (E) se prolonge en une solution maximale $\widetilde{y}$. En général, ce prolongement n'est pas unique.

7. La solution globale est une solution maximale. Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales.

8. *Théorème de Cauchy-Piano-Arzela :* On suppose que f est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Soit $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tel

que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et $M := \max\limits_{(t,y)\in C} |f(t,y)|$. Cette solution est appellée solution locale.

9. Si f est une fonction continue sur $I \times \Omega$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale.

10. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$.

11. *Théorème de Cauchy-Lipschitz :* On suppose que f est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$. Alors, le problème de Cauchy (PC) admet une solution unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ avec $T_0, r_0 > 0$ tel que f soit Lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ et $M = \sup\limits_{(t,y)\in C} |f(t,y)|$.

12. Soit f une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$. Soient y_1 une solution de (E) définie sur J_1 et y_2 une solution de (E) définie sur J_2. S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

13. Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique.

14. Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors les graphes de deux solutions maximales de (E) sont ou bien confondus ou bien disjoints.

15. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c, k : I \to R_+$ telles que

$$\forall (t,y) \in I \times \mathbb{R} : |f(t,y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

16. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipshitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution globale unique.

Chapitre 2

Systèmes linéaires à coefficients variables

2.1 Introduction

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soient, pour tout $i, j = \overline{1, n}$, a_{ij} et b_i des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons le système de n équations différentielles linéaires suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\, y_1(t) + a_{12}(t)\, y_2(t) + ... + a_{1n}(t)\, y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)\, y_1(t) + a_{22}(t)\, y_2(t) + ... + a_{2n}(t)\, y_n(t) + b_2(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\, y_1(t) + a_{n2}(t)\, y_2(t) + ... + a_{nn}(t)\, y_n(t) + b_n(t). \end{cases} \quad \forall t \in I \qquad (S)$$

Les inconnues $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme 2.1.1 *Le système (S) est équivalent au système*

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t) + B(t), \forall t \in I. \qquad (E)$$

$$Avec \quad \begin{array}{l} Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{l} A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{l} B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Preuve 12 *On a*

$$\begin{aligned}(S) \iff & \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + ... + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + ... + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{pmatrix}, \forall t \in I \\ \iff & \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \forall t \in I \\ \iff & Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \forall t \in I\end{aligned}$$

Exemple 13 *Le système* $\begin{cases} y_1'(t) = ty_1(t) + y_2(t) - 1, \\ y_2'(t) = \cos t y_1(t) + e^t y_2(t). \end{cases}$ $t \in I = \mathbb{R}$ *s'écrit sous la forme* $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, *pour tout* $t \in I = \mathbb{R}$; *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ \cos t & e^t \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour tout* $t \in I = \mathbb{R}$.

Lemme 2.1.2 *Toutes équation d'ordre deux s'écrit sous la forme du système* (E).

Preuve 13 *Considérons l'équation d'ordre deux suivante* $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. *On pose* $y_1(t) = y(t)$ *et* $y_2(t) = y'(t)$. *On a pour tout* $t \in I$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = y''(t) = -a(t)y'(t) - b(t)y(t) + c(t) = -b(t)y_1(t) - a(t)y_2(t) + c(t). \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -b(t)\, y_1(t) - a(t)\, y_2(t) + c(t). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à $Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$, *pour tout* $t \in I$; *avec* $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$ *pour tout* $t \in I$.

Définition 2.1.1 *Le système* (E) *est appellé système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients variables avec second membre.*

Définition 2.1.2 *Si pour tout* $t \in I$, *on a* $B(t) = 0$ *alors le système*

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t),\, t \in I, \tag{H}$$

est appellé système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients variables homogène (ou sans second membre). On dit que (H) *est le système homogène associé à* (E).

Notation 1 *Pour simplifier, on écrit* (E) *comme suit* $Y' = A(t)\,Y + B(t)$ *et le système* (H) *comme suit* $Y' = A(t)\,Y$.

2.2 L'existence de la solution

2.2.1 Le problème de Cauchy

Théorème 2.2.1 *Si* A *et* B *sont continues sur* I *alors, pour tout* $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, *le système*

$$\begin{cases} Y' = A(t)\,Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{E.D.}$$

admet une solution globale unique.

Preuve 14 *Voir exercice 1.*

Corollaire 2.2.1 *Si A est continue sur I alors, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le système*

$$\begin{cases} Y' = A(t)\, Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{H.D.}$$

admet une solution unique.

Preuve 15 *Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur la fonction vectorielle continue $B = 0$.*

2.2.2 Le système homogène et non homogène

Théorème 2.2.2 *L'ensemble des solutions de (H), noté S_H, est un espace vectoriel de dimension n.*

Preuve 16 *Montrons que S_H est un espace vectoriel : Considérons $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On rappel que cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Puisque $S_H := \{Y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) : Y \text{ est une solution de } (H)\} \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ alors, il suffit de montrer que S_H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$:

1. *On a la fonction nulle 0 est une solution de (H). En effet, pour tout $t \in I$, on a $0' = 0$ et $A(t)\, 0 = 0$. Alors $0' = A(t)\, 0$. Ceci implique que $0 \in S_H$. Ainsi, $S_H \neq \varnothing$.*
2. *Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $Y_1, Y_2 \in S_H$. Alors, Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (H).*

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)'(t) &= \alpha_1 Y_1'(t) + \alpha_2 Y_2'(t) = \alpha_1 (A(t)\, Y_1(t)) + \alpha_2 (A(t)\, Y_2(t)) \\ &= A(t)(\alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t)) = A(t)(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)(t). \end{aligned}$$

   C. à dire, $(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)'(t) = A(t)(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)(t)$ pour tout $t \in I$. Ceci implique que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est une solution de (H). C. à dire, $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in S_H$.

Montrons que $\dim S_H = n$: *On fixe* $t_0 \in I$ *puis on considère la fonction* ϕ_{t_0} *donnée comme suit*

$$\begin{array}{rcl} \phi_{t_0} & : & S_H \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ Y & \longmapsto & \phi_{t_0}(Y) = Y(t_0) \end{array}$$

1. *Soient* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *et* $Y_1, Y_2 \in S_H$. *On a*

$$\begin{aligned} \phi_{t_0}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) &= (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)(t_0) = \alpha_1 Y_1(t_0) + \alpha_2 Y_2(t_0) \\ &= \alpha_1 \phi_{t_0}(Y_1) + \phi_{t_0}(Y_2). \end{aligned}$$

   C. à dire,

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall Y_1, Y_2 \in S_H : \phi_{t_0}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 \phi_{t_0}(Y_1) + \phi_{t_0}(Y_2).$$

   Ceci implique (par définition) que ϕ_{t_0} *est linéaire.*

2. *Soient* $Y_1, Y_2 \in S_H$ *tel que* $\phi_{t_0}(Y_1) = \phi_{t_0}(Y_2)$. *Alors* $Y_1(t_0) = Y_2(t_0)$. *On pose* $Y_0 = Y_1(t_0)$. *On a* Y_1 *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_1(t_0) = Y_0, \end{cases}$ *et* Y_1 *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_2(t_0) = Y_1(t_0) = Y_0. \end{cases}$ *C'est à dire,* Y_1, Y_2 *sont deux solutions du problème de Cauchy* $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ *Ce problème de Cauchy admet une solution unique alors* $Y_1 = Y_2$.

   C'est à dire, on a démontré que

$$\forall Y_1, Y_2 \in S_H : \left(\phi_{t_0}(Y_1) = \phi_{t_0}(Y_2)\right) \Longrightarrow (Y_1 = Y_2).$$

   Ceci implique (par définition) que ϕ_{t_0} *est injective.*

3. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons la solution Z du système $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ *On a (par construction) $Z \in S_H$. De plus, $\phi_{t_0}(Z) := Z(t_0) = Y_0$. C'est à dire, on démontré que :*

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists Z \in S_H : \phi_{t_0}(Z) := Y_0.$$

Ceci implique que ϕ_{t_0} est surjective.

Conclusion : *On a démontré qu'il existe un isorphisme (qui est l'application linéaire bijective ϕ_{t_0}) entre S_H et $\mathbb{R}^n$, ceci implique que $\dim S_H = \dim \mathbb{R}^n$. Mais, $\dim \mathbb{R}^n = n$ alors $\dim S_H = n$.*

Théorème 2.2.3 *Soit Y_p une solution de (E). L'ensemble des solutions de (E), noté S_E, est donnée par $S_E = S_H + Y_p$.*

Preuve 17 *Montrons $S_E \subset S_H + Y_p$ et $S_H + Y_p \subset S_E$: Soit $Y \in S_E$. On a $Y = Z + Y_p$ avec $Z := Y - Y_p$ on a*

$$\begin{aligned} Z'(t) &= (Y - Y_p)'(t) = Y'(t) - Y_p'(t) = (A(t)\,Y(t) + B(t)) - (A(t)\,Y_p(t) + B(t)) \\ &= A(t)\,(Y(t) - Y_p(t)) = A(t)\,Z(t) \text{ pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

C'est à dire $Z'(t) = A(t)\,Z(t)$ pour tout $t \in I$. Donc, $Z := Y - Y_p$ est une solution de (H). C'est à dire, $Z := Y - Y_p \in S_H$. Ce qui implique $Y = Z + Y_p \in S_H + Y_p$.

C'est à dire, on démontré que

$$\forall Y : Y \in S_E \Longrightarrow Y \in S_H + Y_p.$$

Ceci implique que $S_E \subset S_H + Y_p$.

Soit, maintenant, $Y \in S_H + Y_p$ alors il existe $Z \in S_H$ tel que $Y = Z + Y_p$. Pour tout

$t \in I$, on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (Z+Y_p)'(t) = Z'(t) + Y_p'(t) = (A(t)Z(t)) + (A(t)Y_p(t) + B(t)) \\ &= A(t)(Z(t)+Y_p(t)) + B(t) = A(t)Y(t) + B(t). \end{aligned}$$

C'est à dire $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$. Donc, $Y := Y - Y_p$ est une solution de (E). Ainsi, $Y \in S_E$.

C'est à dire, on démontré que

$$\forall Y : Y \in S_H + Y_p \Longrightarrow Y \in S_E.$$

Ceci implique que $S_H + Y_p \subset S_E$.

2.3 La résolvante du système homogène (H)

On a vu que, pour tout $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, le système $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ admet une solution unique. Notons cette solution par $Y(., t_0, Y_0)$. On peut remarquer que $Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0$.

Lemme 2.3.1 *Soient $t, t_0 \in I$. Considérons la fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par $f_{t,t_0}(Y_0) = Y(t, t_0, Y_0)$. L'application f_{t,t_0} est linéaire.*

Preuve 18 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}^n$. On a $f_{t,t_0}(\alpha Y_0 + \beta Z_0) = Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0)$. D'autre part, on considère la fonction définie sur I par $G(t) = \alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)$. On a*

$$\begin{aligned} G'(t) &= (\alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0))' = \alpha Y'(t, t_0, Y_0) + \beta Y'(t, t_0, Z_0) \\ &= \alpha A(t) Y(t, t_0, Y_0) + \beta A(t) Y(t, t_0, Z_0) = A(t)(\alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)) \\ &= A(t) G(t). \end{aligned}$$

et $G(t_0) = \alpha Y(t_0, t_0, Y_0) + \beta Y(t_0, t_0, Z_0) = \alpha Y_0 + \beta Z_0$. *Ce qui implique que* G *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = \alpha Y_0 + \beta Z. \end{cases}$ *De l'unicité de la solution, on trouve que* $Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0) = G(t)$. *C'est à dire,* $Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0) = \alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)$. *Ainsi,* $f_{t,t_0}(\alpha Y_0 + \beta Z_0) = \alpha f_{t,t_0}(Y_0) + \beta f_{t,t_0}(Z_0)$.

Définition 2.3.1 *La matrice associée à* f_{t,t_0} *est appellée la matrice résolvante de* (H) *(où brièvement la résolvante). On la note par* $R(t, t_0)$.

Théorème 2.3.1 *On a*

1. $\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0)\, Y_0 = Y(t, t_0, Y_0)$.
3. $\forall t_0 \in I : R(t_0, t_0) = I_n$. *Ici,* I_n *représente la matrice identité.*
4. $\forall t, s, r \in I : R(t, s)\, R(s, r) = R(t, r)$.
5. $\forall t, s \in I : R(t, s)$ *est inversible et on a* $(R(t, s))^{-1} = R(s, t)$.
6. $\forall t, t_0 \in I : \frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t)\, R(t, t_0)$.
7. $\forall t, t_0 \in I : \frac{d}{dt} R(t_0, t) = -R(t_0, t)\, A(t)$.

Preuve 19

1. *De la définition de la matrice associée à une application.*
2. *Soient* $t, t_0 \in I$. *On a* $R(t, t_0)\, Y_0 = f_{t,t_0}(Y_0) = Y(t, t_0, Y_0)$, *d'où le résultat.*
3. *Soit* $t_0 \in I$. *Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. *On a* $R(t_0, t_0)\, Y_0 = Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0 = I_n Y_0$. *C'est à dire, on a montré que*

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n : R(t_0, t_0)\, Y_0 = I_n Y_0.$$

   D'aprés la propriété algébrique (voir exercice 2), on trouve $R(t_0, t_0) = I_n$.

4. *Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. *Soient* $r, s \in I$. *On pose* $Y_1 = R(s, r)\, Y_0$ *et on définit deux fonctions* f *et* g *comme suit* $f(t) = R(t, s)\, R(s, r)\, Y_0$ *et* $g(t) = R(t, r)\, Y_0$ *pour tout* $t \in I$.

On a $f(t) = R(t,s)Y_1 = Y(t,s,Y_1)$ *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(s) = Y_1. \end{cases}$ *D'autre part, g est aussi une solution de ce système (Pour tout* $t \in I$ *on a* $g'(t) = A(t)g(t)$ *et* $g(s) = R(s,r)Y_0 = Y_1$*). d'aprés l'unicité de la solution, on trouve* $f = g$*. Ce qui implique, d'aprés la propriété algébrique, le résultat.*

5. *Soient* $t, s \in I$*. On a* $R(t,s)R(s,t) = R(t,t) = I_n$*. Ce qui implique le résultat. (Rappelons que si une matrice est inversible à droite alors elle est inversible et son inverse est égale à l'inverse à droite).*

6. *Soient* $t, t_0 \in I$*. Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$*. On a*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)Y_0 &= \frac{d}{dt}(R(t,t_0)Y_0) = \frac{d}{dt}Y(t,t_0,Y_0) \\ &= A(t)Y(t,t_0,Y_0) = (A(t)R(t,t_0))Y_0. \end{aligned}$$

C'est à dire $\left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)Y_0 = (A(t)R(t,t_0))Y_0$*.*

7. *Soient* $t, t_0 \in I$*. On a* $R(t,t_0)R(t_0,t) = I_n$ *alors* $\frac{d}{dt}(R(t,t_0)R(t_0,t)) = 0_n$ *mais*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(t,t_0)R(t_0,t)) &= \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)R(t_0,t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= (A(t)R(t,t_0))R(t_0,t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= A(t)I_n + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= A(t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right), \end{aligned}$$

alors $A(t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) = 0_n$*. Donc* $\frac{d}{dt}R(t_0,t) = -(R(t,t_0))^{-1}A(t) = -R(t_0,t)A(t)$*.*

2.4 Le système fondamental de (H)

Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Définition 2.4.1 *On dit que* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H) *si*

1. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont des solutions de* (H).
2. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants. C'est à dire :*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n = 0) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0).$$

Exemple 14 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$.

1. *Montrons que* Y_1 *et* Y_2 *sont deux solutions de* $Y' = A(t)Y$: On a $Y_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(t)Y_1(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $Y_1'(t) = A(t)Y_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H). De même, on montre que Y_2 est aussi une solution de (H).
2. *Montrons que* Y_1 *et* Y_2 *sont linéairement indépendants :* Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}(\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0) &\Longrightarrow (Y_1(t) + \beta Y_2(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow \left(\alpha\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = 0, \forall t \in \mathbb{R}\right) \\ &\Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} \alpha t - \beta \\ \alpha + \beta t \end{pmatrix} = 0, \forall t \in \mathbb{R}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$ représente une infinité d'équations de deux inconnues α et β. Mais, on sait que pour trouver les inconnues α et β il nous suffit deux équations non équivalentes. Pour cela, on prend les deux équations données par la valeur $t = 0$. Ainsi, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendants.

Théorème 2.4.1 *Soit* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *un système fondamental de* (H). *On a* $S_H = [\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}]$. *Rappellons que par définition*

$$[\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}] := \{Y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) / Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve 20 $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H) *alors* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système linéairement indépendant. Puisque card* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\} = n = \dim S_H$ *alors* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est une base de* S_H. *Ce qui implique que* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *engendre* S_H.

Exemple 15 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$. *Puisque* $\{Y_1, Y_2\}$ *est un système fondamental de* $Y' = A(t) Y$ *alors*

$$\begin{aligned} S_H &= [\{Y_1, Y_2\}] = \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / \text{pour tout } t \in \mathbb{R} : Y(t) = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / \text{pour tout } t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *La solution générale de* (H) *est donnée par* $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + ... + c_n Y_n$ *avec* $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

2.5 La matrice fondamentale de (H)

Définition 2.5.1 *La matrice dont ces colonnes représente un système fondamentale de* (H) *s'appelle la matrice fondamentale de* (H). *En d'autre term, on dit que* M *est une* *matrice fondamentale si* $M = (Y_1...Y_n)$ *avec* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H).

Exemple 16 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$. *Puisque* $\{Y_1, Y_2\}$ *est un système fondamental de* $Y' = A(t)Y$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $M(t) = (Y_1(t)\, Y_2(t)) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. *Alors* M *est une matrice fondamentale de* $Y' = A(t)Y$.

Théorème 2.5.1 *Soit* M *une matrice fondamentale du système* (H). *Alors*

1. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a* $M'(t) = A(t)M(t)$.
2. *La solution générale de* (H) *est donnée par* $Y = MC$ *avec* $C \in \mathbb{R}^n$.

Preuve 21 M *est une matrice fondamentale du système* (H) *alors* $M = (Y_1...Y_n)$ *avec* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H).

1. *On a*

$$\begin{aligned} M'(t) &= (Y_1(t)...Y_n(t))' = \left(Y_1'(t)...Y'(t)\right) = (A(t)Y_1(t)...A(t)Y_n(t)) \\ &= A(t)(Y_1(t)...Y_n(t)) = A(t)M(t). \end{aligned}$$

2. *On a* $Y(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t) + ... + c_nY_n(t) = (Y_1(t)...Y_n(t))C$ *avec* $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

2.6 Le wronskien d'un système de solutions de (H)

Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H$.

Définition 2.6.1 *Le wronskien de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *, noté* W*, est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont* $Y_1, Y_2, ...$ *et* Y_n *:*

$$\forall t \in I : W(t) := \det [Y_1(t) ... Y_n(t)].$$

Théorème 2.6.1 *Soient* $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H$*. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall t \in I : W(t) \neq 0.$
2. $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0.$
3. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants.*

Preuve 22

1. $1 \Longrightarrow 2)$*Evident car* $(\forall t : P(t)) \Longrightarrow (\exists t_0 : P(t_0)).$
2. $2 \Longrightarrow 3)W(t_0) \neq 0$ *implique que* $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ *sont linéairement indépendants. D'aprés l'exercice 4, on trouve que* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants.*
3. $3 \Longrightarrow 1)$*Puisque* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont des solutions de* (H) *et qui sont linéairement indépendants alors d'aprés l'exercice 4 on trouve que* $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ *sont L. I pour tout* $t \in I$*. Ceci implique que* $W(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in I$*.*

2.7 La résolvante et le système non homogène

Théorème 2.7.1 *Soient* $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$*. La solution du système* $(E.D.)$ *est donnée par*

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u) B(u) du.$$

Preuve 23 *Considérons la fonction définie sur* I *par* $Z(u) = R(t_0, u) Y(u)$*. Soit* $u \in I$*.*

On a

$$\begin{aligned} Z^{'}(u) &= \frac{d}{du}\left(R(t_0,u)\,Y(u)\right) = \frac{d}{du}\left(R(t_0,u)\right)Y(u) + R(t_0,u)\,Y^{'}(u) \\ &= \left(-R(t_0,u)\,A(u)\right)Y(u) + R(t_0,u)\left(A(t)\,Y(u) + B(u)\right) \\ &= R(t_0,u)\,B(u)\,. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall u \in I : Z^{'}(u) = R(t_0,u)\,B(u)\,.$$

Ce qui implique que

$$\forall t \in I : Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

Ainsi

$$\forall t \in I : R(t_0,t)\,Y(t) = R(t_0,t_0)\,Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

Alors

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t,t_0)\,I_n Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)\,R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.7.1 *Soient* $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. *La solution du système* $(H.D.)$ *est donnée par*

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0.$$

Preuve 24 *Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur* $B = 0$.

2.8 Exercices

Exercice 1

Soient $\begin{array}{c} A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}} \end{array}$ et $\begin{array}{c} B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$. On suppose que A et B sont continues sur I.

1. Montrer que toutes les solutions maximales de $Y' = A(t)Y + B(t)$ sont globales.
2. Montrer que, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le système

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{$E.D.$}$$

admet une solution globale unique.

Solution 1 Considérons la fonction f définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ par $f(t, Y) = A(t)Y + B(t)$. On peut voir que f est continue.

1. Soit $(t, Y) \in I \times \mathbb{R}^n$. On a $\|f(t, Y)\| = \|A(t)Y + B(t)\| \leq \|B(t)\| + \|A(t)\| \|Y\|$. Ainsi, ils existent deux fonctions continues $c, k : I \rightarrow R_+$ (Ici $c(t) = \|B(t)\|$ et $k(t) = \|A(t)\|$) telles que

$$\forall (t, Y) \in I \times \mathbb{R}^n : \|f(t, Y)\| \leq c(t) + k(t) \|Y\|.$$

Ceci implique, d'aprés le ch 1, que toute solution maximale de $Y' = f(t, Y)$ est globale.

2. Soient $t \in I$ et $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$. On a $\|f(t, Y_1) - f(t, Y_2)\| = \|A(t)(Y_1 - Y_2)\| \leq \|A(t)\| \|Y_1 - Y_2\|$. Ce qui implique que f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue (ici $k(t) = \|A(t)\|$). Alors, d'aprés le ch 1, le problème de Cauchy $(E.D.)$ admet une solution globale unique.

Exercice 2 *(Propriété algébrique (P. A.))*

Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer*

$$(\forall X \in \mathbb{R}^n, C_1X = C_2X) \Longrightarrow (C_1 = C_2).$$

Réponse 2 : On considère f_1 et f_2 les deux applications associées (resp) à C_1 et C_2. Alors

$$\begin{aligned}(\forall X \in \mathbb{R}^n, C_1X = C_2X) &\Longrightarrow (\forall X \in \mathbb{R}^n, f_1(X) = f_2(X)) \\ &\Longrightarrow (f_1 = f_2) \Longrightarrow (C_1 = C_2).\end{aligned}$$

Exercice 3

1. **Questions de cours :** Donner la définition de la matrice résolvante *(ou brièvement, résolvante)* du système (H). Quelle est la relation qui existe entre la résolvante de (H) et la solution du système $(H.D.)$.
2. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculer la résolvante du système $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$

Solution 3

1. Voir cours.
2. Soit $Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Le système $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \text{ et } y_1(t_0) = y_{10}. \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \text{ et } y_0(t_0) = y_{20}. \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ Avec $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$.

   Soient $Y(., t_0, Y_0)$ la solution de $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ et $(y_1(., t_0, y_{10}), y_2(., t_0, y_{20}))$ la solution de $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \text{ et } y_1(t_0) = y_{10}. \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \text{ et } y_0(t_0) = y_{20}. \end{cases}$. On peut montrer que $Y(t, t_0, Y_0) = (y_1(t, t_0, y_{10}), y_2(t, t_0, y_{20}))$. Mais, d'une part, $Y(t, t_0, Y_0) = R(t, t_0) Y_0$. D'autre part, on a $(y_1(t,t_0,y_{10}), y_2(t,t_0,y_{20})) = \left(e^{\lambda_1(t-t_0)}y_{10}, e^{\lambda_2(t-t_0)}y_{20}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} R(t,t_0)Y_0 &= \left(e^{\lambda_1(t-t_0)}y_{10}, e^{\lambda_2(t-t_0)}y_{20}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^2 : R(t,t_0)Y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix} Y_0.$$

D'aprés la propriété algébrique (P. A.), on trouve $R(t,t_0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. **Question de cours :** Soient $t_0 \in I$ et $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ des fonctions vectorielles définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Donner la définition de l'indépendance linéaire de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Puis, la définition de l'indépendance linéaire de $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$.

2. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ sont L. I alors $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I.

3. Montrer que si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I alors on ne peut rien dire sur l'indépendance linéaire de $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. (*Indication : Considérer* $n = 2, Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $t_0 = 2$ et $t_1 = 1$.)

   A retenir : Pour trouver k inconnues, il nous suffit k équations linéaires algébriques non équivalentes.

4. Est ce que Y_1 et Y_2 (données dans la question 4) peuvent être des solutions du même système de type $Y' = A(t)Y$.

5. Montrer que si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont des solutions d'un système $Y' = A(t)Y$ et qui

sont L. I. alors pour tout $t \in I$ on a $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ sont L. I..

Solution 4

1. Voir cours.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n = 0$ (fonction nulle) alors pour tout $t \in I$ on a

$$\alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) + ... + \alpha_n Y_n(t) = (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n)(t) = 0.$$

   Ainsi, pour $t = t_0$ on obtient $\alpha_1 Y_1(t_0) + \alpha_2 Y_2(t_0) + ... + \alpha_n Y_n(t_0) = 0$. Puisque $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ sont L. I. alors $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. C'est à dire, on a montré que

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n = 0) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0).$$

   Ce qui implique, par définition, que $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I.

3. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0$ alors

$$\forall t \in I = \mathbb{R} : \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) = 0.$$

   Ceci implique que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \alpha_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

   Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha_1 t + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 t = 0. \end{cases}$$

   On s'intérresse à trouver les valeurs des inconnues α_1 et α_2 : Il nous faut deux équations non équivalentes. Donc, on prend, par exemple, $t = 0$ on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ainsi, Y_1 et Y_2 sont L. I. Mais on a

(a) $Y_1(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont L. I. car $\det\begin{pmatrix} Y_1(2) & Y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

(b) $Y_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas L. I. (ils sont liés) car $Y_1(1) = Y_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I alors on ne peut rien dire sur l'indépendance linéaire de $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Par l'absurde, on suppose que Y_1 et Y_2 peuvent être des solutions du même système de type $Y' = A(t)Y$. Puisque $Y_1(1) = Y_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors Y_1 et Y_2 sont deux solutions du même problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$ D'aprés l'unicité de la solution de ce système, on trouve $Y_1 = Y_2$. Contradiction.

5. Soit $t \in I$. Pour ne pas confondre avec la variable t, on la note par t_0. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 Y_1(t_0) + \alpha_2 Y_2(t_0) + ... + \alpha_n Y_n(t_0) = 0$. Considérons la fonction Z définie par $Z = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n$. Soit $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} Z'(t) &= (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n)'(t) = \alpha_1 Y_1'(t) + \alpha_2 Y_2'(t) + ... + \alpha_n Y_n'(t) \\ &= \alpha_1 A(t) Y_1(t) + \alpha_2 A(t) Y_2(t) + ... + \alpha_n A(t) Y_n(t) \text{ Car } Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H \\ &= A(t)(\alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) + ... + \alpha_n Y_n(t)) \\ &= A(t) Z(t). \end{aligned}$$

Ainsi, Z est une solution de $Y' = A(t)Y$. D'autre part, on a $Z(t_0) = \alpha_1 Y_1(t_0) + \alpha_2 Y_2(t_0) + ... + \alpha_n Y_n(t_0) = 0$. C'est à dire $Z(t_0) = 0$. Ainsi Z est une solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = 0. \end{cases}$ Ceci implique d'aprés l'unicité de la solution de ce système que $Z = Y(t, t_0, 0) = R(t, t_0)\,0 = 0$. C'est à dire $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n = Z = 0$. Puisque $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I. alors $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. C'est à dire, on a montré que pour tout$t \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : (\alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) + ... + \alpha_n Y_n(t) = 0) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0).$$

Ceci implique que

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t) \text{ sont L. I.}$$

Exercice 5

1. **Questions de cours :** Donner la définition d'un système fondamental de solutions de (H). Quelle est la relation entre le système fondamental de (H) et l'ensemble S_H (Ensemble des solutions de (H)).
2. Considérons le système $\begin{cases} y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + e^t y_2), \\ y_2' = \frac{1}{2}(e^{-t} y_1 - y_2). \end{cases}$
   (a) Ecrire ce système sous la forme (H).
   (b) On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H).
   (c) Trouver l'ensemble S_H.

Solution 5

1. Voir cours.

2.a Le système $\begin{cases} y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + e^t y_2), \\ y_2' = \frac{1}{2}(e^{-t} y_1 - y_2). \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

2.b Pour montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H), on montre que Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (H) et qu'ils sont linéairement indépendants :

On a $Y_1'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(t)Y_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $Y_1'(t) = A(t)Y_1(t)$. Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H). De même, on montre que Y_2 est aussi une solution de (H). D'autre part, on a

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 1 & -e^{-t} \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système linéairement indépendant.

2.c On a

$$\begin{aligned}
S_H \quad : &= \{Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) / Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) / \forall t \in I : Y(t) = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) / \forall t \in I : Y(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) / \forall t \in I : Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^t + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 e^{-t} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 6

Considérons le système $Y' = A(t)Y......(H)$ où $A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$. Pout tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H).Question 1 : Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H).
2. En déduire la solution de (H).
3. Donner la matrice résolvante.

Solution 6

1. Il suffit de montrer que Y_1, Y_2 sont deux solutions de (H) et qu'ils sont linéairement indépendants ($W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) : On a

$$Y_1'(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \left(e^{\frac{t^2}{2}+t}\right)' \\ \left(-e^{\frac{t^2}{2}+t}\right)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)\, e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -(t+1)\, e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$$

et

$$A(t)\, Y_1(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)\, e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -(t+1)\, e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$$

alors $Y_1'(t) = A(t)\, Y_1(t)$. Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H). De même, on montre que Y_2 est aussi une solution de (H). D'autre part, on a

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} = -e^{t^2} \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système linéairement indépendant.

2. Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{t^2}{2}+t} + c_2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -c_1 e^{\frac{t^2}{2}+t} - c_2 2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. La matrice définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $M(t) = (Y_1(t)\, Y_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de (H). Ainsi la matrice résolvante de (H) est donnée par

$$R(t, t_0) = M(t)\, M^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ -e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculons $\begin{pmatrix} e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ -e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \end{pmatrix}^{-1}$: Appliquons le résultat suivant : Si $ad-cb \neq 0$ alors $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.) Pour trouver

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ -e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \end{pmatrix}^{-1} = -e^{-t_0^2} \begin{pmatrix} -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} & -e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= -e^{-t_0^2} \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} & -e^{\frac{t^{t_0 2}}{2}-t_0} \\ e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} - 2e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0} & e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ 2e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{\frac{-t_0^2}{2}-t_0} - 2e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} & e^{-\frac{t^2}{2}+t} e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} - 2e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 7

Considérons le système $Y' = A(t)\,Y$...... (H) où $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & \frac{-1}{t^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Questions 1, 2 et 3 comme l'exercice 6

Question 4 : En déduire la solution de $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y + B(t) \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$ où $B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution 7

La solution de ce système est donnée par

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t, t_0)\,Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u)\,B(u)\,du.$$

Calculons $R(t,t_0)$:

$$\begin{aligned} R(t,t_0) &= M(t)M^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t_0) & Y_2(t_0) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t_0 \\ t_0 & t_0^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-2}{t_0^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^2 & -t_0 \\ -t_0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+\frac{2t}{t_0} & \frac{1}{t_0}-\frac{t}{t_0^2} \\ -2t+\frac{2t^2}{t_0} & \frac{2t}{t_0}-\frac{t^2}{t_0^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Y(t) &= R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\,du \\ &= R(t,t_0)0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} -1+\frac{2t}{u} & \frac{1}{u}-\frac{t}{u^2} \\ -2t+\frac{2t^2}{u} & \frac{2t}{u}-\frac{t^2}{u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ 1 \end{pmatrix} du. \\ &= \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{u^2} \\ \frac{t^2}{u^2} \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} \frac{t}{u^2}du \\ \int_{t_0}^{t} \frac{t^2}{u^2}du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\int_{t_0}^{t} u^{-2}du \\ t^2\int_{t_0}^{t} u^{-2}du \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t\left(t^{-1}-t_0^{-1}\right) \\ -t^2\left(t^{-1}-t_0^{-1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t_0}-1 \\ \frac{t^2}{t_0}-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est à dire $Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{t_0}-1 \\ \frac{t^2}{t_0}-t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in I$.

Remarque : Si $t_0 \in \left]0,+\infty\right[$ on prend $I = \left]0,+\infty\right[$ et si $t_0 \in \left]-\infty,0\right[$ on prend $I = \left]-\infty,0\right[$.

Exercice 8

1. **Question de cours :** Citer les propriétés de la résolvante.

2. Montrer que $R(.,t_0)$ est une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du système

$$\begin{cases} M' = A(t)M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases} \qquad (S.R.)$$

3. Soit $D(., t_0)$ une solution du système $(S.R.)$. Montrer $D(t, t_0) = R(t, t_0)$ pour tout $t, t_0 \in I$.

4. *Application :* Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et Y_i la solution de $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = e_i. \end{cases}$

   Montrer que $R(t, t_0) = (Y_1(t)\,Y_2(t)\,...Y_n(t))$ pour tout $t \in I$.

Solution 8

1. Voir cours.

2. D'aprés les propriétés de la résolvante, on a $\begin{cases} \frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t)\,R(t, t_0), \\ R(t_0, t_0) = I_n. \end{cases}$ Alors $R(., t_0)$ est une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $(S.R.)$.

3. Puisque $R(., t_0)$ est aussi une solution de $(S.R.)$ alors on conclut par l'unicité de la solution du problème de Cauchy $(S.R.)$.

4. Soit $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} (Y_1(t)\,Y_2(t)\,...Y_n(t))' &= \left(Y_1'(t)\,Y_2'(t)\,...Y_n'(t)\right) = (A(t)\,Y_1(t)\,A(t)\,Y_2(t)\,...A(t)\,Y_n(t)) \\ &= A(t)\,(Y_1(t)\,Y_2(t)\,...Y_n(t)). \end{aligned}$$

   Donc $(Y_1Y_2...Y_n)$ est une solution de $M' = A(t)\,M$. D'autre part, on a

$$(Y_1Y_2...Y_n)(t_0) = (Y_1(t_0)\,Y_2(t_0)\,...Y_n(t_0)) = (e_1e_2...e_n) = I_n.$$

   Ainsi $(Y_1Y_2...Y_n)(t_0) = I_n$. On déduit que $(Y_1Y_2...Y_n)$ est une solution de $(S.R.)$.

Exercice 9

1. **Question de cours :** Donner la définition de la matrice fondamentale. Citez ces propriétés.

2. Soit M une matrice fondamentale du système (H).

   (a) Montrer que, pour tout $t \in I$, la matrice $M(t)$ est inversible. *Posons* $M^{-1}(t) := (M(t))^{-1}$.

(b) Soient $t_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction Z définie par $Z(t) = M(t) M^{-1}(t_0) Y_0$ pour tout $t \in I$. Montrer que Z est une solution du système $(H.D.)$. Puis, déduire la relation entre la résolvante et une matrice fondamentale.

3. Soient M_1 et M_2 deux matrices fondamentales de (H). Montrer qu'il existe une matrice constante et inversible C telle que $M_1 = M_2 C$. Que représente ce résultat.

4. Montrer que, pour tout $t, t_0 \in I$, on a $\det R(t, t_0) = \frac{W(t)}{W(t_0)}$. Ici W est le wronskien de la matrice fondamentale M.

Solution 9

1. Voir cours.

2.a Puisque M est une matrice fondamentale du système (H) alors $M = (Y_1 Y_2 ... Y_n)$ avec $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n solutions de (H) qui sont L. I. On a

$$\forall t \in I : \det M(t) := W(t) \neq 0.$$

Ainsi

$$\forall t \in I : \det M(t) \neq 0.$$

Ce qui implique que, pour tout $t \in I$, la matrice $M(t)$ est inversible.

2.b Soit $t \in I$. On a

$$\begin{aligned}
Z'(t) &= \left(M(t) M^{-1}(t_0) Y_0\right)' = M'(t) M^{-1}(t_0) Y_0 \\
&= A(t) M(t) M^{-1}(t_0) Y_0 \text{ car } M \text{ est une matrice fondamentale} \\
&= A(t) Z(t).
\end{aligned}$$

C'est à dire $Z'(t) = A(t) Z(t)$ pour tout $t \in I$. D'autre part, on a

$$Z(t_0) = M(t_0) M^{-1}(t_0) Y_0 = M(t_0) (M(t_0))^{-1} Y_0 = I_n Y_0 = Y_0.$$

C'est à dire $Z(t_0) = Y_0$. Ainsi Z est une solution du système $(H.D.)$.

La relation entre la résolvante et la matrice fondamentale : Puisque Z est une solution du système $(H.D.)$ alors $R(.,t_0)Y_0 = Z$. Ainsi

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I : R(t,t_0)Y_0 = M(t)M^{-1}(t_0)Y_0.$$

D'aprés (P. A.), on trouve

$$\forall t \in I : R(t,t_0) = M(t)M^{-1}(t_0).$$

3. Soit $t \in I$. Puisque M_1 et M_2 sont deux matrices fondamentales de (H) alors d'aprés la question précédente $R(t,t_0) = M_1(t)M_1^{-1}(t_0)$ et $R(t,t_0) = M_2(t)M_2^{-1}(t_0)$. Alors $M_1(t)M_1^{-1}(t_0) = M_2(t)M_2^{-1}(t_0)$. Ainsi $M_1(t) = M_2(t)M_2^{-1}(t_0)M_1(t_0)$. Posons $C = M_2^{-1}(t_0)M_1(t_0)$. On a
   (a) C est une matrice constante car elle ne dépend de la variable t.
   (b) C est une matrice inversible car c'est le produit de deux matrices inversibles : $M_1(t_0)$ est inversible (d'aprés la question 2a) et $M_2^{-1}(t_0) = (M_2(t_0))^{-1}$ est inversible car l'inverse d'une matrice inversible est une matrice inversible.C vérifie $M_1 = M_2C$.
4. Pour tout $t, t_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned}\det R(t,t_0) &= \det\left(M(t)M^{-1}(t_0)\right) = \det M(t)\det M^{-1}(t_0)\\ &= \det M(t)\frac{1}{\det M(t_0)} = \frac{\det M(t)}{\det M(t_0)} = \frac{W(t)}{W(t_0)}.\end{aligned}$$

Exercice 10 *(Méthode de réduction d'ordre)*

Partie I : Considérons le système

$$Y' = A(t)Y. \tag{H}$$

Soit X une solution (connue) de (H) telle que $x_1 \neq 0$. Soient ϕ une fonction scalaire et Z une fonction vectorielle non nulle telle que $z_1 = 0$ et $Z^{'} = AZ - \phi^{'} X$.

1. Montrer que les composantes de Z vérifient $z_i^{'} = \sum_{j=2}^{j=n} \left(a_{ij} - \frac{x_i}{x_1} a_{1j} \right) z_j$, pour tout $i = 2, ..., n$. Puis déduire que $\phi = \int \frac{1}{x_1} \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} z_j$.
2. On pose $Y = \phi X + Z$. Montrer que $\{X, Y\}$ est un système fondamental de (H).

Partie II : *Application* On prend $I =]0, +\infty[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ est une solution de

$$Y^{'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} Y. \tag{Sys}$$

2. Trouver une solution de (Sys) sous la forme $Y = \phi X + Z$ avec $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   Déduire la solution générale de (Sys).
3. Déterminer la solution générale du système : $\begin{cases} y_1^{'} = \frac{1}{t} y_1 - y_2 + t, \\ y_2^{'} = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 - t^2. \end{cases}$

Solution 10

Partie I :

1. On a $Z^{'} = AZ - \phi^{'} X$ alors $\left(Z^{'}\right)_i = \left(AZ - \phi^{'} X\right)_i$ donc

$$\begin{aligned} z_i^{'} &= (AZ)_i - \phi^{'} (X)_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} z_j - \phi^{'} x_i = a_{i1} z_1 + \sum_{j=2}^{j=n} a_{ij} z_j - \phi^{'} x_i \\ &= \sum_{j=2}^{j=n} a_{ij} z_j - \phi^{'} x_i \text{ car } z_1 = 0. \end{aligned}$$

C'est à dire
$$z_i' = \sum_{j=2}^{j=n} a_{ij} z_j - \phi' x_i.$$

Ainsi, pour $i = 1$ on obtient $0 = z_1' = \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} z_j - \phi' x_1$ alors $\phi' = \sum_{j=2}^{j=n} \frac{a_{1j}}{x_1} z_j$. Si on remplace dans l'identité précédente on trouve le résultat.

Pour ϕ : On a $\phi = \int \phi' = \int \sum_{j=2}^{j=n} \frac{a_{1j}}{x_1} z_j = \int \frac{1}{x_1} \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} z_j$.

2. Soit $t \in I$. On a

$$Y'(t) = (\phi X + Z)'(t) = \phi'(t) X(t) + \phi(t) X'(t) + Z'(t).$$

Puisque $X'(t) = A(t) X(t)$ (car X une solution de (H)) et $Z' = AZ - \phi' X$ alors

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \phi'(t) X(t) + \phi(t)(A(t) X(t)) + \Big(A(t) Z(t) - \phi'(t) X(t)\Big) \\ &= A(t)(\phi(t) X(t) + Z(t)) = A(t) Y(t). \end{aligned}$$

Ce qui implique que Y est une solution de (H).

Montrons que $\{X, Y\}$ *est L.I.* : Au début, on note que puisque Z est une fonction non nulle alors in existe $k \neq 1$ tel que $z_k \neq 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha X + \beta Y = 0$ alors $\alpha X + \beta(\phi X + Z) = 0$ ainsi $(\alpha + \beta\phi) X + \beta Z = 0$ ceci implique que

$$\begin{cases} (\alpha + \beta\phi) x_1 = (\alpha + \beta\phi) x_1 + \beta z_1 = ((\alpha + \beta\phi) X + \beta Z)_1 = 0. \\ (\alpha + \beta\phi) x_k + \beta z_k = ((\alpha + \beta\phi) X + \beta Z)_k = 0. \end{cases}$$

C'est à dire $\begin{cases} (\alpha + \beta\phi) x_1 = 0. \\ (\alpha + \beta\phi) x_k + \beta z_k = 0. \end{cases}$ Puisque $x_1 \neq 0$ alors $\alpha + \beta\phi = 0$. Remplaçons dans la deuxième équation pour trouver $\beta z_k = 0$ ainsi $\beta = 0$ car $z_k \neq 0$. Finalement, il est facile de voir que $\alpha = 0$.

Partie II : *Application*

1. Soit $t \in I$. On a $X^{'}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A(t)X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $X^{'}(t) = A(t)X(t)$ pour tout $t \in I$. Ce qui implique que X est une solution de (Sys).

2. On a vu dans la question 1 de la première partie que les composantes de Z vérifient $z_i^{'} = \sum_{j=2}^{j=n} \left(a_{ij} - \frac{x_i}{x_1} a_{1j}\right) z_j$, pour tout $i = 2, ..., n = 2$. Alors

$$\begin{aligned} z_2^{'}(t) &= \sum_{j=2}^{j=2} \left(a_{2j}(t) - \frac{x_2(t)}{x_1(t)} a_{1j}(t)\right) z_j(t) = \left(a_{22}(t) - \frac{x_2(t)}{x_1(t)} a_{12}(t)\right) z_2(t) \\ &= \left(\frac{2}{t} - \frac{-t}{t^2}(-1)\right) z_2(t) = \frac{1}{t} z_2(t). \end{aligned}$$

C'est à dire $z_2^{'}(t) = \frac{1}{t} z_2(t)$. Résolvons cette équation pour trouver $z_2(t) = Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$. Puisque on s'intérresse à une seule solution Y donc à une seule fonction non nulle Z on prend $C = 1$. C'est à dire $z_2(t) = t$. Ceci implique que $Z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Trouvons ϕ : On a

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int \frac{1}{x_1(t)} \sum_{j=2}^{j=n=2} a_{1j}(t) z_j(t)\, dt = \int \left(\frac{1}{x_1(t)} a_{12}(t) z_2(t)\right) dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t^2}(-1)(t)\right) dt = -\ln t + c. \end{aligned}$$

C'est à dire $\phi(t) = -\ln t$ avec $c = 0$. Ainsi $Y(t) = \phi(t)X(t) + Z(t) = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t \ln t + t \end{pmatrix}$.

Puisque $\{X, Y\}$ est un système fondamental alors la solution générale de (Sys) est définie par $Y_G = \alpha X + \beta Y = ...$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

1. Soient $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ un système fondamental de (H) et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des fonctions de $C^1(I, \mathbb{R})$.

   Montrer que si $\left(\lambda_i'(t)\right)_{i=1,n} = M^{-1}(t)\, B(t)$ pour tout $t \in I$ alors $Y = \lambda_1(t)\, Y_1 + ... + \lambda_n(t)\, Y_n$ est une solution du système non homogène $Y' = A(t)\, Y + B(t)$.

2. **Questions de cours :** Soient $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Donner la définition de la solution générale et de la solution particulière. Puis, donner la formule de la solution des systèmes suivants (en précisant le type de solution : générale ou bien particulière)
   $Y' = A(t)\, Y$, $\begin{cases} Y' = A(t)\, Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$, $Y' = A(t)\, Y + B(t)$ et $\begin{cases} Y' = A(t)\, Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

3. Considérons le système $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y.$

   (a) Montrer que $R(t, t_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^{t-t_0} & e^t - e^{t_0} \\ e^{-t_0} - e^{-t} & 1 + e^{t_0 - t} \end{pmatrix}$ pour tout $t, t_0 \in I = \mathbb{R}$.

   (b) Résoudre les systèmes $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y$ et $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

   (c) Utiliser deux méthodes pour résoudre les systèmes $\begin{cases} Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

   et $\begin{cases} Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Chapitre 3

Systèmes linéaires à coefficients constants

3.1 Méthode de l'exponentielle de matrice

3.1.1 L'exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\begin{cases} A^k = \underbrace{A...A}_{k \text{ fois}} \text{ si } k \in \mathbb{N}^*, \\ A^0 = I_n. \end{cases}$ Ici I_n représente la matrice identité.

Considérons la série définie comme suit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} = \lim_{l \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{1!} + ... + \frac{A^l}{l!} \right),$$

avec $\begin{cases} k! = 1.2...k \text{ si } k \in \mathbb{N}^*, \\ 0! = 0. \end{cases}$

Lemme 3.1.1 *La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.*

Preuve 25 *On a $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Mais $\frac{\|A\|^k}{k!}$ représente le terme général d'une série* *numérique convergente, alors* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *est normalement convergente. Donc, elle est convergente.*

Définition 3.1.1 *L'exponentielle de la matrice* A*, noté* e^A*, est la quantité* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$*. C. à dire* $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Exemple 17 *Calculons l'exponentielle de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *: Montrons, par récurrence, que pour tout* $k \geq 1$ *on a* $A^k = A$.

Pour $k = 1$*, on a* $A^1 = A$.

On suppose que $A^k = A$ *alors*

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

C. à dire, $A^{k+1} = A$.

Ainsi

$$\begin{aligned} e^A \quad : &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \frac{A^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=l} \frac{A}{k!} \\ &= I_n + \lim_{l \to +\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{k=l} \frac{1}{k!} \right) A \right) = I_n + \left(\lim_{l \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=l} \frac{1}{k!} \right) A \\ &= I_n + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) A = I_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} \right) A \\ &= I_n + \left(e^1 - 1 \right) A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est à dire, $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 3.1.1 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *On a* $e^{0_n} = I_n$. *Ici,* 0_n *représente la matrice nulle.*

2. *Si* A *et* B *commutent, c. à dire* $AB = BA$*, alors* $e^{A+B} = e^A e^B$.

3. e^A *est une matrice inversible et on a* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

4. *La fonction :* $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ *est dérivable et on a* $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve 26 1. *On a*

$$e^{0_n} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = \frac{0_n^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = I_n + 0_n = I_n.$$

2. *On a*

$$e^A e^B := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n,$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} A^p B^{n-p} \\ &\overset{AB=BA}{=} \frac{1}{n!}(A+B)^n \quad \textit{(Formule de binôme).} \end{aligned}$$

Donc

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = e^{A+B}.$$

3. *Puisque* $A(-A) = (-A)A$*, alors* A *et* $(-A)$ *commutent donc* $e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}$. *Mais* $e^{A+(-A)} = e^{0_n} = I_n$. *Alors* $e^A e^{-A} = I_n$. *Ce qui implique le résultat.*

4. *De la définition de* e^{tA}*, on trouve que la fonction :* $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\left(e^{tA}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(tA)^k}{k!}\right)' = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Si on pose $p = k-1$ *on trouve* $\left(e^{tA}\right)' = A \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p A^p}{p!} = Ae^{tA}$.

Remarque 3.1.1 *Il existent des matrices A et B tels que $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on utilise la définition de l'exponentielle, on peut montrer que $e^{A+B} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu dans l'exemple 17 que $e^A = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, on a $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $e^{A+B} \neq e^A e^B$.*

Lemme 3.1.2 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.*

Preuve 27 *On a $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k}{k!}$. Mais on peut montrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Alors

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}}{k!} = \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{l \to +\infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 18 *On a* $e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

Exemple 19 *On a*

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On a $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $e^{\lambda I_n + A} = e^\lambda e^A$.*

Preuve 28 1. *On a $e^{PAP^{-1}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(PAP^{-1}\right)^k}{k!}$. Par récurrence, on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\left(PAP^{-1}\right)^k = PA^kP^{-1}$. Ceci implique que*

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} \quad : &= \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = \lim_{l\to+\infty} \left[P\left(\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}\right] \\ &= P\left[\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A^k}{k!}\right]P^{-1} = Pe^AP^{-1}. \end{aligned}$$

2. *Puisque $(\lambda I_n) A = A(\lambda I_n)$, alors (λI_n) et A commutent donc $e^{\lambda I_n + A} = e^{\lambda I_n}e^A$. Mais*

$$\begin{aligned} e^{\lambda I_n} &= e^{\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^\lambda\end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= e^\lambda I_n. \end{aligned}$$

Ainsi $e^{\lambda I_n + A} = \left(e^\lambda I_n\right)e^A = e^\lambda\left(I_ne^A\right) = e^\lambda e^A$.

Application 1 : Calculons l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$: On a $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = 0$ implique que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les deux valeurs propres distinctes de A. Alors, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$. Ici V_1 et V_2 sont les vecteurs propres de A associés respectivement à

λ_1 et λ_2. On a $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$. Alors, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Rappelons que si* $ad-cb \neq 0$ *alors* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'inverse de P est donné par $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} e^A &= e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1}+e & e^{-1}-e \\ e^{-1}-e & e^{-1}+e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Application 2 : Calculons l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: On a

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = e^{2I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = e^2 e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

D'aprés l'application ci-dessus

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}e^2\begin{pmatrix} e^{-1}+e & e^{-1}-e \\ e^{-1}-e & e^{-1}+e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^3 & e-e^3 \\ e-e^3 & e+e^3 \end{pmatrix}.$$

Test : *Calculer l'exponentielle des matrices* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.2 *Soit* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* N *est une matrice nilpotente d'indice* $m \in \mathbb{N}^*$ *si* $N^{m-1} \neq 0_n$ *et* $N^m = 0_n$.

Exemple 20 *La matrice* $N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente d'indice* $m = 3$ *car* $N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \neq 0_3$ *et* $N^3 = N^2N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^3 = 0_3$.

Remarque 3.1.2 *Toute matrice, triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls, est nilpotente. Par exemple, la matrice* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls .*

Théorème 3.1.3 *Soit* N *une matrice nilpotente d'indice* $m \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$e^N = I_n + \frac{N}{1!} + ... + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Preuve 29 *On a*

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + \frac{N}{1!} + ... + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

Mais N *est une matrice nilpotente d'indice* m *alors pour tout* $k \geq m : N^k = 0_n$. *En effet, on a*

$$k \geq m \Longrightarrow N^k = N^{(k-m)+m} = N^{k-m}N^m = N^{k-m}0_n = 0_n.$$

Donc, $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = 0_n$. *Si on remplace on trouve le résultat.*

Application : On a vu dans la remarque 3.1.2 que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. *Trouvons son indice m* : On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$, alors $m = 2$ donc

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_n + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test : *Calculer* $e^{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3.1.2 La résolvante en terme de l'exponentielle de matrice

Considérons le système

$$Y' = A(t)\,Y. \tag{H}$$

Théorème 3.1.4 *Si*

$$\forall t, s \in I : A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t),$$

alors

$$\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}.$$

Preuve 30 *Il suffit de montrer que la fonction* $t \longmapsto e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$ *est une solution du système*

$$\begin{cases} M' = A(t)\,M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases} \tag{S.R.}$$

Application : Considérons la matrice

$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix}.$$

Soient $t, s \in I = \mathbb{R}$. On a

$$A(t)\,A(s) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st - s^2t^2 & -s^2t - st^2 \\ st^2 + s^2t & st - s^2t^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A(s)\,A(t) = \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st - s^2t^2 & -s^2t - st^2 \\ st^2 + s^2t & st - s^2t^2 \end{pmatrix},$$

Ce qui implique que $A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t)$. C'est dire, on a montré que

$$\forall t, s \in I : A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t).$$

Ainsi

$$\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(u)du}.$$

Calculons $e^{\int_{t_0}^t A(u)du}$: On a

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^t A(u)du} &= e^{\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ u^2 & u \end{pmatrix} du} = e^{\begin{pmatrix} \int_{t_0}^t udu & -\int_{t_0}^t u^2du \\ \int_{t_0}^t u^2du & \int_{t_0}^t udu \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \end{pmatrix}} = e^{\frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)} e^{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose $a = \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \in \mathbb{R}$. On peut montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$

A faire la suite. *Même si les valeurs propre sont complexes différentes on peut utiliser la décomposition* PDP^{-1}.

Remarque 3.1.3 *Il existent des matrices* $A(t)$ *tel que* $R(t, t_0) \neq e^{\int_{t_0}^t A(u)du}$. *Par exemple,* *si on considère la matrice définie comme suit*

$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du} &= e^{\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} 1 & e^u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}du} = e^{\begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} du & \int_{t_0}^{t} e^u du \\ \int_{t_0}^{t} 0du & \int_{t_0}^{t} 0du \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Pour $t \neq t_0$, *on a* $\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-t_0 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} e^{t_0} - e^t & 1 \\ t-t_0 & 0 \end{pmatrix}$ *alors*

$$e^{\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1} = ...$$

Calculons $R(t, t_0)$: *Si on pose* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *alors le système* $Y' = A(t)Y$ *avec* $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est équivalent à* $\left\{ \begin{array}{c} y_1' = y_1 + e^t y_2, \\ y_2' = 0. \end{array} \right.$ *On a* $y_2' = 0$ *implique que* $y_2 = \alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si on remplace dans la deuxième équation, on trouve* $y_1' = y_1 + \alpha e^t$. *Cette dernière équation est sous la forme* $y_1' + a(t)y_1 = b(t)$ *avec* $a(t) = 1$ *et* $b(t) = \alpha e^t$. *Elle admet comme solution générale* $y_1 = \beta e^t + \alpha t e^t$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Ainsi, la solution générale de*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y \ \ est$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^t + \alpha t e^t \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Trouvons $Y(t, t_0, Y_0)$: *On a* $Y(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. *Donc*

$$\begin{aligned} (Y(t_0) = Y_0) &\Longrightarrow \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = Y_0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} Y_0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-t_0} & -t_0 \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} Y(t, t_0, Y_0) &= \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-t_0} & -t_0 \end{pmatrix} Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R} : Y(t, t_0, Y_0) = R(t, t_0) Y_0,$$

alors $R(t, t_0) Y_0 = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0$, *ainsi* $R(t, t_0) = \begin{pmatrix} 2e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & -t_0 \end{pmatrix}$.

Lemme 3.1.3 *Si pour tout* $t \in I$ *on a* $A(t) = A$ *alors* $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

Preuve 31 *Soient* $t, s \in I = \mathbb{R}$. *On a* $A(t) A(s) = AA = A^2$ *et* $A(s) A(t) = AA = A^2$, *alors*

$$\forall t, s \in I = \mathbb{R} : A(t) A(s) = A(s) A(t).$$

Appliquons le théorème 3.1.4 pour trouver

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(u)du} = e^{\int_{t_0}^t A du} = e^{A \int_{t_0}^t du} = e^{(t-t_0)A}.$$

Exemple 21 *La résolvante du système* $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ *est*

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2(t-t_0) & 0 \\ 0 & t-t_0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Systèmes homogènes

Lemme 3.1.4 *La solution du système*

$$Y' = AY. \tag{Hcons}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{tA} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve 32 *Puisque* $I = \mathbb{R}$ *alors* $0 \in I$. *Donc, d'aprés le chapitre 2, la solution de (Hcons) est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = R(t, 0) C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Mais, d'aprés le lemme 3.1.3, on a $R(t, 0) = e^{(t-0)A} = e^{tA}$. *En remplaçant dans (3.1) pour trouver le résultat.*

Exemple 22 *La solution du système* $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y$ *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{tA}C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2,$$

avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. *C. à dire* $Y(t) = e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} C$. *Mais*

$$e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 4t & 3t \\ 0 & 4t \end{pmatrix}} = e^{4tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

On peut facilement montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente d'indice* $m = 2$ *alors*

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{4t}\left(I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} \right) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

Lemme 3.1.5 *La solution du système*

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{H. D.cons}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0.$$

Preuve 33 *Il suffit de remarquer, d'aprés le chapitre 2, que la solution de (H. D.cons)* *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = R(t, t_0) Y_0, \tag{3.2}$$

et puisque la matrice A est constante alors d'aprés le lemme 3.1.3 $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. *En remplaçant dans (3.2), on trouve le résultat.*

Exemple 23 *La solution du système* $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$ *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$ *et* $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *C. à dire* $Y(t) = e^{(t-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais, on peut montrer que $e^{(t-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix}$. *Ce qui implique* $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Test : Résoudre le sytème $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

3.1.4 Systèmes non homogène

Théorème 3.1.5 *La solution du système*

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{E.D. cons}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\, du.$$

Preuve 34 *Il suffit de remarquer, d'aprés le chapitre 2, que la solution du (E. D. con) est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = R(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u) B(u)\, du. \tag{3.3}$$

Mais la matrice du système est constante alors $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$ *et* $R(t, u) = e^{(t-u)A}$. *Si on remplace dans (3.3) on trouve le résultat.*

Test : Résoudre le système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Question : Résoudre le système $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Méthode spectrale

Soit A une matrice à coefficients constants. Considérons le système

$$Y' = AY. \tag{Hcons}$$

Lemme 3.2.1 *Si* λ *est une valeur propre réelle de* A *et* V *le vecteur propre associé. Alors la fonction définie sur* $I = \mathbb{R}$ *par* $Y(t) = Ve^{\lambda t}$ *est une solution de* (H).

Preuve 35 *Signalons, au début, que λ est une valeur propre réelle de A et V le vecteur propre associé alors $AV = \lambda V$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} Y^{'}(t) &= \left(Ve^{\lambda t}\right)^{'} = V\left(e^{\lambda t}\right)^{'} = V\left(\lambda e^{\lambda t}\right) = \lambda\left(Ve^{\lambda t}\right) \\ &= (\lambda V)\, e^{\lambda t} = (AV)\, e^{\lambda t} = A\left(Ve^{\lambda t}\right) = AY(t). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $Y^{'}(t) = AY(t)$. Ceci implique que Y est une solution de (H).

Définition 3.2.1 *La solution Y donnée dans le lemme précédent est appellée la solution associée à la valeur propre réelle λ.*

Théorème 3.2.1 *Si A admet n vecteurs propres linéairement indépendant $V_1, V_2, ..., V_n$ associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors la solution générale de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par*

$$Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t} \text{ avec } c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}.$$

Preuve 36 *On pose pour tout $t \in \mathbb{R} : Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}, ...$et $Y_n(t) = V_n e^{\lambda_n t}$. Pour montrer le résultat du théorème, il suffit de montrer que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système fondamental de (H) :*

D'aprés le lemme précédent, $Y_1, ..., Y_n$ sont des solutions de (H). D'autre part, on a

$$W(0) = \det(Y_1(0), ..., Y_n(0)) = \det(V_1, ..., V_n) \neq 0 \text{ car } V_1, V_2, ..., V_n \text{ L. I.}$$

Donc

$$\exists t_0 = 0 \in \mathbb{R} : W(0) \neq 0.$$

Ce qui implique que $Y_1, ..., Y_n$ sont L. I.

Corollaire 3.2.1 *Si A admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors la* *solution générale de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par*

$$Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t} \text{ avec } c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}.$$

Ici, $V_1, V_2, ..., V_n$ sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Preuve 37 *Puisque A admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors les vecteurs propres associés sont linéairement indépendants. Ainsi on conclut en utilisant le théorème précédent.*

Exemple 24 $Y' = AY$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *(Correction : Voir Exercice 3 question 1 (Rattrapage 2011-2012)).*

Lemme 3.2.2 *Si $\lambda = \mu + i\nu$ $(\nu \neq 0)$ est une valeur propre complexe de A et $V = a + ib$ le vecteur propre associé. Alors les deux fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par $Y_1(t) = \mathrm{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right) = e^{\mu t}(a\cos\nu t - b\sin\nu t)$ et $Y_2(t) = \mathrm{Im}\left(Ve^{\lambda t}\right) = e^{\mu t}(a\sin\nu t + b\cos\nu t)$ sont des solutions de (H) qui sont linéairement indépendants.*

Preuve 38 *Montrons que Y_1 et Y_2 sont des solutions de (H) : Soit $t \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} Y_1'(t) &= \left(\mathrm{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right)\right)' = \mathrm{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right)' = \mathrm{Re}\left((\lambda V) e^{\lambda t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((AV) e^{\lambda t}\right) = A\,\mathrm{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right) = AY_1(t). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $Y_1'(t) = AY_1(t)$. Ceci implique que Y_1 est une solution de (H). De même pour Y_2.

Montrons que Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendants : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) = 0$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} : \alpha(a\cos\nu t - b\sin\nu t) + \beta(a\sin\nu t + b\cos\nu t) = 0.$$

Pour $t = 0$ *puis pour* $t = \frac{\overline{\lambda}}{2\nu}$ *on trouve* $\begin{cases} \alpha a + \beta b = 0 \\ \beta a - \alpha b = 0 \end{cases}$ *Puisque* $\nu \neq 0$ *alors* $b \neq 0$ *donc il existe* $k = \overline{1, n}$ *tel que* $b_k \neq 0$ *ce qui implique de la première équation que* $\beta = -\frac{\alpha a_k}{b_k}$. *Si on remplace dans la deuxième équation on trouve* $-\frac{\alpha a_k^2}{b_k} - \alpha b_k = 0$ *c'est à dire* $-\alpha \frac{a_k^2 + b_k^2}{b_k} = 0$ *donc* $\alpha = 0$. *Ainsi,* $\beta = -\frac{\alpha a_k}{b_k} = 0$.

Définition 3.2.2 *Les solutions* Y_1 *et* Y_2 *données dans le lemme précédent sont appellées les solutions associées à la valeur propre comlexe* $\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu$.

Lemme 3.2.3

1. *Si* $\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu$ $(\nu \neq 0)$ *est une valeur propre complexe de* A *alors* $\overline{\lambda} = \mu - \mathrm{i}\nu$ *est aussi une valeur propre complexe de* A.
2. *Les solutions associées à* $\overline{\lambda}$ *sont, à une constante prés, les solutions associée à* λ.

Preuve 39

1. *Soit* V *un vecteur propre associé à* λ *et* $\overline{V}$ *son conjugué. Puisque* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *alors* $A\overline{V} = \overline{AV} = \overline{\lambda V} = \overline{\lambda}\ \ \overline{V}$. *Ainsi,* $\overline{\lambda}$ *est une valeurs propre de* A.
2. *Soient* Y_1, Y_2 *les solutions associées à* $\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu$ *et* Z_1, Z_2 *les solutions associées à* $\overline{\lambda} = \overline{\mu} + \mathrm{i}\overline{\nu}$ *(*$\overline{\mu} = \mu$ *et* $\overline{\nu} = -\nu$*). On a vu que si* $V = a + \mathrm{i}b$ *est un vecteur propre associé à* λ *alors* $\overline{V} = \overline{a} + \mathrm{i}\overline{b}$ *(*$\overline{a} = a$ *et* $\overline{b} = -b$*) est un vecteur propre associé à* $\overline{\lambda}$. *On a*

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= \operatorname{Re}\left(\overline{V} e^{\overline{\lambda} t}\right) = e^{\overline{\mu} t}\left(\overline{a} \cos \overline{\nu} t - \overline{b} \sin \overline{\nu} t\right) \\ &= e^{\mu t}\left(a \cos(-\nu) t - (-b) \sin(-\nu) t\right) \\ &= e^{\mu t}\left(a \cos \nu t - b \sin(\nu) t\right) = Y_1(t). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 *On suppose que* A *admet* $2p = n$ *valeurs propres complexes distinctes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1} = \overline{\lambda_1}, \lambda_{p+2} = \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_{2p} = \overline{\lambda_p}$. *Pour* $i = 1, \ldots, p$, *on considère* Y_1^i *et* Y_2^i, *les deux solutions linérairement indépendantes associées à la valeur propre complexe* λ_i, *définies par* $Y_1^i(t) = \operatorname{Re}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$ *et* $Y_2^i(t) = \operatorname{Im}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$. *Alors la solution générale de* (H) *est donnée, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *par* $Y(t) = \sum_{i=1}^{i=p} c_1^i Y_1^i(t) + \sum_{i=1}^{i=p} c_2^i Y_2^i(t)$, *avec* $c_1^i, c_2^i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$.

Exemple 25 $Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$. *(Correction : Voir Exercice 1 question 1 (Contrôle finale I : 2011-2012)). Ici* $p = 1$.

3.3 Exercices

Exercice 1 (Matrices qui commutent)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si A et B commutent alors A et e^{tB} commutent aussi.
2. *Application :* Que peut on dire sur A et e^{tA}.

Solution 1

1. On a

$$Ae^{tB} = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!} = A \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{t^k B^k}{k!} = \lim_{l\to+\infty} A\left(\sum_{k=0}^{k=l} \frac{t^k B^k}{k!}\right) = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{t^k AB^k}{k!}.$$

Puisque A et B commutent c'est à dire $AB = BA$ alors on peut montrer par récurrence que pour tout $k \geq 0$ on a $AB^k = B^k A$. Ainsi

$$Ae^{tB} = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{t^k B^k A}{k!} = \lim_{l\to+\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{k=l} \frac{(tB)^k}{k!}\right) A\right] = \left(\lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{(tB)^k}{k!}\right) A = e^{tB}A.$$

C'est à dire, $Ae^{tB} = e^{tB}A$. Ceci implique que A et e^{tB} commutent.

2. On applique la première question sur $B = A$: Puisque A et A commutent $(AA = AA)$ alors A et e^{tA} commutent aussi. C'est à dire, $Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Exercice 2

1. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $trB = 0$. Montrer que $B^2 = -(\det B) I_2$ puis déduire qu'ils existent deux fonctions α et β telles que $e^{tB} = \alpha(t) I_2 + \beta(t) B$ pout tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $B = A - \frac{1}{2}(trA) I_2$. Montrer que $trB = 0$ puis calculer e^{tA} avec $t \in \mathbb{R}$.

Solution 2

1. Puisque $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $trB = 0$ alors $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}$ avec $a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$. On a

$$B^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

et

$$-(\det B) I_2 = -\left(-a_{11}^2 - a_{21}a_{12}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + a_{21}a_{12} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $B^2 = -(\det B) I_2$.

Montrons qu'ils existent deux fonctions α et β telles que $e^{tB} = \alpha(t) I_2 + \beta(t) B$ pout tout $t \in \mathbb{R}$: On peut montrer, par récurrence, que pour tout $k \geq 0$ on a $B^{2k} = (-1)^k (\det B)^k I_2$ et $B^{2k+1} = (-1)^k (\det B)^k B$. Ainsi

$$\begin{aligned} e^{tB} \quad : &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tB)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tB)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tB)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}B^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}\left[(-1)^k (\det B)^k I_2\right]}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}\left[(-1)^k (\det B)^k B\right]}{(2k+1)!} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} (\det B)^k}{(2k)!}\right] I_2 + \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} (\det B)^k}{(2k+1)!}\right] B = \alpha(t) I_2 + \beta(t) B, \end{aligned}$$

Avec $\alpha(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} (\det B)^k}{(2k)!}$ et $\beta(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} (\det B)^k}{(2k+1)!}$.

2. On a

$$trB = tr\left(A - \frac{1}{2}(trA) I_2\right) = trA - \frac{1}{2}(trA)\, tr(I_2) = 0.$$

On a $e^{tB}=e^{t\left(A-\frac{1}{2}(trA)I_2\right)}=e^{tA}e^{-\frac{t}{2}(trA)I_2}$ car tA et $-\frac{t}{2}(trA)\,I_2$ commutent. Ce qui implique que

$$e^{tA}=e^{tB}\left(e^{-\frac{t}{2}(trA)I_2}\right)^{-1}=e^{tB}e^{\frac{t}{2}(trA)I_2}=e^{tB}e^{\frac{t}{2}(trA)}\overset{(q1)}{=}e^{\frac{t}{2}(trA)}\left(\alpha(t)\,I_2+\beta(t)\,B\right).$$

Exercice 3

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit leurs commutateur $[A,B]=AB-BA$.

1. Montrer que si $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice qui commute avec A alors pour tout t les matrices C et e^{tA} commutent.
2. Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(t)=e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}$.

   Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $f'(t)=e^{tA}\left(A-e^{tB}Ae^{-tB}\right)e^{-tA}f(t)$.
3. Supposons que A et B commutent avec $[A,B]$.

   (a) En dérivant la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(t)=A-e^{tB}Ae^{-tB}$, montrer que $A-e^{tB}Ae^{-tB}=t[A,B]$.

   Vérifier que f satisfait $f'(t)=t[A,B]f(t)$ pout tout $t\in\mathbb{R}$ puis déduire que $f(t)=e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}$ pout tout $t\in\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $e^{A+B}=e^Ae^Be^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

Solution 3

1. On a $Ce^{tA}=C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(tA)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kCA^k}{k!}$. Puisque $CA=AC$ alors on peut montrer, par récurrence, que pour tout $k\geq 0$ on a $CA^k=A^kC$. Ainsi $Ce^{tA}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kA^kC}{k!}=\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(tA)^k}{k!}\right]C=e^{tA}C$.
2. Soit $t\in\mathbb{R}$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \left(e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}\right)'=\left(e^{tA}\right)'e^{tB}e^{-t(A+B)}+e^{tA}\left(e^{tB}e^{-t(A+B)}\right)'\\
&= Ae^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}+e^{tA}\left(e^{tB}\right)'e^{-t(A+B)}+e^{tA}e^{tB}\left(e^{-t(A+B)}\right)'\\
&= Ae^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}+e^{tA}Be^{tB}e^{-t(A+B)}-e^{tA}e^{tB}(A+B)\,e^{-t(A+B)}\\
&= e^{tA}\left(Ae^{tB}+Be^{tB}-e^{tB}(A+B)\right)e^{-t(A+B)}.
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisé que $Ae^{tA} = e^{tA}A$ car $C = A$ commute avec A (voir question 1).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
e^{tA}\left(A - e^{tB}Ae^{-tB}\right)e^{-tA}f(t) &= e^{tA}\left(A - e^{tB}Ae^{-tB}\right)\underbrace{e^{-tA}e^{tA}}_{=I_n}e^{tB}e^{-t(A+B)} \\
&= e^{tA}\left(Ae^{tB} - e^{tB}Ae^{-tB}e^{tB}\right)e^{-t(A+B)} \\
&= e^{tA}\left(Ae^{tB} - e^{tB}A\right)e^{-t(A+B)} \\
&= e^{tA}\left(Ae^{tB} + e^{tB}B - e^{tB}(A+B)\right)e^{-t(A+B)} \\
&= e^{tA}\left(Ae^{tB} + Be^{tB} - e^{tB}(A+B)\right)e^{-t(A+B)}.
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisé que $Be^{tB} = e^{tB}B$.

3.a On a

$$g'(t) = -Be^{tB}Ae^{-tB} + e^{tB}ABe^{-tB} = e^{tB}ABe^{-tB} - e^{tB}BAe^{-tB} = e^{tB}[A,B]e^{-tB}.$$

Puisque B commute avec $[A,B]$ alors $e^{tB}[A,B] = [A,B]e^{tB}$. Ainsi,

$$g'(t) = [A,B]e^{tB}e^{-tB} = [A,B].$$

Ce qui implique que

$$g(t) = t[A,B].$$

Car la fonction g et la fonction définie par $t[A,B]$ sont deux solutions du même problème de Cauchy $\begin{cases} M' = [A,B], \\ M(0) = 0. \end{cases}$ Ce problème admet une solution unique.

Vérifions que $f'(t) = t[A,B]f(t)$ pout tout $t \in \mathbb{R}$: On a

$$\begin{aligned}
f'(t) \overset{(q2)}{=} e^{tA}\left(A - e^{tB}Ae^{-tB}\right)e^{-tA}f(t) &= e^{tA}g(t)e^{-tA}f(t) \\
&\overset{(3.a)}{=} te^{tA}[A,B]e^{-tA}f(t).
\end{aligned}$$

Mais A commute avec $[A,B]$ alors $e^{tA}[A,B] = [A,B]e^{tA}$. Ainsi $f'(t) = t[A,B]f(t)$.

Déduire que $f(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}$ *pout tout* $t \in \mathbb{R}$: Il suffit de voir que $f'(t) = t[A,B]f(t)$ pout tout $t \in \mathbb{R}$.

3.b On a $f(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}$ alors $e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)} = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}$. Ainsi $e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} = I_n$. Mais $-t(A+B)$ et $-\frac{t^2}{2}[A,B]$ commutent alors

$$e^{-t(A+B)}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} = e^{-t(A+B)-\frac{t^2}{2}[A,B]} = e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]-t(A+B)} = e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}e^{-t(A+B)}.$$

Ainsi, $e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}e^{-t(A+B)} = I_n$. Ceci implique que $e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} = e^{t(A+B)}$. Pour $t = 1$, on trouve $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

Exercice 4 (Exponentielle d'une matrice diagonale par bloc)

1. Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer que

$$e^{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix}.$$

2. *Application :* Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution 4

1. On a

$$e^{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^k}{k!} = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{l\to+\infty}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{k=l}\frac{A_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{k=l}\frac{A_2^k}{k!}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim\limits_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \lim\limits_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{A_2^k}{k!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale par blocs avec $A_1 = (2)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$
e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{A_2}\end{pmatrix}. \tag{3.4}
$$

Calculons e^{A_2} : On a $\det(A_2 - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ implique que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de A_2 donc $A_2 = PDP^{-1}$. Ici $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que les vecteurs vecteurs propres de A_2 associés respectivement à λ_1, λ_2 sont $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - cb = 1 \neq 0$. On a $P^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$
\begin{aligned}
e^{A_2} &= e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 3(e^2-e) \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si on remplace dans (3.4) on trouve

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 3\left(e^2 - e\right) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

En utilisant l'approche spectrale déterminer un système fondamental du

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

Déduire sa solution générale.

Exercice 6

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + e^{-t}. \end{cases} \tag{E}$$

1. Ecrire (E) sous forme matricielle $Y' = AY + B(t)$. Calculer e^{tA}.
2. Déterminer la solution générale du système homogène associé puis celle du système (E).

Exercice 7 (Résolution des systèmes à coefficients constants)

1. En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système $Y' = A_1 Y + B_1(t)$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. En utilisant la méthode spectrale sur le système homogène, résoudre le système

$$Y' = A_2 Y + B_2(t) \text{ avec } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 7

1. La solution générale du système $Y' = A_1 Y + B_1(t)$ est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé $Y' = A_1 Y$ et Y_p est une solution particulière du système considéré.

   Calculons Y_H : En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice, on a

   $$\forall t \in \mathbb{R} : Y_H(t) = e^{tA_1} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n.$$

   Mais

   $$e^{tA_1} = e^{t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^t e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

   La matrice $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est une matrice nilpotente. Un simple calcul montre que $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$. Donc

   $$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Alors $e^{tA_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$. Ainsi

   $$\forall t \in \mathbb{R} : Y_H(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n.$$

Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme

$$Y_p(t) = e^{tA_1} C(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

avec $C'(t) = e^{-tA_1} B_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Calculons e^{-tA_1} : Puisque $e^{tA_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $e^{-tA_1} = e^{(-t)A_1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Ainsi $C'(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, ceci implique que

$$C(t) = \int C'(t)\, dt = \begin{pmatrix} \int e^{-t} dt \\ \int 0 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Puisque on s'intéresse à une solution particulière on considère une seule fonction C, pour cela, on prend par exemple $c_1 = c_2 = 0$. Ainsi, $C(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci implique que $Y_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = Y_H(t) + Y_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $C \in \mathbb{R}^n$.

2. La solution générale du système $Y' = A_2 Y + B_2(t)$ est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé $Y' = A_2 Y$ et Y_p est une solution particulière du système considéré.

   Calculons Y_H : On a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$ sont les trois valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3. Donc

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 V_3 e^{\lambda_3 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} e^{4t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ 2c_2 e^{2t} \\ 4c_3 e^{4t} \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme $Y_p(t) = c_1(t) V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(t) V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3(t) V_3 e^{\lambda_3 t}$, avec $\begin{pmatrix} c_1^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} & V_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}^{-1} B(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{pmatrix} c_1^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{4t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rappelons que si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} c_1^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $c_1^{'}(t) = c_3^{'}(t) = 0$ et $c_2^{'}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$. Ainsi, on prend $c_1(t) = c_1(t) = 0$ et $c_2(t) = \frac{-1}{4}e^{-2t}$. Ceci implique que

$$Y_H(t) = \frac{-1}{4}e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$Y(t) = Y_H(t) + Y_p(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t \\ 2c_2e^{2t} \\ 4c_3e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t \\ 2c_2e^{2t} - \frac{1}{2} \\ 4c_3e^{4t} \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} y_1^{'} = y_2, \\ y_2^{'} = 2y_1 - y_2 + e^{-t}, \\ y_1(t_0) = y_1^0, y_2(t_0) = y_2^0. \end{cases} \quad Y^{'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Y^{'} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \text{ et } Y^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Fiche : Résolution des systèmes linéaires à coefficients variables

1. **Résolution de**
$$Y^{'} = A(t)\,Y. \tag{H}$$
   (a) *Méthode 1 :* Si $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est un système fondamental alors la solution générale de (H) est $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + ... + c_nY_n$ avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

   (b) *Méthode 2 :* Si M est une matrice fondamentale alors la solution générale de (H) est définie, pour tout $t \in I$, par $Y(t) = M(t)\,C$ avec $C \in \mathbb{R}^n$.

   (c) *Méthode 3 :* Si $0 \in I$ alors $t \longmapsto R(t, 0)$ est une matrice fondamentale (Voir Interrogation 2012/2013 Question 3). Ainsi, la solution générale de (H) est définie, pour tout $t \in I$, par $Y(t) = R(t, 0)\,C$ avec $C \in \mathbb{R}^n$.

2. **Résolution de**
$$Y^{'} = A(t)\,Y + B(t)\,. \tag{E}$$
   La solution générale de (E) est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale de (H) et Y_p est une solution de (E).

   (a) Pour calculer Y_H, on utilise (1).

   (b) Pour calculer Y_p, on utilise la méthode de la variation de la constante *(On varie les constantes dans Y_H) :*

      i. Si $Y_H = c_1Y_1 + c_2Y_2 + ... + c_nY_n$,alors $Y_p(t) = c_1(t)\,Y_1(t) + c_2(t)\,Y_2(t) + ... + c_n(t)\,Y_n(t)$ pour tout $t \in I$, avec $\begin{pmatrix} c_1^{'}(t) \\ \vdots \\ c_n^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \end{pmatrix}^{-1} B(t)$ pour tout $t \in I$.

      ii. Si $Y_H(t) = M(t)\,C$ pour tout $t \in I$, alors $Y_p(t) = M(t)\,C(t)$ pour tout $t \in I$, avec $C^{'}(t) = M^{-1}(t)\,B(t)$ pour tout $t \in I$.

iii. Si $Y_H(t) = R(t,0)C$ pour tout $t \in I$, alors $Y_p(t) = R(t,0)C(t)$ pour tout $t \in I$, avec $C'(t) = R(0,t)B(t)$ pour tout $t \in I$.

3. **Résolution de**
$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{H.D.}$$

   (a) *Méthode 1 :* La solution de $(H.D.)$ est donnée par $Y(t) = R(t,t_0)Y_0$ pour tout $t \in I$.

   (b) *Méthode 2 :* Si M est une matrice fondamentale de (H) alors la solution de $(H.D.)$ est donnée par $Y(t) = M(t)M^{-1}(t_0)Y_0$ pour tout $t \in I$.

4. **Résolution de**
$$\begin{cases} Y' = AY + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{E.D.}$$

   (a) *Méthode 1 :* La solution de $(E.D.)$ est donnée par $Y(t) = R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\,du$ pour tout $t \in I$.

   (b) *Méthode 2 :* Si M est une matrice fondamentale de (H) alors la solution de $(E.D.)$ est donnée par $Y(t) = M(t)M^{-1}(t_0)Y_0 + M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(u)B(u)\,du$ pour tout $t \in I$.

3.5 Fiche : Résolution des systèmes linéaires à coefficients constants

1. **Résolution de**
$$Y' = AY. \tag{H}$$

   (a) *Méthode de l'exponentielle de matrice :* La solution générale de (H) est définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{R}^n$.

   (b) *Méthode spectrale :*

i. Si A admet n vecteurs propres linéairement indépendants $V_1, V_2, ..., V_n$ associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$ avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

ii. Si A admet $2p = n$ valeurs propres complexes distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1} = \overline{\lambda_1}, \lambda_{p+2} = \overline{\lambda_2}, ..., \lambda_{2p} = \overline{\lambda_p}$. Pour $i = 1, ..., p$, on considère Y_1^i et Y_2^i, les deux solutions linérairement indépendants associées à la valeur propre complexe λ_i définies, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y_1^i(t) = \mathrm{Re}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$ et $Y_2^i(t) = \mathrm{Im}\left(V_i e^{\lambda_i t}\right)$, alors $\{Y_1^i, Y_2^i\}_{i=1,...,p}$ est un système fondamental de (H).

2. **Résolution de**

$$Y' = AY + B(t). \tag{E}$$

La solution générale de (E) est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale de (H) et Y_p est une solution de (E).

(a) Pour calculer Y_H, on utilise (1).

(b) Pour calculer Y_p, on utilise la méthode de la variation de la constante *(On varie les constantes dans Y_H) :*

i. Si pour tout $t \in I$ on a $Y_H(t) = e^{tA} C$ avec $C \in \mathbb{R}^n$ alors $Y_p(t) = e^{tA} C(t)$ pour tout $t \in I$,avec $C'(t) = e^{-tA}(t) B(t)$ pour tout $t \in I$.

ii. Si pour tout $t \in I$ on a $Y_H(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$, alors pour tout $t \in I$ on a $Y_p(t) = c_1(t) V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(t) V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n(t) V_n e^{\lambda_n t}$, avec $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & V_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}^{-1} B(t)$ pour tout $t \in I$.

3. **Résolution de**

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{H.D.}$$

La solution de $(H.D.)$ est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. **Résolution de**

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t), \\ \quad Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{$E.D.$}$$

La solution de $(E.D.)$ est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)\,du$ pour tout $t \in I$.

Chapitre 4

Stabilité

4.1 Définitions

Considérons le système

$$X' = f(X) \tag{EA}$$

On suppose que $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction qui vérifie les conditions de Cauchy Lipschitz. Soient $t_0 \in I$ et $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de (EA) c. à dire $f\left(\overline{X}\right) = 0$.

Définition 4.1.1 *On dit que $\overline{X}$ est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 : \left(\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta\right) \Longrightarrow \left(\left\|X(t, t_0, X_0) - \overline{X}\right\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I\right).$$

Ici $X(., t_0, X_0)$ est la solution de $\begin{cases} X' = f(X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$

Définition 4.1.2 *On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si*

1. *$\overline{X}$ est stable.*

2. *Il existe* $\beta > 0$ *tel que*

$$\forall X_0 : \left\| X_0 - \overline{X} \right\| < \beta \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} X(t, t_0, X_0) = \overline{X}.$$

Définition 4.1.3 *On suppose que* $f(0) = 0$ *(C. à dire l'origine est un point d'équilibre de* (EA)*). Le système* (EA) *est stable (resp. asymptotiquement stable) veut dire que l'origine est stable (resp. asymptotiquement stable).*

4.2 Théorèmes de stabilité

Théorème 4.2.1 ***(Méthode de Liapunov)*** *On suppose que* $f(0) = 0$ *et il existe une fonction* V *de classe* C^1 *telle que* $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* U *un voisinage de* 0, $V(0) = 0$ *et* $V(X) > 0$ *pour tout* $X \neq 0$.

1. *Si* $V'(X) := \frac{d}{dt}(V(X)) \leq 0$ *pour toute solution* X *non nulle de* (EA) *alors* 0 *est stable.*
2. *Si* $V'(X) < 0$ *pour toute solution non nulle de* (EA) *alors* 0 *est asymptotiquement stable.*
3. *Si* $V'(X) > 0$ *pour toute solution non nulle de* (EA) *alors* 0 *est instable (n'est pas stable).*

Application : Utilisons la méthode de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1 (x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 (x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$ Considérons la fonction suivante : $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \neq$

$(0,0)$. D'autre part, pour toute solution $(x_1,x_2)\neq(0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x_1,x_2) \quad &: \quad = \frac{d}{dt}\left(V(x_1,x_2)\right) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ &= 2x_1\frac{dx_1}{dt}+2x_2\frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1\left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)+2x_2\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) \\ &= 2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2>0 \text{ car } (x_1,x_2)\neq(0,0). \end{aligned}$$

Ainsi, l'origine (le système) est instable.

Remarque 4.2.1 *On peut calculer* $V'(x_1,x_2)$ *comme suit*

$$\begin{aligned} V'(x_1,x_2) \quad &: \quad = \frac{d}{dt}\left(V(x_1,x_2)\right) = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{dx_2}{dt}\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ &= \left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)2x_1+\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)2x_2 \\ &= 2\left(x_1^2+x_2^2\right). \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 ***(Stabilité des systèmes linéaires)*** *Soit* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Le système* $X'=AX$ *est asymptotiquement stable Ssi toutes les valeurs propre de* A *ont une partie réelle strictement négative.*
2. *S'il existe une valeur propre* λ *de* A *telle que* $\operatorname{Re}\lambda>0$ *alors le système* $X'=AX$ *est instable.*

Application : Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Etudions la stabilité asymptotique du système $Y'=\begin{bmatrix}0 & a\\ a & 0\end{bmatrix}Y$. Pour cela, voir exercice 6.

Théorème 4.2.3 ***(Méthode de linéairisation)*** *On suppose que* $f(0)=0$. *Considérons la matrice Jacobienne de* $f=(f_1,f_2,...,f_n)$ *donnée par* $Df=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$.

1. *Si toutes les valeurs propre de $Df(0,0)$ ont une partie réelle strictement négative alors le système (EA) est asymptotiquement stable.*
2. *S'il existe une valeur propre λ de $Df(0,0)$ telle que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *alors le système (EA) est instable.*

Application : Etudions la stabilité des points d'équilibre du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x+1), \\ \frac{dy}{dt} = x(y^3+1). \end{cases}$ ....$(Sys$

$\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ est un point d'équilibre de $\left(Sys_{(x,y)}\right)$ alors $y(x+1) = 0$ et $x(y^3+1) = 0$. Ainsi, les points d'équilibre de ce système sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

Etudions la stabilité du point d'équilibre $(0,0)$ *:* On a

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y(x+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(y(x+1)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x(y^3+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(x(y^3+1)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & x+1 \\ y^3+1 & 3xy^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ les deux valeurs propre de $Df(0,0)$. Alors, il existe une valeurs propre $\lambda = \lambda_1$ de $Df(0,0)$ telle que $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\lambda_1 = 1 > 0$ alors l'origine est instable pour le système $(Sys_{(x,y)})$.

Etudions la stabilité du point d'équilibre $(-1,-1)$ *:* Le point d'équilibre $(-1,-1)$ est différent de l'origine alors

1. (a) Changement de variable $u = x - (-1) = x+1$ et $v = y - (-1) = y+1$.

   (b) Le système associé au nouveaux variables : On a

$$\begin{cases} u' = x' = y(x+1) = (v-1)u, \\ v' = y' = x(y^3+1) = (u-1)\left((v-1)^3 - 1\right) = (u-1)(v^3 - 3v^2 + 3v). \end{cases}$$

$$\text{Ainsi} \begin{cases} u' = (v-1)u = f_1(u,v), \\ v' = (u-1)(v^3 - 3v^2 + 3v) = f_2(u,v). \end{cases} \quad ....(Sys_{(u,v)})$$

(c) La matrice du système linéairisé de $\left(Sys_{(u,v)}\right)$: On a

$$Df\left(u,v\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(u,v\right) & \frac{\partial f_1}{\partial v}\left(u,v\right)\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\left(u,v\right) & \frac{\partial f_2}{\partial v}\left(u,v\right)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}v-1 & u\\ v^3-3v^2+3v & \left(u-1\right)\left(3v^2-6v+3\right)\end{array}\right).$$

Ainsi $Df\left(0,0\right)=\left(\begin{array}{cc}-1 & 0\\ 0 & -3\end{array}\right)$.

(d) Conclusion : Les valeurs propre de $Df\left(0,0\right)$ sont $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=-3$. Puisque $\operatorname{Re}\lambda_1=-1<0$ et $\operatorname{Re}\lambda_2=-3<0$ alors toutes les valeurs propre de $Df\left(0,0\right)$ ont une partie réelle strictement négative alors l'origine est asymptotiquement stable pour le système $(Sys_{(u,v)})$. Ceci implique que $(-1,-1)$ est asymptotiquement stable pour le système $(Sys_{(x,y)})$.

4.3 Exercices

Exercice 1

Soient $B\in\mathbb{R}^m$ et A une matrice à coefficients constants.

1. Montrer que $X'=AX+B$ admet un point d'équilibre Ssi $B\in\operatorname{Im}A$.
2. Montrer que le point d'équilibre de $X'=AX+B$ est stable Ssi l'origine du système homogène associé est stable.

Solution 1

Considérons les deux systèmes $X'=AX$.....(1) et $X'=AX+B$.....(2)

1. On a

$$\begin{aligned}\left((2)\ \text{admet un point d'équilibre }\overline{Y}\right) &\Longleftrightarrow \left(A\overline{Y}+B=0\right)\\ &\Longleftrightarrow \left(B=A\left(-\overline{Y}\right)\right)\\ &\Longleftrightarrow \left(B\in\operatorname{Im}A\right).\end{aligned}$$

2. Soient $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soient $X(.,0,X_0)$ la solution de $\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$ et $Y(.,0,Y_0)$ la solution de $\begin{cases} X' = AX + B, \\ X(0) = Y_0. \end{cases}$

Montrons que $X\left(.,0,Y_0 - \overline{Y}\right) = Y(.,0,Y_0) - \overline{Y}$: Il suffit de montrer que $Y(.,0,Y_0) - \overline{Y}$ est une solution de $\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = Y_0 - \overline{Y}. \end{cases}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \left(Y(t,0,Y_0) - \overline{Y}\right)' &= Y'(t,0,Y_0) = AY(t,0,Y_0) + B \\ &= AY(t,0,Y_0) + A\left(-\overline{Y}\right) = A\left(Y(t,0,Y_0) - \overline{Y}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a $Y(0,0,Y_0) - \overline{Y} = Y_0 - \overline{Y}$.

Montrons que le point d'équilibre de $X' = AX + B$ est stable Ssi l'origine du système homogène associé est stable : On a

$$((1) \text{ est stable}) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 \in \mathbb{R}^n : \|X_0\| < \delta \Longrightarrow \|X(t,0,X_0)\| < \varepsilon$$

Ceci est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 = Y_0 - \overline{Y} \in \mathbb{R}^n : \left\|Y_0 - \overline{Y}\right\| = \|X_0\| < \delta \Longrightarrow \left\|Y(.,0,Y_0) - \overline{Y}\right\| = \left\|X\left(.,0,Y_0 - \overline{Y}\right)\right\| = \|X(t,0,X_0)\| < \varepsilon$ Qui est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n : \left\|Y_0 - \overline{Y}\right\| < \delta \Longrightarrow \left\|Y(.,0,Y_0) - \overline{Y}\right\| < \varepsilon$ ceci est équivalent à $\overline{Y}$ est stable pour (2).

Exercice 2

Utiliser la méthode de la fonction de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \end{cases}$ (*Indication : Considérer la fonction* $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$.)

Solution 2

On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ si $(x_1, x_2) \neq 0$. En plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_1, x_2) &= 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} \\
&= 2x_1\left(x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \\
&= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 > 0 \text{ pour tout } (x_1, x_2) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le système est instable.

Exercice 3

Etudier la stabilité de l'origine du système $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1. \end{cases}$ ($\omega \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon < 0$.)

Indication : Utiliser la fonction $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2$.

Solution 3

On a $V(0,0) = 0^2 + 20^2 = 0$ et $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2 > 0$ si $(y_1, y_2) \neq 0$. En plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) &= 2y_1\frac{dy_1}{dt} + 4y_2\frac{dy_2}{dt} \\
&= 2y_1\left(2y_1y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2\right) + 4y_2\left(-y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1\right) \\
&= 2\varepsilon\left(y_1^4 + 2y_2^6\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon < 0$ alors $\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) < 0$ pour $(y_1, y_2) \neq 0$. Donc V est une fonction stricte de Liapunov. Ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 4

Considérons la fonction suivante : $V(x, y) = x^2 + y^2$. Utiliser deux méthodes pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

Solution 4

Méthode 1 (Stabilité des systèmes linéaires)

Le système s'écrit sous la forme $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propre de A sont $\lambda_1 = -1 - i$ et $\lambda_2 = -1 + i$. On a $\operatorname{Re}\lambda_1$ et $\operatorname{Re}\lambda_2$ sont strictement négatives.

C. à dire que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelles strictement négatives. Ceci implique que le système est asymptotiquement stable.

Méthode 2 (Méthode de Liapunov)

D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(-x+y) + 2y(-x-y) \\ &= -2\left(x^2+y^2\right) < 0. \end{aligned}$$

Alors le système est asymptotiquement stable.

Exercice 5

On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{4.1}$$

1. Peut on étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.
2. Considérons la fonction $V(x,y) = 2x^2 + y^4$. Etudier la stabilité du système (2).

Solution 5

1. On a
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
alors $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ les deux valeurs propre de $Df(0,0)$ alors on ne peut rien dire sur le système nonlinéaire. Ainsi, on ne peut pas étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.
2. D'une part, on a $V(0,0) = 20^2 + 0^4 = 0$ et $V(x,y) = 2x^2 + y^4 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $V'(x,y) = 4x\frac{dx}{dt} +$

$4y^3\frac{dy}{dt} = -4xy^3 + 4y^3x = 0 \leq 0$, alors le système est stable.

Exercice 6 Les trois questions sont indépendantes :

1. Citer 3 méthodes pour étudier de la stabilité.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Etudier la stabilité du système $Y' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} Y$.
3. Utiliser la fonction de Liapunov définie sur $\mathbb{R}^2$ par $V(x,y) = x^2 + y^2$ pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2), \\ y' = -x - y(x^2+y^2). \end{cases}$

Solution 6

1. La méthode en utilisant la définition de la stabilité, la méthode de linéairisation et la méthode de la fonction de Liapunov.
2. Les deux valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -a$. Alors l'une des valeurs propre est de partie réelle strictement positive alors le système est instable.
3. *Etudions la fonction* V :
   (a) On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \\ &= \left[y - x\left(x^2+y^2\right)\right]2x + \left[-x - y\left(x^2+y^2\right)\right]2y \\ &= -2\left(x^2+y^2\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

   Alors le système est asymptotiquement stable.

Chapitre 5

Examens

Interrogation I (2011/2012)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

1. Citez trois propriétés de la matrice résolvante.
2. Justifier ce qui suit

   (a) La solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ est $Y(t) = M(t)M^{-1}(t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} M(t)M^{-1}(u)B(u)\,du$. Ici M est la matrice fondamentale du système homogène associé.

   (b) Si Y est la solution de $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$ alors $Y = 0$.

   (c) Soit S_H l'ensemble des solutions du système $Y' = A(t)Y$. Le système fondamental $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est une base de S_H.

Correction

1. Voir Cours

2.a On a $Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u)\,B(u)\,du$ est la solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

Mais $R(t,t_0) = M(t)\,M^{-1}(t_0)$ et $R(t,u) = M(t)\,M^{-1}(u)$ alors si on remplace on trouve $Y(t) = M(t)\,M^{-1}(t_0)\,Y_0 + \int_{t_0}^{t} M(t)\,M^{-1}(u)\,B(u)\,du.$

2.b **Méthode 1 :** La fonction nulle $f = 0$ est aussi solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = 0. \end{cases}$

Alors $Y = f$ d'aprés l'unicité de la solution. Donc $Y = 0$.

Méthode 2 : Puisque $Y(.,t_0,0)$ est la solution unique du pb de Cauchy $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(t_0) = 0. \end{cases}$

Alors

$$\forall t \in I : Y(t) = Y(t,t_0,0),$$

mais

$$\forall t \in I : Y(t,t_0,0) = R(t,t_0)\,0 = 0,$$

donc

$$\forall t \in I : Y(t) = 0.$$

2.c Le système fondamental $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est un système linéairement indépendant de S_H. Puisque $card\{Y_1, ..., Y_n\} = n = \dim S_H$ alors $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est une base de S_H.

Interrogation II (2011/2012)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Correction

1. On a $e^A = e^{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}$ car A est une matrice diagonale.
2. On a

$$e^B = e^{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = e^{2I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^2 e^{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}. \tag{5.1}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est une matrice nilpotente. Un simple calcul montre que $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0_2$. Donc

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{1!} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on remplace dans (5.8) on trouve $e^B = \begin{bmatrix} e^2 & 4e^2 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}$.

3. **Méthode 1 :** On a $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale par blocs avec $C_1 = [2]$ et $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Alors

$$e^C = \begin{bmatrix} e^{C_1} & 0 \\ 0 & e^{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{C_2} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Calculons e^{C_2} : On a $\det(C_2 - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$ implique que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ sont les deux valeurs propres distinctes de C_2 donc $C_2 = PDP^{-1}$. Ici $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calculons P : V_1, V_2 sont les vecteurs propres de C_2 associés respectivement à λ_1, λ_2 alors $C_2V_1 = \lambda_1 V_1$ et $C_2V_2 = \lambda_2 V_2$. Ce qui implique que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $ad - cb = 1 \neq 0$. On a $P^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} e^{C_2} &= e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & 0 \\ 2e^3 - 2e & e^3 \end{bmatrix}$$

Si on remplace dans (5.2) on trouve

$$e^C = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 2e^3 - 2e & e^3 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2 : On a $\det(C - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$ implique que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$ sont les trois valeurs propres distinctes de C alors $C = PDP^{-1}$. Ici $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calculons P : V_1, V_2 et V_3 sont les vecteurs propres de C associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 alors $CV_1 = \lambda_1 V_1$, $CV_2 = \lambda_2 V_2$ et $CV_3 = \lambda_3 V_3$. Ce qui implique que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculons P^{-1} : Soit $P^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$. On a $PP^{-1} = I_3$ alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned}
e^C &= e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 2e^3 - 2e & e^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Contrôle final I (2011/2012)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (9pts)

1. En utilisant l'approche spectrale, trouver la solution générale du système $Y' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y.$
2. En utilisant l'exponentielle de matrice, déterminer la solution du système

$$\begin{cases} Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$$

Exercice 2 (7pts)

Considérons le système

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{H}$$

Où A est une matrice $T-$périodique : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t+T) = A(t)$.

1. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $S(t) = R(t+T, t_0+T)$. Montrer que S vérifie $\begin{cases} S'(t) = A(t)\, S(t), \\ S(t_0) = I_n. \end{cases}$
2. Déduire que pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$ on a $R(t+T, t_0+T) = R(t, t_0)$.
3. Montrer que

$$R(t+T, t) = R(t+T, T)\, R(T, 0)\, R(0, t) = R(t, 0)\, R(T, 0)\, R^{-1}(t, 0).$$

4. On suppose que (H) admet une solution qui vérifie $Y(T) = Y(0)$. Montrer que la fonction définie par $Z(t) = Y(t+T)$ est la solution de (H) qui vérifie $Z(0) = Y(0)$ puis déduire que Y est $T-$périodique.

Exercice 3 (4pts)

Présenter graphiquement la stabilité, la stabilité asymptotique et l'instabilité du point d'équilibre.

Correction

Solution 1

1. On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On a

   (a) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$ implique $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ sont deux valeurs propres de A. On a $\lambda_1 = \mu + i\nu$ avec $\mu = 0$ et $\nu = 1$.

   (b) V_1 est le vecteur propre de A associé à λ_1 alors $AV_1 = \lambda_1 V_1$. Donc $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + ib$ avec $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \operatorname{Re}\left(V_1 e^{\lambda_1 t}\right) = e^{\mu t}(a \cos \nu t - b \sin \nu t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= \operatorname{Im}\left(V_1 e^{\lambda_1 t}\right) = e^{\mu t}(a \sin \nu t + b \cos \nu t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   sont deux solutions du système $Y' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y$.

   Puisque Y_1 et Y_2 sont les deux *solutions* associées à la valeur complexe λ_1 alors elles sont *linéairement indépendantes*. Ce qui implique que $\{Y_1, Y_2\}$est un système fondamental alors la solution générale est $Y(t) = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) =$

$\begin{pmatrix} \alpha_2 \cos t - \alpha_1 \sin t \\ \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \end{pmatrix}$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

2. On a

$$\begin{aligned} e^{(t-t_0)A} &= e^{(t-t_0)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = e^{2(t-t_0)I_2 + \begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= e^{2(t-t_0)} e^{\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \end{aligned}$$

avec $\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls. On vérifie facilement que $\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$.

Alors

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{1!} = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors $e^{(t-t_0)A} = \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}$. La solution du système

$$\begin{cases} Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

est

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\, du \\
&= \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} Y_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} e^{2(t-u)} & (t-u)\, e^{2(t-u)} \\ 0 & e^{2(t-u)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2u} \\ 0 \end{bmatrix} du.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} e^{2t} du \\ \int_{t_0}^{t} 0 du \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} (t-t_0)\, e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Solution 2

1. On a, d'une part, la matrice résolvante vérifie $\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)\, R(t,t_0)$ alors $\frac{d}{dt}R(t+T, t_0+T) = A(t+T)\, R(t+T, t_0+T)$. Ce qui implique que $S'(t) = \frac{d}{dt}R(t+T, t_0+T) = A(t+T)\, R(t+T, t_0+T)$. Mais $A(t+T) = A(t)$ alors $S'(t) = A(t)\, R(t+T, t_0+T) = A(t)\, S(t)$. D'autre part, $S(t_0) = R(t_0+T, t_0+T) = I_n$. Alors S vérifie $\begin{cases} S'(t) = A(t)\, S(t), \\ S(t_0) = I_n. \end{cases}$

2. Puisque S est une solution du système $\begin{cases} M'(t) = A(t)\, M(t), \\ M(t_0) = I_n. \end{cases}$. Ce système admet une solution unique qui est $R(t,t_0)$ alors $S(t) = R(t,t_0)$. Ce qui implique que $R(t+T, t_0+T) = R(t,t_0)$.

3. On a

$$
\begin{aligned}
R(t+T,T)\, R(T,0)\, R(0,t) &= R(t+T,T)\, [R(T,0)\, R(0,t)] \\
&= R(t+T,T)\, R(T,t) = R(t+T,t).
\end{aligned}
$$

Montrons que $R(t+T,T)\, R(T,0)\, R(0,t) = R(t,0)\, R(T,0)\, R^{-1}(t,0)$:

De la question 2 (avec $t_0 = 0$), on trouve $R(t+T,T) = R(t+T,0+T) = R(t,0)$.

De plus, $R(0,t) = R^{-1}(t,0)$ alors $R(t+T,T)\,R(T,0)\,R(0,t) = R(t,0)\,R(T,0)\,R^{-1}(t,0)$.

4. On a $Z'(t) = Y'(t+T) = A(t+T)\,Y(t+T) = A(t)\,Y(t+T) = A(t)\,Z(t)$ et $Z(0) = Y(0+T) = Y(T) = Y(0)$.

   Montrons que Y est $T-$périodique : Pour Y donné, on pose $Y_0 = Y(0)$. La fonction Z vérifie $\begin{cases} Z'(t) = A(t)\,Z(t), \\ Z(0) = Y_0. \end{cases}$

   Alors Y et Z sont deux solutions du système $\begin{cases} Y'(t) = A(t)\,Y(t), \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$ De l'unicité de la solution, on trouve que $Z = Y$. C. à dire

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t+T) = Y(t).$$

Solution 3

Le point d'équilibre représente la solution constante. C. à dire on présente les graphes (voir cours) pour $\psi = C^{te}$.

Contrôle final II (2011/2012)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (9pts)

Considérons le système

$$Y^{'} = A(t)\, Y. \tag{H}$$

1. *Question de cours :* Montrer que la matrice résolvante vérifiée : $R(t_0, t_0) = I_n$ pour tout $t_0 \in I$.
2. Soient $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ un système fondamental de (H) et $u_1, u_2, ..., u_n$ des fonctions de $C^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que $Y = \sum_{i=1}^{i=n} u_i Y_i$ est solution du système non homogène $Y^{'} = A(t)\, Y + B(t)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{i=n} u_i^{'}(t)\, Y_i(t) = B(t)$ pour tout $t \in I$.

   Que peut on déduire.
3. Soit M une matrice fondamentale de (H). En dérivant l'identité $I_n = M^{-1}(t)\, M(t)$, montrer que $\left(M^{-1}\right)^{'}(t) = -M^{-1}(t)\, A(t)$ pour tout $t \in I$. Déduire que $\left(M^{-1}\right)^T$ est une matrice fondamentale du système $Y^{'} = -A^T(t)\, Y$.

Exercice 2 (11pts)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que $1, \sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ sont les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   Résoudre le système $Y^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{bmatrix} Y$.
2. Etant donné la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$. Montrer que $e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Résoudre le système $\begin{cases} Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$

Correction

Solution 1

1. Voir cours.
2. On a

$$\begin{aligned}
Y &= \sum_{i=1}^{i=n} u_i Y_i \text{ est solution du système } Y' = A(t)Y + B(t) \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_i Y_i\right)'(t) = A(t)\left(\sum_{i=1}^{i=n} u_i Y_i\right)(t) + B(t) \text{ pour tout } t \in I \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} u_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{i=n} u_i(t) Y_i'(t) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(t) A(t) Y_i(t) + B(t) \text{ pour tout } t \in I \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} u_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{i=n} u_i(t) A(t) Y_i(t) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(t) A(t) Y_i(t) + B(t) \text{ (car } Y_i \text{ solution} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} u_i'(t) Y_i(t) = B(t) \text{ pour tout } t \in I.
\end{aligned}$$

Conclusion : On déduit que la connaissance d'une matrice fondamentale de (H) permet de trouver une solution particulière du système non homogène. Il s'agit de la méthode de la variation de la constante.

3. On a $I_n = M^{-1}(t) M(t)$ alors $(I_n)' = (M^{-1})'(t) M(t) + M^{-1}(t) M'(t)$. Mais $(I_n)' = 0$ et $M'(t) = A(t) M(t)$ (car M est une matrice fondamentale de (H)) donc $0 = (M^{-1})'(t) M(t) + M^{-1}(t) A(t) M(t)$. C. à dire $(M^{-1})'(t) M(t) = -M^{-1}(t) A(t) M(t)$. Si on multiplie à droite par $M^{-1}(t)$ on obtient le résultat.

Montrons que $(M^{-1})^T$ est une matrice fondamentale du système $Y' = -A^T(t) Y$:

D'une part, si on prend la transposée de deux membres de $(M^{-1})'(t) = -M^{-1}(t) A(t)$

et on utilise les propriétés de la transposée on trouve $\left(\left(M^{-1}\right)^T\right)'(t) = -A^T(t)\left(M^{-1}\right)^T(t)$. Alors, on peut montrer que chaque colonne de $\left(M^{-1}\right)^T$ vérifie l'équation $Y' = -A^T(t)\,Y$. Ainsi, les colonnes de $\left(M^{-1}\right)^T$ sont des solutions du système $Y' = -A^T(t)\,Y$. D'autre part, les colonnes de la matrice M sont L. I alors on peut trouver facilement que les colonnes de la matrice $\left(M^{-1}\right)^T$ sont aussi L. I.

Solution 2

1. On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   On a $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5$ alors $\det(A - I) = \det\left(A - \sqrt{5}I\right) = \det\left(A - \left(-\sqrt{5}\right)I\right) = 0$ ce qui implique que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{5}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{5}$ sont des valeurs propres de A. Soient V_1, V_2 et V_3 les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 alors $AV_1 = \lambda_1 V_1$, $AV_2 = \lambda_2 V_2$ et $AV_3 = \lambda_3 V_3$. Ce qui implique que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix}$, donc la solution générale est

$$\begin{aligned} Y &= \alpha_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 V_3 e^{\lambda_3 t} \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix} e^{\sqrt{5}t} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{5}t}, \end{aligned}$$

   avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

2. On a

$$e^{tA} = e^{\begin{bmatrix} \alpha t & t & 0 \\ 0 & \alpha t & t \\ 0 & 0 & \alpha t \end{bmatrix}} = e^{\alpha t I_3 + N} = e^{\alpha t} e^N,$$

avec $N = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls. Un simple calcul montre que $N^3 = 0$. On a

$$\begin{aligned} e^N &= I_3 + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Résolution du système $\begin{cases} Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$

La solution de ce système est

$$\begin{aligned}
Y(t) &= e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}B(u)\,du \\
&= e^{\alpha t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + \int_0^t e^{\alpha(t-u)}\begin{bmatrix} 1 & (t-u) & \frac{1}{2}(t-u)^2 \\ 0 & 1 & (t-u) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} du \\
&= e^{\alpha t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

.

Rattrapage (2011/2012)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (6pts)

Les deux questions sont indépendantes :

1. (2pts) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}$.

2. (4pts) Soit $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $B \in M_p(\mathbb{R})$, $C \in M_q(\mathbb{R})$ et $p+q=n$. Montrer que la résolvante de $Z' = AZ$ vérifiée $R_A(t,t_0) = \begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}$ où $R_B(t,t_0)$ (resp. $R_C(t,t_0)$) est la résolvante de $X' = BX$ (resp. de $Y' = CY$).

Exercice 2 (6pts)

Considérons le système $\begin{cases} y_1' = \frac{1}{1+t^2}(ty_1 + y_2), \\ y_2' = \frac{1}{1+t^2}(ty_2 - y_1). \end{cases}$

1. (1pt) Ecrire ce système sous la forme $Y' = A(t)Y$....(H).

2. (2,5pts) On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H).

3. (2,5pts) Déterminer la solution générale de (H).

Exercice 3 (8pts)

Résoudre les systèmes suivants :

1. (3pts) $Y' = A_1Y$ avec $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. (5pts) $\begin{cases} Y' = A_2Y + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ avec $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Correction

Solution 1

1. On a

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}} &= \lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^k}{k!} = \lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{\begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix}}{k!} \\
&= \begin{bmatrix} \lim\limits_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{\alpha^k}{k!} & 0 \\ 0 & \lim\limits_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\frac{\beta^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Puisque R_B (resp. R_C) est la résolvante de $X' = BX$ (resp. de $Y' = CY$) alors $\begin{cases} \frac{d}{dt}R_B(t,t_0) = BR_B(t,t_0) \\ R_B(t_0,t_0) = I_p \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{d}{dt}R_C(t,t_0) = CR_C(t,t_0) \\ R_C(t_0,t_0) = I_q \end{cases}$ Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}R_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} BR_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & CR_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= A\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

C. à d.

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}. \tag{5.3}
$$

De plus,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} R_B & 0 \\ 0 & R_C \end{bmatrix}(t_0,t_0) &= \begin{bmatrix} R_B\left(t_0,t_0\right) & 0 \\ 0 & R_C\left(t_0,t_0\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = I_{p+q} = I_n.\end{aligned}$$

C. à d.

$$\begin{bmatrix} R_B & 0 \\ 0 & R_C \end{bmatrix}(t_0,t_0) = I_n. \tag{5.4}$$

De (5.11) et (5.12), on trouve $R_A\left(t,t_0\right) = \begin{bmatrix} R_B\left(t,t_0\right) & 0 \\ 0 & R_C\left(t,t_0\right) \end{bmatrix}.$

Solution 2

1.

$$\begin{aligned}\begin{cases} y_1' = \frac{1}{1+t^2}\left(ty_1 + y_2\right), \\ y_2' = \frac{1}{1+t^2}\left(ty_2 - y_1\right). \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow Y' = A\left(t\right)Y,\end{aligned}$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $A\left(t\right) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$

2. Pour montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H), on montre que Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (H) et qu'ils sont linéairement indépendant : On a $Y_1'\left(t\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\left(t\right)Y_1\left(t\right) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $Y_1'\left(t\right) = A\left(t\right)Y_1\left(t\right).$ Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H). De même, on montre que Y_2 est aussi une solution de (H).

D'autre part, on a

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1 \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système linéairement indépendant.

3. Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha t - \beta \\ \beta t + \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution 3

1. On a

   (a) $\det(A_1 - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ implique que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ sont les deux valeurs propres distinctes de A_1.

   (b) V_1 et V_2 sont les vecteurs propres de A_1 associés respectivement à λ_1 et λ_2 alors $A_1 V_1 = \lambda_1 V_1$ et $A_1 V_2 = \lambda_2 V_2$. Ce qui implique que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la solution générale est

$$\begin{aligned} Y(t) &= \alpha_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{3t} \\ \alpha_2 e^{3t} - \alpha_1 e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

2. La solution du système $\begin{cases} Y' = A_2 Y + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est

$$Y(t) = e^{tA_2} Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A_2} B(u)\, du. \tag{5.5}$$

Calculons e^{tA_2} : On a $e^{tA_2} = e^{\begin{bmatrix} t & t & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}} = e^{tI_3+N} = e^t e^N$, avec $N = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls. On montre facilement que $N^3 = 0$. On a

$$\begin{aligned} e^N &= I_3 + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $e^{tA_2} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si on remplace dans (5.5) on obtient

$$\begin{aligned}
Y(t) &= e^{tA_2}Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A_2} B(u)\,du \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)} \begin{bmatrix} 1 & (t-u) & \frac{1}{2}(t-u)^2 \\ 0 & 1 & (t-u) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} du \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + e^t \int_0^t \begin{bmatrix} te^{-u} \\ e^{-u} \\ 0 \end{bmatrix} du \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} te^t \int_0^t e^{-u}du \\ e^t \int_0^t e^{-u}du \\ \int_0^t 0du \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_0 + \begin{bmatrix} t(e^t-1) \\ e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Interrogation (2012/2013)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

1 Heure

Les trois questions sont indépendantes :

(6pts) 1. Considérons le système $Y^{'}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}Y.$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $M(t)=\begin{pmatrix}e^{t} & 2e^{3t}\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice fondamentale puis déterminer la solution générale du système précédent.

(3pts) 2. Montrer que si A est une matrice constante diagonale alors $R(t,t_0)$ est une matrice diagonale aussi.

(3pts) 3. Considérons la matrice M définie pour tout $t\in I$ par $M(t)=R(t,0)$. Montrer que M est une matrice fondamentale du système $Y^{'}=A(t)Y$.

Correction

1. On pose $Y_1(t)=\begin{pmatrix}e^{t}\\ 0\end{pmatrix}$ et $Y_2(t)=\begin{pmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$. On a $M=(Y_1Y_2)$.

Pour montrer que M est une matrice fondamentale, on montre que $\{Y_1,Y_2\}$ est un système fondamental.

Montrons que Y_1 et Y_2 sont deux solutions :

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $Y_1^{'}(t)=\begin{pmatrix}e^{t}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}Y_1(t)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}\\ 0\end{pmatrix}$, alors $Y_1^{'}(t)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}Y_1(t)$. Ce qui implique que Y_1 est une solution.

De même, on montre que Y_2 est aussi une solution.

Montrons que Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendant : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^t & 2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = e^{4t} \neq 0,$$

alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système linéairement indépendant.

Déterminons la solution générale du système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y$: Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental alors la solution général Y est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + 2\beta e^{3t} \\ \beta e^{3t} \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. A est diagonale alors $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Méthode I : On a

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} a_1(t-t_0) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n(t-t_0) \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{a_1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_n(t-t_0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $R(t, t_0)$ est une matrice diagonale.

Méthode II : Soit $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \iff \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1' = a_1 y_1, \\ \vdots \\ y_n' = a_n y_n, \\ y_1(t_0) = y_1^0, ..., y_n(t_0) = y_n^0. \end{cases} \quad \text{Ici } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} y_1' = a_1 y_1 \text{ et } y_1(t_0) = y_1^0. \\ \vdots \\ y_n' = a_n y_n \text{ et } y_n(t_0) = y_n^0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1(t) = e^{a_1(t-t_0)} y_1^0. \\ \vdots \\ y_n(t) = e^{a_n(t-t_0)} y_n^0. \end{cases}$$

$$\iff Y(t, t_0, Y_0) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1(t-t_0)} y_1^0 \\ \vdots \\ e^{a_n(t-t_0)} y_n^0 \end{pmatrix}$$

$$\iff Y(t, t_0, Y_0) = \begin{pmatrix} e^{a_1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_n(t-t_0)} \end{pmatrix} Y_0.$$

D'autre part, on a $Y(t, t_0, Y_0) = R(t, t_0) Y_0$ alors

$$R(t,t_0)\,Y_0 = \begin{pmatrix} e^{a_1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_n(t-t_0)} \end{pmatrix} Y_0.$$

Ce qui implique que

$$R(t,t_0) = \begin{pmatrix} e^{a_1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_n(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $R(t,t_0)$ est une matrice diagonale.

3. *Montrons que les colonnes de M sont des solutions de $Y' = A(t)\,Y$ qui sont linéairement indépendant.*

Méthode I : Soient $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et Y_i la solution de $Y' = A(t)\,Y$ qui vérifie $Y_i(0) = e_i$.

$R(t,0)$ a pour colonnes $Y_1(t), Y_2(t), ...$ et $Y_n(t)$. Donc les colonnes de M sont des solutions du système $Y' = A(t)\,Y$. D'autre part, pour tout $t \in I$, on a $R(t,0)$ est une matrice inversible alors $W(t) = \det(Y_1(t) .....Y_n(t)) = \det R(t,0) \neq 0$. Ce qui implique que $Y_1, ..., Y_n$ sont linéairement indépendant.

Méthode II : On a $M'(t) = \frac{d}{dt}R(t,0) = A(t)\,R(t,0) = A(t)\,M(t)$. C. à dire M vérifie l'équation $N' = A(t)\,N$. Alors, on peut montrer que chaque colonne de M vérifie l'équation $Y' = A(t)\,Y$. Ainsi, les colonnes de M sont des solutions du système $Y' = A(t)\,Y$. D'autre part, pour tout $t \in I$, on a $R(t,0)$ est une matrice inversible alors $M(t)$ est inversible ainsi les colonnes de M sont linéairement indépendantes.

Contrôle final (2012/2013)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (3pts)

A et B sont deux matrices à coefficients constant. P est une matrice inversible.

Justifier ce qui suit :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tA}A = Ae^{tA}$.
2. Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on a $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}$.

Exercice 2 (7pts)

Résoudre le système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (10pts)

Les trois parties sont indépendantes.

1. (4pts) Soient A et B deux matrices, à coefficients constant, qui commutent et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(t) = e^{At}e^{Bt}Y_0$ et $\psi(t) = e^{(A+B)t}Y_0$.
   Montrer que ϕ et ψ sont deux solutions du système $\begin{cases} Y' = (A+B)\,Y, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$ Puis, déduire que $e^A e^B = e^{A+B}$.
2. (3pts) A, B et C sont trois matrices à coefficients constant. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = e^{Bt}Ce^{At}$. Montrer que X est la solution du système $\begin{cases} Y' = BY + YA, \\ Y(0) = C. \end{cases}$
3. (3pts) A est une matrice à coefficients constant. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $e^{\lambda t}$ est une valeur propre de e^{At}.

Correction

Solution 1

1. On a $e^{tA}A = Ae^{tA}$ car A commute avec A.
2. On a $e^{(t+s)A} = e^{tA+sA}$. Mais $(tA)(sA) = (ts)A^2 = (st)A^2 = (sA)(tA)$, alors $e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA}$.

   Ceci implique que $e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA}$.
3. On a $e^{tPDP^{-1}} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}$.

Solution 2

La solution générale du système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix}$ est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé et Y_p est une solution particulière du système considéré.

Calculons Y_H : On a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2. Donc

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme

$$Y_p(t) = c_1(t) V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(t) V_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.6}$$

avec c_1 et c_2 deux fonctions dérivables telles que $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = M^{-1}B$, où M est une matrice fondamentale du système homogène et B le second membre du système non homogène. On pose $Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$ et $Y_2(t) = V_2 e^{\lambda_2 t}$. Puisque $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental. Donc $M = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} &= M^{-1}(t)\, B(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_1'(t) = 1$ et $c_2'(t) = t$. Ainsi, $c_1(t) = t$ et $c_2(t) = \frac{1}{2}t^2$. Si on remplace dans (5.13) on trouve

$$Y_p(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Y_H(t) + Y_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (c_1 + t)\, e^t \\ \left(c_2 + \frac{1}{2}t^2\right) e^{2t} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Solution 3

1. On a
$$\phi^{'}(t) = Ae^{At}e^{Bt}Y_0 + e^{At}Be^{Bt}Y_0 = Ae^{At}e^{Bt}Y_0 + \left(e^{At}B\right)e^{Bt}Y_0.$$

   Puisque A et B commutent alors $e^{At}B = Be^{At}$.

   Donc
$$\begin{aligned} \phi^{'}(t) &= Ae^{At}e^{Bt}Y_0 + \left(Be^{At}\right)e^{Bt}Y_0 = A\left(e^{At}e^{Bt}Y_0\right) + B\left(e^{At}e^{Bt}Y_0\right) \\ &= (A+B)\left(e^{At}e^{Bt}Y_0\right) = (A+B)\,\phi(t). \end{aligned}$$

   C. à dire $\phi^{'}(t) = (A+B)\,\phi(t)$. En plus, $\phi(0) = e^{A0}e^{B0}Y_0 = e^0e^0Y_0 = I_nI_nY_0 = Y_0$. On a aussi $\psi^{'}(t) = (A+B)\,e^{(A+B)t}Y_0 = (A+B)\,\psi(t)$ et $\psi(0) = e^{(A+B)0}Y_0 = e^0Y_0 = I_nY_0 = Y_0$. Ce qui implique que ϕ et ψ sont deux solutions de système $\begin{cases} Y' = (A+B)\,Y, \\ Y\,(0) = Y_0. \end{cases}$ Ce système admet une solution unique alors $\phi = \psi$. Ceci implique que $\phi\,(1) = \psi\,(1)$ donc $e^Ae^BY_0 = e^{A+B}Y_0$. Ainsi, on trouve $e^Ae^B = e^{A+B}$.

2. On a
$$\begin{aligned} X'\,(t) &= Be^{Bt}Ce^{At} + e^{Bt}C\left(Ae^{At}\right) \overset{exercice1}{=} Be^{Bt}Ce^{At} + e^{Bt}C\left(e^{At}A\right) \\ &= B\left(e^{Bt}Ce^{At}\right) + \left(e^{Bt}Ce^{At}\right)A = BX\,(t) + X\,(t)\,A. \end{aligned}$$

   En plus, on a
$$X\,(0) = e^{B0}Ce^{A0} = e^0Ce^0 = I_nCI_n = C.$$

   Donc, X est la solution du système $\begin{cases} Y' = AY + YB, \\ Y\,(0) = C. \end{cases}$

3. Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Donc $AV = \lambda V$. On a
$$e^{At}V = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}\right)V = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}V = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^kV.$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k V = \lambda^k V$. Donc

$$\begin{aligned} e^{At}V &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda^k V = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda^k}{k!}\right) V \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) V = e^{\lambda t}V. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $e^{\lambda t}$ est valeur propre de e^{At}.

Rattrapage (2012/2013)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (16pts)

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y_1^{'} = y_1 + y_2, \\ y_2^{'} = y_1 + y_2. \end{cases}$

2. $Y^{'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$

3. $\begin{cases} Y^{'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} Y^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

Exercice 2 (4pts)

A est une matrice constante d'ordre n. M, M_1 et M_2 sont des fonctions matricielles dérivables d'ordre n définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Soient $Y_1, ..., Y_n$ les colonnes de M.

   Montrer que
   $$\left[M^{'} = AM\right] \Longrightarrow \left[Y_i^{'} = AY_i, \forall i = 1, ..., n\right].$$

2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $M_2 = M_1 C$.

   Montrer que si M_1 est une matrice fondamentale du $Y^{'} = AY$ alors M_2 est une matrice fondamentale du $Y^{'} = AY$.

Correction

Solution 1

1. Le système $\begin{cases} y_1^{'} = y_1 + y_2, \\ y_2^{'} = y_1 + y_2, \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme de $Y^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

   On a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2.

   Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{0.t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} - c_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\begin{cases} y_1(t) = c_1 + c_2 e^{2t}, \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} - c_1. \end{cases}$

2. La solution générale du système $Y^{'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$ est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé et Y_p est une solution particulière du système considéré.

   Calculons Y_H : On a $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ sont les deux valeurs propres distinctes de

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2. Donc

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme

$$Y_p(t) = c_1(t) V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(t) V_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.7}$$

avec c_1 et c_2 deux fonctions dérivables telles que $\begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \end{pmatrix} = M^{-1}B$,où M est une matrice fondamentale du système homogène et B le second membre du système non homogène.

On pose $Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$ et $Y_2(t) = V_2 e^{\lambda_2 t}$. Puisque $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ sont deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental.

Donc $M = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} &= M^{-1}(t) B(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_1'(t) = c_2'(t) = 1$. Ainsi, $c_1(t) = c_2(t) = t$. Si on remplace dans (5.7) on trouve

$$Y_p(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Y_H(t) + Y_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (c_1 + t) e^{2t} \\ (c_2 + t) e^t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. La solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$, avec $t_0 = 0$

et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. C. à dire $Y(t) = e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} Y_0$. Mais $e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = e^{2tI_2 + 0_2} = e^{2t}e^{0_2} = e^{2t}I_2$. Alors $Y(t) = e^{2t}I_2Y_0 = e^{2t}Y_0$.

4. La solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\, du$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. C. à dire

$$Y(t) = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du.$$

On a $e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, avec $\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls. On vérifie facilement que $\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$. On a

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & t-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} du \\ \int_{t_0}^{t} 0du \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} t-t_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution 2

1. On a

$$\begin{aligned} \left[M^{'} = AM\right] &\Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} Y_1 & ... & Y_n \end{pmatrix}^{'} = A\begin{pmatrix} Y_1 & ... & Y_n \end{pmatrix}\right] \\ &\Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} Y_1^{'} & ... & Y_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY_1 & ... & AY_n \end{pmatrix}\right] \\ &\Longrightarrow \left[Y_i^{'} = AY_i, \forall i = 1, ..., n\right]. \end{aligned}$$

2. Il suffit de montrer que les colonnes de M_2 sont des solutions de $Y^{'} = AY$ et qui sont linéairement indépendantes. On a $M_2^{'} = (M_1C)^{'} = M_1^{'}C$, mais $M_1^{'} = AM_1$ car M_1 est une matrice fondamentale du $Y^{'} = AY$ alors $M_2^{'} = (AM_1)\,C = A\,(M_1C) = AM_2$. C. à dire $M_2^{'} = AM_2$. D'aprés la question précédente les colonnes de M_2 sont des solutions de $Y^{'} = AY$.

   D'autre part, (avec $t \in \mathbb{R}$) on a

$$\begin{aligned} W_2(t) &:= \det M_2(t) = \det(M_1(t)\,C) = \det M_1(t) \det C \\ &= W_1(t) \det C. \end{aligned}$$

Mais $W_1(t) \neq 0$ car M_1 est une matrice fondamentale et $\det C \neq 0$ car C est une matrice inversible. Alors $W_2(t) \neq 0$. Ce qui implique que les colonnes de M_2 sont linéairement indépendantes.

Interrogation I (2013/2014)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Question 1 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$.

Question 2 : En calculant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^3$, trouver $e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$.

Correction

Réponse 1 : On a

$$\begin{aligned} e^{\lambda I_n} &= e^{\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda} I_n. \end{aligned}$$

C. à dire $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$.

Réponse 2 : On a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

Alors, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 3$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}} &= I_3 + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}}{1!} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^2}{2!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C. à dire $e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Interrogation II (2013/2014)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Interrogation 1

1. Donner la définition de la matrice fondamentale.
2. Montrer que, pour tout $t, s, r \in I$, on a $R(t,s)\,R(s,r) = R(t,r)$.
3. Montrer que si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Correction

Voir cours.

Interrogation 2

1. Donner la définition d'un système fondamental.
2. Soit Z une solution $Y' = AY$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Z(t) = R(t,0)\,Z(0)$.
3. Soit $\lambda = \mu + i\nu$ $(\nu \neq 0)$ une valeur propre complexe d'une matrice A et $V = a + ib$ le vecteur propre associé. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y_1(t) = e^{\mu t}(a\cos\nu t - b\sin\nu t)$ et $Y_2(t) = e^{\mu t}(a\sin\nu t + b\cos\nu t)$ .Montrer que Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendants.

Correction

1. Voir cours.

2. On pose $h(t) = R(t,0)\,Z(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a $h^{'}(t) = \left(\frac{d}{dt}R(t,0)\right)Z(0) = (AR(t,0))\,Z(0) = Ah(t)$. C'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $h^{'}(t) = Ah(t)$.

   D'autre part, $h(0) = R(0,0)\,Z(0) = I_n Z(0) = Z(0)$. C'est à dire, $h(0) = Z(0)$.

   Ce qui implique que h est une solution de $\begin{cases} Y^{'} = AY, \\ Y(0) = Z(0). \end{cases}$ Mais Z est aussi une solution de ce système. Ainsi, d'aprés l'unicité de la solution de ce système, $Z = h$. D'où le résultat.

   Remarque : le résultat de cette partie représente une propriété de chaque solution du système $Y^{'} = AY$.

3. Voir cours.

Interrogation 3

1. Donner la définition du Wronskien.
2. Soient $Y_1, ..., Y_n$ n fonctions vectorielles. En utilisant la définition de l'indépendance linéaire, montrer que

$$(\exists t_0 \in I, Y_1(t_0), ..., Y_n(t_0) \text{ sont L. I.}) \Longrightarrow (Y_1, ..., Y_n \text{ sont L. I.}).$$

3. Montrer que $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction

Pour 1 et 3, voir cours.

Pour 2, voir le TD.

Contrôle final (2013/2014)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (7pts)

Considérons le système

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y. \tag{H}$$

1. En utilisant la méthode spéctrale, résoudre ce système.
2. Donner une matrice fondamentale M de (H).
3. Trouver la matrice résolvante de (H). Puis, déduire la valeur de $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$.

Exercice 2 (8pts)

Soient $s \in \mathbb{R}$ et A une matrice à coefficients constant. Considérons le système $Y' = AY$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = R(t+s,0) - R(t,0)R(s,0)$ et $N(t) = AR(t,0) - R(t,0)A$.

1. Montrer que G et N sont des solutions du système $\begin{cases} M' = AM, \\ M(0) = 0_n. \end{cases}$
2. Montrer que $R(t+s,0) = R(t,0)R(s,0)$.
3. Que peut on dire sur A et $R(t,0)$.

Exercice 3 (5pts)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i = \overline{1,n}$, on pose $Y_i(t) = e^{tA}e_i$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système fondamental de $Y' = AY$.

Correction

Solution 1

1. On a $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2. Donc

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. On pose $Y_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$ et $Y_2(t) = V_2 e^{\lambda_2 t}$. Puisque $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental.

   Donc $M = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale. C. à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$M(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

3. Puisque $R(t, t_0) = M(t) M^{-1}(t_0)$, alors

$$R(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t_0} & e^{2t_0} \\ -2e^{-t_0} & e^{2t_0} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Puisque $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ avec $ad-cb \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} R(t,t_0) &= \frac{1}{3e^{t_0}}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t_0} & -e^{2t_0} \\ 2e^{-t_0} & e^{-t_0} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{2(t-t_0)} + e^{t_0-t} & e^{2(t-t_0)} - e^{t_0-t} \\ 2e^{2(t-t_0)} - 2e^{t_0-t} & e^{2(t-t_0)} + 2e^{t_0-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En plus, $R(t,t_0) = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$ alors

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} = R(1,0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^2 + e^{-1} & e^2 - e^{-1} \\ 2e^2 - 2e^{-1} & e^2 + 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Solution 2

1. *Pour montrer que G est une solution de* $\begin{cases} M' = AM, \\ M(0) = 0_n. \end{cases}$ *on montre que* $\begin{cases} G' = AG, \\ G(0) = 0_n. \end{cases}$

   Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{d\left(R(t+s,0) - R(t,0)R(s,0)\right)}{dt} = \frac{dR(t+s,0)}{dt} - \frac{dR(t,0)}{dt}R(s,0) \\ &= AR(t+s,0) - AR(t,0)R(s,0) \ \text{(Propriété de dérivation de la résolvante)} \\ &= A\left(R(t+s,0) - R(t,0)R(s,0)\right) = AG(t). \end{aligned}$$

   C. à dire $G'(t) = AG(t)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} G(0) &= R(0+s,0) - R(0,0)R(s,0) \\ &= R(s,0) - I_nR(s,0) \\ &= R(s,0) - R(s,0) = 0_n. \end{aligned}$$

C. à dire $G(0) = 0_n$.

Montrons maintenant que N est une solution de $\begin{cases} M' = AM, \\ M(0) = 0_n. \end{cases}$ Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{d(AR(t,0) - R(t,0)A)}{dt} = \frac{d(AR(t,0))}{dt} - \frac{d(R(t,0)A)}{dt} \\ &= A\frac{d(R(t,0))}{dt} - \frac{d(R(t,0))}{dt}A \\ &= A(AR(t,0)) - (AR(t,0))A = A(AR(t,0)) - A(R(t,0)A) \\ &= A(AR(t,0) - R(t,0)A) = AN(t). \end{aligned}$$

C. à dire $N'(t) = AN(t)$. D'autre part,

$$N(0) = AR(0,0) - R(0,0)A = AI_n - I_nA = A - A = 0_n.$$

C. à dire $N(0) = 0_n$.

2. On a 0_n est une solution du système $\begin{cases} M' = AM, \\ M(0) = 0_n. \end{cases}$ G est aussi solution de ce système. Ce dernier système admet une solution unique alors $G = 0_n$. Ce qui implique que pour tout $t \in \mathbb{R} : G(t) = 0_n$. C. à dire $R(t+s,0) - R(t,0)R(s,0) = 0_n$, alors $R(t+s,0) = R(t,0)R(s,0)$.
3. On a 0_n et N sont deux solutions de $\begin{cases} M' = AM, \\ M(0) = 0_n. \end{cases}$ D'aprés l'unicité de la solution, on trouve $N = 0_n$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R} : N(t) = 0_n$ c. à dire $AR(t,0) - R(t,0)A = 0_n$, donc, $AR(t,0) = R(t,0)A$. Ceci veut dire que A et $R(t,0)$ commutent.

Solution 3

Montrons que $Y_1, Y_2, \ldots$ et Y_n sont des solutions de $Y' = AY$ qui sont linéairement indépendants : Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$Y_i'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}e_i\right) = \frac{de^{tA}}{dt}e_i = \left(Ae^{tA}\right)e_i = A\left(e^{tA}e_i\right) = AY_i(t).$$

C. à dire, $Y_i^{'}(t) = AY_i(t)$. Ainsi, pour tout $i = \overline{1,n}$, Y_i est solution de $Y' = AY$.

D'autre part, pour tout $i = \overline{1,n}$, on a $Y_i(0) = e^{0A}e_i = e^{0_n}e_i = I_n e_i = e_i$. Alors

$$\begin{aligned}
[\{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ une base canonique de } \mathbb{R}^n] &\Longrightarrow [\{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ L. I.}] \\
&\Longrightarrow [\{Y_1(0), Y_2(0), ..., Y_n(0)\} \text{ L. I.}] \\
&\Longrightarrow [\exists t_0 = 0 : \{Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)\} \text{ L. I.}] \\
&\Longrightarrow [\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\} \text{ L. I.}].
\end{aligned}$$

Rattrapage (2013/2014)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (10pts)

1. Résoudre le système suivant $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

2. Considérons le système $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$............$(H)$

   (a) Résoudre (H).

   (b) Parmi les solutions de (H), trouver celle qui vérifie $Y(t_0) = Y_0$.

3. Que peut on dire.

Exercice 2 (6pts)

Considérons le système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$............$(H)$

1. Montrer que la matrice M donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $M(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de (H).

2. Montrer que la solution de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (4pts)

Répond par vrai ou faux : Justifier la vrai et corriger la fausse.

1. La matrice fondamentale est unique.

2. $\frac{d}{dt} R(t_0, t) = A(t) R(t, t_0)$.

Correction

Solution 1

1. La solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ est définie, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, par $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4 = 0$ implique que $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ sont les deux valeurs propres distinctes de A donc $A = PDP^{-1}$. Ici $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   Calculons P : V_1, V_2 sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 alors $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $ad - cb = 4 \neq 0$. On a $P^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Alors

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= e^{(t-t_0)A} Y_0 = e^{(t-t_0)PDP^{-1}} Y_0 \\
&= e^{P[(t-t_0)D]P^{-1}} Y_0 = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} Y_0 \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2(t-t_0) & 0 \\ 0 & -2(t-t_0) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} Y_0 \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} Y_0 \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{2(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} & 4e^{2(t-t_0)} - 4e^{-2(t-t_0)} \\ e^{2(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & 2e^{2(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} Y_0, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2.a On a $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres associés respectivement à λ_1, λ_2.

Donc, la solution de (H) est définie, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.b On a

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{2t_0} - 2c_2 e^{-2t_0} \\ c_1 e^{2t_0} + c_2 e^{-2t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t_0} & -2e^{-2t_0} \\ e^{2t_0} & e^{-2t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (Y(t_0) = Y_0) &\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2e^{2t_0} & -2e^{-2t_0} \\ e^{2t_0} & e^{-2t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y_0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t_0} & -2e^{-2t_0} \\ e^{2t_0} & e^{-2t_0} \end{pmatrix}^{-1} Y_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-2t_0} & 2e^{-2t_0} \\ -e^{2t_0} & 2e^{2t_0} \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ est définie, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t_0} & 2e^{-2t_0} \\ -e^{2t_0} & 2e^{2t_0} \end{pmatrix} Y_0 \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{2(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} & 4e^{2(t-t_0)} - 4e^{-2(t-t_0)} \\ e^{2(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & 2e^{2(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

3. On a utilisé deux méthodes différentes pour trouver la solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

Solution 2

1. Pour montrer que M est une matrice fondamentale du système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ il suffit de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $M'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(t)$ et $\det M(t) \neq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$:

D'une part, on a $M'(t) = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

alors $M'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M(t)$.

D'autre part, on a $\det M(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \neq 0$. Puisque M est une matrice fondamentale du système $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ alors la solution générale Y est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
Y(t) &= M(t)\,C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2. \\
Y(t) &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} C \text{ avec } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \\
Y(t) &= e^t \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Solution 3

1. Faux. *La matrice fondamentale n'est pas unique :* Soit C une matrice constante inversible. Si M_1 est une matrice fondamentale alors on peut montrer (Voir Rattrapage 2012/2013 : Exercice 2 Question 2) que $M_2 = M_1 C$ est aussi une matrice fondamentale.
2. Faux. *On a (Voir cours)* $\frac{d}{dt} R(t_0, t) = -R(t_0, t)\, A(t)$. Remarquer, ici, que $\frac{d}{dt} R(t_0, t)$ représente la dérivée par rapport à la deuxième variable.

Interrogation (2014/2015)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

1. Pout tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions du système $Y' = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} Y$. Résoudre ce système. Trouver la matrice résolvante.

2. Pout tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^t & e^t \\ \left(1-\frac{t^2}{2}\right)e^t & -e^t \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice fondamentale du système $Y' = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} Y$. Résoudre ce système. Donner une autre matrice fondamentale pour ce système.

3. Considérons le système

$$Y' = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} Y \qquad (H)$$

Montrer que, pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$, on a $R(t, t_0) = \begin{pmatrix} 2e^{t+\frac{t_0^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t^2}{2}+t_0} - e^{t+\frac{t_0^2}{2}} \\ 2e^{t+\frac{t_0^2}{2}} - 2e^{\frac{t^2}{2}+t_0} & 2e^{\frac{t^2}{2}+t_0} - e^{t+\frac{t_0^2}{2}} \end{pmatrix}$, puis, résoudre le système (H). Donner une matrice fondamentale.

Correction

1. * Il suffit de montrer que Y_1, Y_2 sont deux solutions de $Y' = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} Y$ et qu'il sont linéairement indépendants ($W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

** Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de $Y' = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} Y$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{t^2}{2}+t} + c_2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -c_1 e^{\frac{t^2}{2}+t} - c_2 2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*** La matrice définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $M(t) = (Y_1(t)\, Y_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale. Ainsi

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= M(t) M^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t^{t_0 2}}{2}-t_0} \\ -e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -e^{-t_0^2} \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} & e^{\frac{t^2}{2}-t} \\ -e^{\frac{t^2}{2}+t} & -2e^{\frac{t^2}{2}-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} & -e^{\frac{t^{t_0 2}}{2}-t_0} \\ e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t_0^2}{2}+t_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} - 2e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0} & e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0} \\ 2e^{\frac{t^2}{2}+t} e^{\frac{-t_0^2}{2}-t_0} - 2e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} & e^{-\frac{t^2}{2}+t} e^{\frac{t_0^2}{2}-t_0} - 2e^{\frac{t^2}{2}-t} e^{t_0-\frac{t_0^2}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. * Il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} M(t)$ et $\det M(t) \neq 0$.

   ** Puisque M est une matrice fondamentale alors la solution générale Y est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = M(t) C = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^t & e^t \\ \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) e^t & -e^t \end{pmatrix} C$, avec $C \in \mathbb{R}^2$.

   *** Si D est une matrice constante inversible alors MD est aussi une matrice fondamentale. Par exemple, si on prend $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} M(t)\,D(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^t & e^t \\ \left(1-\frac{t^2}{2}\right)e^t & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\frac{t^2}{2}e^t & 2e^t \\ (2-t^2)\,e^t & -2e^t \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. * On pose

$$D(t,t_0) = \begin{pmatrix} 2e^{t+\frac{t_0^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}+t_0} & e^{\frac{t^2}{2}+t_0} - e^{t+\frac{t_0^2}{2}} \\ 2e^{t+\frac{t_0^2}{2}} - 2e^{\frac{t^2}{2}+t_0} & 2e^{\frac{t^2}{2}+t_0} - e^{t+\frac{t_0^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que $R(t,t_0) = D(t,t_0)$, il suffit de montrer que $D(.,t_0)$ est une solution du système $(S.R.)$ suivant : $\begin{cases} M' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases}$

** La solution générale de $Y' = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} Y$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = R(t,0)\,C = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{\frac{t^2}{2}} & e^{\frac{t^2}{2}} - e^t \\ 2e^t - 2e^{\frac{t^2}{2}} & 2e^{\frac{t^2}{2}} - e^t \end{pmatrix} C$, avec $C \in \mathbb{R}^2$.

*** On a $R(.,0)$ est une matrice fondamentale.

Contrôle final (2014/2015)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (6pts)

1. Résoudre le système

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E}$$

(1 pt) 2. Quelle est la relation entre la solution générale et l'ensemble de toutes les solutions d'un système différentiel quelconque. Que peut on dire dans le cas du système $Y' = A(t)Y$. Justifier.

Exercice 2 (7pts)

Considérons le système

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} Y. \tag{H}$$

(1 pt) 1. Montrer que la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ est une solution de (H).

(3 pts) 2. Trouver une fonction $\phi \in C^1(I, \mathbb{R})$ pour que la fonction définie sur I par $Y_2(t) = \phi(t)Y_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ soit une solution de (H). Calculer Y_2.

(3 pts) 3. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de (H). Puis, déduire la solution générale du (H).

Exercice 3 (7pts)

Les deux questions sont indépendantes :

(3 pts) 1. Soient $B, C \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ avec $C'(t) = R(0,t)B(t)$ pour tout $t \in I$. Montrer que la fonction définie pour tout $t \in I$ par $Z(t) = R(t,0)C(t)$ est une solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$.

(4 pts) 2. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $M'(t) = A(t) M(t)$ et $\det M(t) \neq 0$. Montrer que M est une matrice fondamentale de $Y' = A(t) Y$.

Correction

Solution 1

1. La solution générale du système (E) est $Y = Y_H + Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé $Y' = AY$ et Y_p est une solution particulière du système (E).

   Calculons Y_H : En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y_H(t) = e^{tA} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

Mais

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = e^{2tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{2t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}. \tag{5.8}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est une matrice nilpotente. Un simple calcul montre que $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$. Donc $e^{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si on remplace dans (5.8) on trouve

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y_H(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme $Y_p(t) = e^{tA}C(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $C'(t) = e^{-tA}B(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Calculons e^{-tA} : Prenons $(-t)$ dans (5.9) pour trouver $e^{-tA} = e^{(-t)A} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Ainsi $C'(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, ceci implique que

$$C(t) = \int C'(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int e^{-2t}dt \\ \int 0dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}e^{-2t} + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Puisque on s'intéresse à une seule solution particulière Y_p alors on considère une seule fonction C, pour cela, on prend par exemple $c_1 = c_2 = 0$. Ceci implique que $C(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $Y_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

2. Au début, on note que, par définition, la solution générale d'un système différentiel quelconque est une famille de solutions indicées par des constantes : Par exemple, si on utilise le changement de variable $z = 1 - y^2$ on peut montrer que la solution générale de l'équation $y^2 + (yy')^2 = 1$ est définie par $y(t) = \pm\sqrt{1 - (t-c)^2}$ avec $c \in \mathbb{R}$ et il existe d'autres solutions $y_1 = 1$ et $y_2 = -1$ qui n'appartiennent pas à cette famille. Ces deux solutions sont appellé des solutions singulières.

   Pour les systèmes quelconques : la solution générale **est inclus** dans l'ensemble de toutes solutions.

   Pour les systèmes de la forme $Y' = A(t)Y$: la solution générale **est égale** à l'ensemble S_H qui est l'ensemble de toutes les solutions de (H) car $S_H = [\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}]$. Notons ici que par définition $[\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}]$ est une solution générale.

Solution 2

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Y_1^{'}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A(t)\,Y_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $Y_1^{'}(t) = A(t)\,Y_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H).

2. On a

$$\begin{aligned} Y_2^{'}(t) &= \left(\phi(t)\,Y_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right)^{'} = \phi^{'}(t)\,Y_1(t) + \phi(t)\,Y_1^{'}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2\phi^{'}(t) \\ -t\phi^{'}(t) + 1 \end{pmatrix} + \phi(t)\,A(t)\,Y_1(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A(t)\,Y_2(t) &= A(t)\left(\phi(t)\,Y_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) \\ &= \phi(t)\,A(t)\,Y_1(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\ &= \phi(t)\,A(t)\,Y_1(t) + \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
[Y_2 \text{ est une solution de } (H).] &\iff \left[Y_2'(t) = A(t)\, Y_2(t)\,, \forall t \in I.\right] \\
&\iff \left[\begin{pmatrix} t^2\phi'(t) \\ -t\phi'(t)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}, \forall t \in I.\right] \\
&\iff \left(\left[\begin{cases} t^2\phi'(t) = -t \\ -t\phi'(t)+1 = 2 \end{cases}, \forall t \in I.\right]\right) \\
&\iff \left[\phi'(t) = \frac{-1}{t}, \forall t \in I.\right] \\
&\iff \left[\phi(t) = -\ln|t| + c = -\ln t + c, \forall t \in I\right].
\end{aligned}$$

Puisque on s'interesse à une seule fonction ϕ on prend $c = 0$. Ainsi, $\phi(t) = -\ln t$ pour tout $t \in I$.

Calculons Y_2 : On a

$$\begin{aligned}
Y_2(t) &= \phi(t)\, Y_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t(\ln t + 1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. *Montrons que* $\{Y_1, Y_2\}$ *est un système fondamental de* (H) *:* On a Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (H). D'autre part, on a

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t(\ln t + 1) \end{pmatrix} = t^3 \neq 0$$

pour tout $t \in I$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système linéairement indépendants.

Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H) alors pour tout

$t \in I$ on a

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = \begin{pmatrix} (c_1 - c_2 \ln t)\, t^2 \\ (c_2 (\ln t + 1) - c_1)\, t \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution 3

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} Z'(t) &= (R(t,0)\, C(t))' = \left(\frac{d}{dt} R(t,0)\right) C(t) + R(t,0)\, C'(t) \\ &= (A(t)\, R(t,0))\, C(t) + R(t,0)\, (R(0,t)\, B(t)) \\ &= A(t)\, (R(t,0)\, C(t)) + (R(t,0)\, R(0,t))\, B(t) \\ &= A(t)\, Z(t) + R(t,t)\, B(t) \\ &= A(t)\, Z(t) + I_n B(t) = A(t)\, Z(t) + B(t). \end{aligned}$$

   C'est à dire $Z'(t) = A(t)\, Z(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$. Ceci implique que Z est une solution de $Y' = A(t)\, Y + B(t)$.

2. Soient $Y_1, ..., Y_n$ les colonnes de M. Puisque, pour tout $t \in I$, on a $M'(t) = A(t)\, M(t)$ alors (voir Exercice 2 Question 1 Rattrapage 12/13) $Y_1, ..., Y_n$ sont des solutions de (H). D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $W(t) := \det (Y_1(t) ... Y_n(t)) = \det M(t) \neq 0$ alors $Y_1, ..., Y_n$ sont linéairement indépendantes.

Rattrapage (2014/2015)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO II)

Exercice 1 (8pts)

Considérons le système

$$Y^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y. \tag{H}$$

1. Utiliser la méthode spectrale puis la méthode de l'exponentielle pour résoudre le système (H).
2. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 2 (12pts)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation

$$y^{''} + ay^{'} + by = 0. \tag{h}$$

1. On pose $y_1 = y, y_2 = y^{'}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Montrer que y est une solution de (h) si et seulement si Y est une solution de $Y^{'} = AY$....... (H)
2. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $r^2 + ar + b = 0$..... (C).
3. Montrer que si (C) admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 alors la solution générale de (H) est définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Déduire la solution de (h).
4. Montrer que si (C) admet une racine double λ alors la solution générale de (H) est définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ (1 + \lambda t) e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ avec

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Déduire la solution de (h).

Correction

Solution 1

1. *Méthode spectrale :* On a $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de A et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres associés. Ainsi, la solution générale est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$Y(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} - 2c_1 e^{-t} \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Méthode de l'exponentielle de matrice : Puisque A admet deux valeurs propres distinctes alors $A = PDP^{-1}$. Ici $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - cb = 3 \neq 0$. On a $P^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de (H) est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$Y(t) = e^{tA}C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

2. Les deux formules nous donnent le même ensemble. En effet,

$$\forall C \in \mathbb{R}^2, \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \left(\text{Ici } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}^{-1} C \right) : e^{tA}C = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + c_2V_2e^{\lambda_2 t}$$

et

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \exists C = c_1V_1 + c_2V_2 \in \mathbb{R}^2 : e^{tA}C = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + c_2V_2e^{\lambda_2 t}.$$

Solution 2

1. On a

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y'' \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Alors

$$\begin{aligned}
[y \text{ est une solution de } (h)] &\iff \left[y'' = -ay' - by\right] \iff \left[y'' = -ay_2 - by_1\right] \\
&\iff \left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -ay_2 - by_1 \end{pmatrix}\right] \\
&\overset{(5.10)}{\iff} \left[Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] \\
&\iff \left[Y' = AY\right] \\
&\iff [Y \text{ est une solution de } (H)].
\end{aligned}$$

2. On a

$$
\begin{aligned}
(\lambda \text{ est une valeur propre de } A) &\iff (det\,(A-\lambda I)=0)\\
&\iff \left(det\begin{pmatrix} -\lambda & 1\\ -b & -a-\lambda\end{pmatrix}=0\right)\\
&\iff \left(\lambda^2+a\lambda+b=0\right)\\
&\iff \left(\lambda \text{ est une racine de } r^2+ar+b=0\right)
\end{aligned}
$$

3. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $Y_1(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\end{pmatrix}$ et $Y_2(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$.

   Pour montrer que la solution générale de (H) est définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par $Y(t)=c_1\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$ il suffit de montrer que $\{Y_1,Y_2\}$ est un système fondamental de (H).

   Trouvons y la solution de (h) : On a

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} &= Y(t)=c_1\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}\\ c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

   Alors, $y_1(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$. Mais $y(t)=y_1(t)$ donc $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$.

4. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $Y_1(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t}\\ \lambda e^{\lambda t}\end{pmatrix}$ et $Y_2(t)=\begin{pmatrix} te^{\lambda t}\\ (1+\lambda t)\,e^{\lambda t}\end{pmatrix}$. Il suffit de montrer que $\{Y_1,Y_2\}$ est un système fondamental de (H).

   Comme la question 3, on trouve la solution de (h) est définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par $y(t)=(c_1+c_2t)\,e^{\lambda t}$ avec $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Contrôle final (2015/2016)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO)

Exercice 1 (7pts)

1. Résoudre le système $Y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Y..........(H)$
2. Déterminer la matrice résolvante, une matrice fondamentale et un système fondamental du système (H).

Exercice 2 (6pts)

Sans calculer la solution, justifier l'existence de la solution maximale unique φ de l'équation $y' = y^4$ qui vérifie $\varphi(0) = 1$. Puis, montrer que φ est une fonction croissante et strictement positive sur son intervalle de définition.

Exercice 3 (7pts)

Répondre par vrai ou faux. Justifier la proposition vrai et corriger la proposition fause :

1. Toute solution globale de l'équation $y' = f(t, y)$ est maximale.
2. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz.
3. Soit y la solution de l'équation $y' = -y^2$ définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$. On a y est maximale.
4. Les solutions de l'équation $y' = e^t y + y^2$ sont de classe $C^3(J)$.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $e^{A+B} = e^A e^B$.
6. Le système $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y$ est asymptotiquement stable.

Correction

Solution 1

1. La solution du système $Y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Y$ est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$. Ici $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} -2t & t \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} = e^{-2tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{-2t} e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

On peut facilement montrer que $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 2$ alors

$$e^{tA} = e^{-2t}\left(I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} \right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

2. *La matrice résolvante :* Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$. On a $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A} = \begin{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} & (t-t_0)e^{-2(t-t_0)} \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{pmatrix}$

Une matrice fondamentale M : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M(t) = R(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Un système fondamental $\{Y_1, Y_2\}$: Puisque Y_1 et Y_2 sont les colonnes de la matrice fondamentale alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Solution 2

Justifions l'existence de la solution maximale unique φ de l'équation $y^{'} = y^4$ qui vérifie $\varphi(0) = 1$: Puisque la fonction f définie par $f(t, y) = y^4$ est continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. De plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ alors elle est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont vérifiées.

Montrons que φ est une fonction croissante : Puisque $y^{'} = y^4$ et $y^4 \geq 0$ ainsi $y^{'} \geq 0$.

Montrons que φ est strictement positive : Soit ψ la solution maximale nulle de $y^{'} = y^4$. Puisque $\psi(0) \neq \varphi(0)$. Donc, ψ et φ sont deux solutions maximales différentes de $y^{'} = y^4$. Ce qui implique que leurs graphes ne se coupent pas. Ainsi, le graphe de φ est ou bien en dessus ou bien en dessous de l'axe des abscisses qui est le graphe de la fonction nulle ψ. Puisque $\varphi(0) = 1 > 0$ alors le graphe de φ est en dessus. Ainsi, φ est une fonction strictement positive sur son intervalle de définition.

Solution 3

1. Toute solution globale de l'équation $y^{'} = f(t, y)$ est maximale. **Vrai** car la solution globale est définie sur l'intervalle tout entier qui est l'intervalle de définition le plus grand possible.
2. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz.

   Vrai car $f \in C^1(I \times \Omega) \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \times \Omega \\ \text{et} \\ f \text{ est localement Lipschitzienne, par rapport à } y \\ \text{uniformément par rapport à } t, \text{ sur } I \times \Omega \end{cases}$
3. Soit y la solution de l'équation $y^{'} = -y^2$ définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$. On a y est maximale. **Vrai** car $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{t}$ n'existe pas.
4. Les solutions de l'équation $y^{'} = e^t y + y^2$ sont de classe $C^3(J)$. **Vrai** car la fonction définie par $f(t, y) = e^t y + y^2$ est de classe C^2.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $e^{A+B} = e^A e^B$. **Faux :** *Correction* Si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

6. Le système $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y$ est asymptotiquement stable. **Vrai** car les valeurs propre de $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$ et on a $\operatorname{Re}\lambda_1 = -1 < 0$ et $\operatorname{Re}\lambda_2 = -2 < 0$. Toutes les valeurs propre de $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ont une partie réelle strictement négative.

Rattrapage (2015/2016)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques,

3 ème année Maths (Module EDO)

Exercice 1 (10 pts) Les questions suivantes sont indépendantes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Que veut dire y est une solution définie sur $[a, b]$ de l'équation $y' = f(t, y)$.
2. Est ce que la solution y définie sur $]1, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ de l'équation $y' = y^2$ est une solution maximale (Justifier). Est ce que c'est une solution globale (Justifier).
3. Montrer que toutes les solutions de $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ sont globales.
4. Soit $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $B \in M_p(\mathbb{R})$, $C \in M_q(\mathbb{R})$ et $p+q = n$. Montrer que la résolvante de $Z' = AZ$ vérifiée $R_A(t, t_0) = \begin{bmatrix} R_B(t, t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t, t_0) \end{bmatrix}$ où $R_B(t, t_0)$ (resp. $R_C(t, t_0)$) est la résolvante de $X' = BX$ (resp. de $Y' = CY$).
5. A est une matrice à coefficients constant. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $e^{\lambda t}$ est une valeur propre de e^{At}.

Exercice 2 (8 pts) Résoudre les systèmes suivants (Préciser si la solution est générale ou particulière) :

1. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y.$
2. $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$
3. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

Exercice 3 (2pts) Etudier la stabilité de l'origine du système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2^2 + y_1 \cos y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2 + (y_1 + 1) y_1 + y_1 \sin y_2. \end{cases}$$

Correction

Solution 1

1. y est une solution définie sur $[a, b]$ de l'équation $y' = f(t, y)$ veut dire que y est dérivable sur $[a, b]$, $y'_d(a) = f(a, y(a))$, $y'_g(b) = f(b, y(b))$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in]a, b[$.
2. Puisque $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} 1} y(t) = -\infty$ c'est à dire $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} 1} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.

   Puisque $I = \mathbb{R}$ et $J =]1, +\infty[$ alors $I \neq J$. Ainsi, y n'est pas une solution globale.
3. Voir cours ch 1.
4. Puisque R_B (resp. R_C) est la résolvante de $X' = BX$ (resp. de $Y' = CY$) alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}R_B(t,t_0) = BR_B(t,t_0) \\ R_B(t_0,t_0) = I_p \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{d}{dt}R_C(t,t_0) = CR_C(t,t_0) \\ R_C(t_0,t_0) = I_q \end{cases}$$ Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}R_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} BR_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & CR_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} \\
&= A\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

C. à d.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} R_B & 0 \\ 0 & R_C \end{bmatrix}(t_0,t_0) &= \begin{bmatrix} R_B(t_0,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t_0,t_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = I_{p+q} = I_n.
\end{aligned}$$

C. à d.

$$\begin{bmatrix} R_B & 0 \\ 0 & R_C \end{bmatrix}(t_0,t_0) = I_n. \tag{5.12}$$

De (5.11) et (5.12), on trouve $R_A(t,t_0) = \begin{bmatrix} R_B(t,t_0) & 0 \\ 0 & R_C(t,t_0) \end{bmatrix}$

5. Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Donc $AV = \lambda V$. On a

$$e^{At}V = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}\right) V = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} V = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k V.$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k V = \lambda^k V$. Donc

$$\begin{aligned} e^{At}V &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k V = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda^k}{k!}\right) V \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) V = e^{\lambda t} V. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $e^{\lambda t}$ est valeur propre de e^{At}.

Solution 2

1. La solution générale du système $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$: On a $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1, λ_2. Donc

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. La solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$, avec $t_0 = 0$

et $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. C. à dire $Y(t)=e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}Y_0$. Mais $e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}=e^{2tI_2+0_2}=e^{2t}e^{0_2}=e^{2t}I_2$. Alors $Y(t)=e^{2t}I_2Y_0=e^{2t}Y_0$.

3. La solution générale du système $Y'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix}$ est $Y=Y_H+Y_p$ avec Y_H est la solution générale du système homogène associé et Y_p est une solution particulière du système considéré.

   Calculons Y_H : On a $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1,λ_2. Donc

$$\begin{aligned} Y_H(t) &= c_1V_1e^{\lambda_1 t}+c_2V_2e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^t \\ c_2e^{2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   avec $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

   Calculons Y_p : On utilise la méthode de la variation de la constante. Il existe une solution particulière sous la forme

$$Y_p(t)=c_1(t)V_1e^{\lambda_1 t}+c_2(t)V_2e^{\lambda_2 t}, \tag{5.13}$$

   avec c_1 et c_2 deux fonctions dérivables telles que $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}=M^{-1}B$, où M est une matrice fondamentale du système homogène et B le second membre du système non homogène. On pose $Y_1(t)=V_1e^{\lambda_1 t}$ et $Y_2(t)=V_2e^{\lambda_2 t}$. Puisque $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$

sont deux valeurs propres distinctes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental. Donc $M = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1^{'}(t) \\ c_2^{'}(t) \end{pmatrix} &= M^{-1}(t)\, B(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} B(t) \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_1^{'}(t) = 1$ et $c_2^{'}(t) = t$. Ainsi, $c_1(t) = t$ et $c_2(t) = \frac{1}{2}t^2$. Si on remplace dans (5.13) on trouve

$$Y_p(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Y_H(t) + Y_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (c_1 + t)\, e^t \\ \left(c_2 + \frac{1}{2}t^2\right) e^{2t} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. La solution du système $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ est

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\, du,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. C. à dire

$$Y(t) = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du.$$

On a $e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, avec $\begin{bmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls. On vérifie facilement que $\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$. On a

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & t-t_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & t-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} du \\ \int_{t_0}^{t} 0du \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} t-t_0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Solution 3

Le système linéarisé au voisinage de l'origine est $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A admet une valeur propre double $\lambda = 1$. Donc, elle admet une valeur propre à partie réelle strictement positive donc le système nonlinéaire est instable aussi.

Interrogation (2016/2017)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques

3 ème année Maths

Equations différentielles ordinaires

1. Les fonctions suivantes sont elles localement Lipschitzienne en y : $f_1(t,y) = \ln(t^2+y^2+1)$, et $f_2(t,y) = |y|\cos(t^2+1)$, $f_3(t,y) = \cos(t^2+y^2)$ et $f_4(t,y) = |y|\sin t^3$.
2. Montrer que la fonction φ définie sur $]-\infty, 2[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$ est une solution maximale de l'équation $y' = y^3$. Même question pour la fonction ψ définie sur $]2, +\infty[$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$.
3. Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t(y+1)^6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ....(P)
   (a) Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale φ définie sur $]S, T[$.
   (b) Montrer que $\varphi \in C^1(]S,T[)$.
   (c) Montrer que φ est monotone sur $[0, T[$.
   (d) Montrer que φ est positive sur $[0, T[$.

Correction

1. *Pour* f_1 : Puisque $\underbrace{f_1 \text{ est la composition de deux fonctions de classe } C^1}_{(0{,}5pt)}$ alors $\underbrace{f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)}_{(0{,}5pt)}$.
   Ainsi elle est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$. De même pour f_3.
   Pour f_2 : Soient $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Soient $T_0, r_0 > 0$. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$(0,75pt)\begin{cases} |f_2(t,y_1) - f_2(t,y_2)| = |\cos(t^2+1)|\,||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2| \\ \text{car } |\cos(t^2+1)| \leq 1 \text{ et } ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|. \end{cases}.$$

Ainsi, on a montré que

$$(0,25pt)\begin{cases} \forall (t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \exists T_0, r_0>0, \exists k=1>0 : \\ \forall t\in[t_0-T_0,t_0+T_0], \forall y_1,y_2\in[y_0-r_0,y_0+r_0] : \\ |f_2(t,y_1)-f_2(t,y_2)|\le k|y_1-y_2| \end{cases}.$$

Ceci implique que f_2 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$. De même pour f_4.

2. Pour tout $t\in\left]-\infty,2\right[$, on a

$$(0,5pt)\begin{cases} \varphi'(t)=\left((2(2-t))^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(-2)(2(2-t))^{-\frac{3}{2}}=(2(2-t))^{-\frac{3}{2}}, \\ \varphi^3=\left(\frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}\right)^3=(2(2-t))^{\frac{-3}{2}}. \end{cases}$$

Ainsi, $\underbrace{\text{pour tout } t\in J, \text{ on a } \varphi'(t)=\varphi^3(t)}_{(0,25pt)}$. Ainsi, $\underbrace{\varphi \text{ est une solution de } y'=y^3}_{(0,25pt)}$.

Puisque $\underbrace{\lim_{t\overset{<}{\longrightarrow}2}\varphi(t)=\lim_{t\overset{<}{\longrightarrow}2}\frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}}_{(0,5pt)}=+\infty$ (limite n'existe pas) alors $\underbrace{\varphi \text{ est maximale sur }]-\infty}_{(0,5pt)}$

De même pour ψ.

3. Le problème (P) est un problème de Cauchy sous la forme $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ avec f est une fonction définie sur $I\times\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ par $f(t,y):=t(y+1)^6$. $t_0=0$ et $y_0=1$.

   (a) On a

   $*\underbrace{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2}_{(0,25pt)}$ car $\underbrace{\text{c'est le produit de deux fonctions continues sur } \mathbb{R}^2}_{(0,25pt)}$.

   $**$ $\underbrace{f \text{ est localement Lipschitzienne en } y \text{ sur } \mathbb{R}^2}_{(0,25pt)}$ car $\underbrace{f\in C^1(\mathbb{R}^2)}_{(0,25pt)}$.

   $***$ $(t_0,y_0)=(0,1)\in\mathbb{R}^2$.

   Alors, le problème (P) admet une unique solution maximale φ définie sur un intervalle J. En plus, $J=\left]S,T\right[$

(b) $\varphi \in C^1(]S,T[)$ car $\underbrace{f \in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)}_{(1pt)}$.

(c) On a $\underbrace{\varphi' = t(\varphi+1)^6 \geq 0 \text{ sur } [0,T[}_{(0,5pt)}$ alors $\underbrace{\varphi \text{ est croissante sur } [0,T[}_{(0,5pt)}$ ainsi elle est monotone.

(d) Soit $t \in [0,T[$ alors $t \geq 0$. Puisque $\underbrace{\varphi \text{ est croissante sur } [0,T[}_{(0,5pt)}$ alors $\underbrace{\varphi(t) \geq \varphi(0) = 1}_{(0,5pt)}$.

Ainsi $\varphi \geq 0$ sur $[0,T[$.

QUELQUES TYPE DE QUESTIONS

Equations du premier ordre

1. Montrer que la fonction f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$.

2. Montrer que la fonction f n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$.

3. La fonction f est elle localement Lipschitzienne en y.

4. Utiliser le théorème de Cauchy Lipschitz pour démontrer que la fonction f n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$..

5. Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{F}\left(t, \ y, \ y', \ \cdots, \ y^{(n)} \right) = 0$. *(Pour répondre à ce type de question, on trouve la classe où cette équation appartient puis on utilise la méthode de résolution relative à cette classe).*

6. Montrer que les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont satisfaites.

7. Etudier l'existence et l'unicité de la solution maximale y de l'équation $y' = f(t, y)$ qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

8. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale unique y de $y' = f(t, y)$ qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

9. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution locale.

10. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

11. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique.

12. Montrer que la solution de $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ est globale.

13. Montrer que toutes les solutions de $y' = f(t,y)$ sont globales.

14. Montrer que y est une solution sur J de l'équation $y' = f(t,y)$.

15. Montrer que y est une solution sur J du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

16. Soit y une solution sur J de l'équation $y' = f(t,y)$. Montrer que y est une fonction continue sur J.

17. Soit y une solution sur J de l'équation $y' = f(t,y)$. Montrer que y est une fonction de classe $C^m(J)$. Ici $m \in \mathbb{N}^*$.

18. Est ce que la fonction y est une solution maximale de l'équation $y' = f(t,y)$.

19. Montrer que l'intervalle de définition J de la solution maximale de l'équation $y' = f(t,y)$ est de la forme $]-T,T[$.

20. Montrer que la solution est croissante (décroissante).

21. Montrer que la solution est positive (négative).

22. Montrer que la solution est impaire (paire).

23. Soit y une solution maximale définie sur $]S,T[$. Montrer que $T = +\infty$.

24. Soit y une solution maximale définie sur $]S,T[$. Montrer que T est fini.

25. Soit y une solution maximale définie sur $]S,+\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe et vaut à zéro.

26. Soit y une solution maximale définie sur $]S,T[$. Montrer que $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} T} y(t) = +\infty$.

Systèmes linéaires à coefficients variables

1. Ecrire le système sous la forme $Y' = A(t)Y$.

2. Calculer la résolvante du système $Y' = A(t)Y$.

3. Montrer que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système fondamental de solutions de $Y' = A(t)Y$.

4. Trouver S_H l'ensemble de toutes les solutions du système $Y' = A(t)Y$;
5. Soit $D(.,t_0)$ une fonction matricielle donnée. Montrer $R(t,t_0) = D(t,t_0)$ pour tout $t, t_0 \in I$.
6. Montrer que la matrice M est une matrice fondamentale de $Y' = A(t)Y$. Donner une autre matrice fondamentale pour ce système.
7. Déterminer la solution (générale) du système $Y' = A(t)Y$.
8. Déterminer la solution (générale) du système $Y' = A(t)Y + B(t)$.
9. Déterminer la solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$
10. Déterminer la solution du système : $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

Systèmes linéaires à coefficients constants

1. Calculer l'exponentielle de la matrice A.
2. Déterminer la matrice résolvante du système $Y' = AY$.
3. Déterminer un système fondamental du système $Y' = AY$.
4. Déterminer une matrice fondamentale du système $Y' = AY$.
5. En utilisant la méthode de l''exponentielle, trouver la solution générale du système $Y' = AY$.
6. En utilisant l'approche spectrale, trouver la solution générale du système $Y' = AY$.
7. En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système $Y' = AY + B(t)$.
8. En utilisant la méthode spectrale sur le système homogène, résoudre le système $Y' = AY + B(t)$.
9. Déterminer la solution (générale) du système $Y' = AY$.
10. Déterminer la solution (générale) du système $Y' = AY + B(t)$.

11. Déterminer la solution du système $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

12. Déterminer la solution du système $\begin{cases} Y' = AY + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$

13. Montrer que Y est **la** solution de $Y' = AY$.

14. Montrer que Y est **une** solution de $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$.

Stabilité

1. Trouver les points d'équilibre de $X' = f(X)$.
2. Etudier la stabilité de l'origine (des points d'équilibre) du système $X' = f(X)$.
3. Etudier la stabilité du système $X' = f(X)$.
4. Utiliser la méthode de la fonction de Liapunov pour étudier la stabilité du système $X' = f(X)$.
5. Utiliser la méthode de linéairisation pour étudier la stabilité du système $X' = f(X)$.
6. Utiliser la méthode de la fonction de Liapunov pour étudier la stabilité de l'origine (des points d'équilibre) du système $X' = f(X)$.
7. Utiliser la méthode de linéairisation pour étudier la stabilité de l'origine (des points d'équilibre) du système $X' = f(X)$
8. Etudier la stabilité du système $X' = AX$.

Références :

[Be] S. Benzoni, Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés. Dunod Paris 2010

[Cr] G. Croce, Cours Equations différentielles ordinaires Master Maths-Info à l'Université du Havre

[De] J. P. Démaily, Analyse numérique et équations différentielles

[Le].G. Leborgne, Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année (http ://www.isima.fr/leborgne) Équations différentielles

[Ra] T.. Raoux, Equations différentielles : (Année 2007-2008, 2^{e}esemestre).