قسم الرياضيات والإعلام آلي
السنة الثالثة رياضيات S5.

جامعة أم البواقي
السلسلة رقم 01

المادة: المعادلات التفاضلية
2020 - 2021

**تمرين (01): برهان التوطئة 1.2.1: ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$**

1) $(y, J_1 = ]\alpha, +\infty[)$ حل للمعادلة $y' = f(t,y)$ (1,1) والنهاية $\lim\limits_{t \to \alpha} y(t)$ غير موجودة. اذن $(y, J_1)$ حل أعظمي.

2) $(y, J_2 = ]-\infty, \beta[)$ حل للمعادلة $y' = f(t,y)$ (1,1) والنهاية $\lim\limits_{t \to \beta} y(t)$ غير موجودة. اذن $(y, J_2)$ حل أعظمي (تترك للطلبة).

**تمرين (02): برهان التوطئة 1.4.1: ليكن $J$ مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $t_0 \in J$ و $y: J \to \mathbb{R}$** مستمر على $J$ يكون $(y, J)$ حل مسألة كوشي (3,1) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ اذا وفقط اذا تحقق:

1/ $(t, y(t)) \in I \times \Omega, \ \forall t \in J$

2/ $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du$

**تمرين (03): برهان توطئة قرونوال Gronwall**

| |
|---|
| ليكن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ حيث $a \leq b$ و $d \geq 0$ و $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b])$ تحقق<br>$\varphi(t) \leq c + d\int_a^t \varphi(u)\, du \quad , \forall t \in [a,b]$<br>ومنه<br>$\varphi(t) \leq c\, e^{d(t-a)} \quad , \forall t \in [a,b]$. |

من أجل ذلك نضع $h(t) = c + d\int_a^t \varphi(u)\, du$

1/ برهن أن $h \in C^1([a,b])$، واحسب مشتقتها $h'$؛

2/ برهن أن $h'(t) \leq d\, h(t) \quad , \forall t \in [a,b]$ ثم إستنتج
$h(t) \leq c\, e^{d(t-a)} \quad , \forall t \in [a,b]$.

3/ إستنتج: $\varphi(t) \leq c\, e^{d(t-a)} \quad , \forall t \in [a,b]$.

**تمرين 04: ليكن $I$ مجال من $\mathbb{R}$، $\Omega$ مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}$**

1/ من أجل $k \in \mathbb{N}$ برهن أنه إذا كان $f \in C^k(I \times \Omega)$ اذن جميع حلول $(y, J)$ للمعادلة (1,1) $y' = f(t,y)$ من صنف $C^{k+1}(J)$

2/ برهن أن $J_{max}$ المجال الأعظمي مفتوح في $\mathbb{R}$.

**تمرين 05**

1/ برهن أن الدالة $f(t,y) = t^2 + y^2$ لبشيتزية محليا بالنسبة لـ $y$ بانتظام بالنسبة لـ $t$ على $\mathbb{R}^2$.

2/ برهن أن الدالة $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ ليست لبشيتزية محليا بالنسبة لـ $y$ بانتظام بالنسبة لـ $t$ على $\mathbb{R}^2$.

**تمرين 06**: برهن أن الدوال التالية لبشيتزية محليا بالنسبة لـ $y$ بانتظام بالنسبة لـ $t$ على مجموعات من الشكل $I \times \Omega$:

$f_1(t,y) = e^{ty}$ ، $f_2(t,y) = y\, e^{t^2}$ ، $f_3(t,y) = t\sqrt{|y|}$ ،

$f_4(t,y) = \sin(ty)$ $\quad f_5(t,y) = |y| \ln(1+t^2)$.