Chapitre 3
Phénomènes dépendant du temps et Equations de Maxwell

3-1 Loi de Faraday

C'est une généralisation basé sur des considérations expérimentales.

La loi de faraday s'énonce ainsi :

Un circuit fermé traversé par un flux magnétique φ est le siège d'une f.e.m d'induction exprimée par l'équation :

$$e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t}$$

Le signe « – » traduit la loi de Lenz :

- Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux qui lui a donné naissance.
- La f.e.m d'induction peut être défini comme la circulation sur le circuit fermé (c) d'un champ électromoteur :

$$e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \oint \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

3-2 Equation de maxwell Faraday

On a :

$$e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \oint \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

et : φ le flux magnétique qui est donné par l'expression : $\varphi = \iint \vec{B}\,\overrightarrow{ds}$

Donc :

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = -\frac{d\,\varphi}{d\,t} = -\frac{d}{d\,t}\iint \vec{B}\,\overrightarrow{ds}$$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = \iint \overrightarrow{Rot}\vec{E}\,.\overrightarrow{ds} \quad \Rightarrow \iint \overrightarrow{Rot}\vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{ds}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Equation de Maxwell – Faraday}$$

Remarque :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad avec \quad \vec{B} = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{Rot}\vec{A})}{\partial t} = \overrightarrow{Rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \overrightarrow{Rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

On peut dire qu'il existe un potentiel scalaire V tels que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le champ électrique dérive d'un potentiel électrique scalaire et d'un potentiel vecteur magnétique

3-3 Loi de Maxwell-Ampère

D'après le théorème d'Ampère $\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_i I_i$

On peut écrire :

$$\oint \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{Rot}\vec{B}.\overrightarrow{ds} = \mu_0 \sum_i I_i$$

$$\sum_i I_i = \iint J.ds$$

$$\Rightarrow \iint \overrightarrow{Rot}\vec{B}.\overrightarrow{ds} = \mu_0 \iint \vec{J}.\overrightarrow{ds}$$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\ \vec{J} \quad \Rightarrow Equation\ \ de\ Maxwell - Ampère$$

En régime stationnaire :

$$div(\overrightarrow{Rot}\vec{B}) = \mu_0\ div\vec{J}$$

et l'analyse vectorielle montre que la divergence d'un rotationnel est toujours identiquement nulle :

$$div(\overrightarrow{Rot}\vec{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad div\vec{J} = 0$$

Mais en régime variable nous avons : $div\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Avec : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \rho = \varepsilon.div\vec{E}$

On peut écrire : $div\vec{J} = -\varepsilon\ div\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \quad div\left(\vec{J} + \varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$

Par conséquent, on peut écrire l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\ \vec{J} + \mu_0\ \varepsilon\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que : $\vec{D} = \varepsilon\ \vec{E}$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\ \vec{J} + \mu_0\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Où ***J*** est le courant de conduction et $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ est le courant de déplacement.

Remarque : $div\vec{D} = \rho_{libres}$

Résumé

Les quatre équations de Maxwell

1. Équation de Maxwell-Gauss: le flux de champ électrique à travers une surface fermée est relié à la charge électrique contenue à l'intérieur de la surface.

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

2. Équation de conservation du flux: le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermé est nul:

$$div\vec{B} = 0$$

3. Équation de Maxwell-Faraday: relation entre la circulation du champ électrique sur un contour fermé et variation temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce contour.

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

4. Équation de Maxwell-Ampère: relation entre la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et le flux de courant à travers une surface s'appuyant sur ce contour.

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \mu_0\,\varepsilon\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Avec :

$div\vec{D} = \rho_{libres}$

$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$

$\vec{B} = \mu\,\vec{H}$