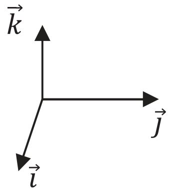
Chapitre 0: Eléments d'analyse vectorielle

0.1.Champ vectoriel

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un Trièdre direct (c'est-a-dire $\vec{k}$ dans le sens de $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$)



- **Produit scalaire**

$$\vec{A}.\vec{B} = A.Bcos(A,B)$$

Avec $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$

A=$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

- **Produit vectoriel**

$\boldsymbol{\vec{A} \wedge \vec{B} = A.B.sin(A,B).}$

0.2.Champ scalaire

La fonction $f\,(M)$ est dite fonction scalaire si :

$\boldsymbol{f(M) = f(x,y,z)}$

- **Gradient d'un champ scalaire**

Soit une fonction scalaire $f(x,y,z)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).f.(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

Avec $\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \vec{\nabla}$ ($\vec{\nabla}$est l'opérateur nabla)

On définit le gradient d'un champ scalaire par :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

0.3.Divergence d'un vecteur :

Pour un champ de vecteur $\vec{A}$:

$$\boldsymbol{div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

0.4. Rotationnel :

Définition :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

Propriétés :

- C'est un pseudo opérateur (il dépend de la convention d'orientation choisie). Si $\vec{A}$ est un vecteur vrai, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ sera un pseudo vecteur.

0.5. Laplacien

1-Laplacien scalaire

Soit *f* un champ scalaire.

On pose alors $\Delta f = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.f) = div\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (en coordonnées cartésiennes).

2-Laplacien vectoriel

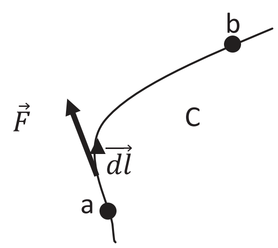
Pour $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{grad}div\vec{A} - \overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A} - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

0.6.Circulation d'un vecteur

Définition : On définit la circulation d'un vecteur $\vec{F}$ le long d'un contour (*C*), par l'intégrale simple :

$$C(\vec{F}) = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



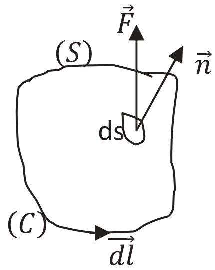
La circulation le long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{F}) = \oint \vec{F}\overrightarrow{dl}$$

0.7.Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur $\vec{F}$ à travers une surface (*S*) par l'intégrale double :

$\emptyset(\vec{F}) = \iint \vec{F}\vec{n}ds$



Lorsque la surface (*S*) est fermée, le vecteur unitaire $\vec{n}$ de la surface est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

0.8.**Théorème de Stockes**

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (*C*) limitant une surface (*S*) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \oiint \overrightarrow{rot}\vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

0.9.**Théorème de la divergence**

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (*S*) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (v), limité par la surface fermée (*S*) :

$$\oiint \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint div\vec{F}dv$$

0.10. Relations importantes

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{grad}f = \vec{0}}$$

$$\boldsymbol{div\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0}$$

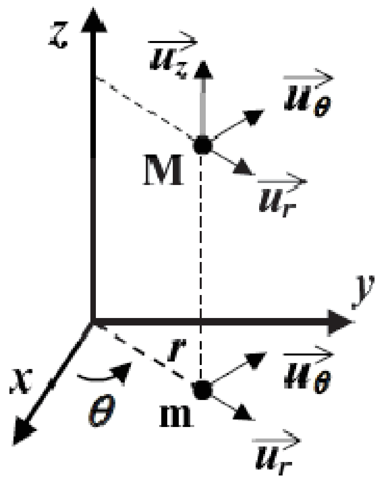
$$\boldsymbol{div(\vec{F} \wedge \vec{K}) = \vec{K}\overrightarrow{rot}\vec{F} - \vec{F}\overrightarrow{rot}\vec{K}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(f.\vec{K}) = f\overrightarrow{rot}\vec{K} + \overrightarrow{grad}(f \wedge \vec{K})}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{Rot}\overrightarrow{Rot}\vec{A} = \overrightarrow{grad}div\vec{A} - \Delta\vec{A}}$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

0.11. Coordonnées cylindriques



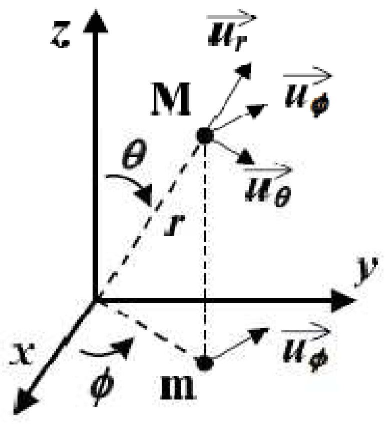
$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial rA_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

0.12. Coordonnées Sphériques



$$\overrightarrow{grad}V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial \emptyset}\vec{u}_\emptyset$$

$$div\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_r}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial sin\theta A_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\emptyset}{\partial \emptyset}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}=\frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial sin\theta.A_\emptyset}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial \emptyset}\right)\vec{u}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \emptyset}-\frac{\partial rA_\emptyset}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\Delta V=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rV}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \emptyset^2}$$