جامعة العربي بالمهيدي- أم البواقي

دروس السنة الأولى رياضيات

بيولوجيا

قواسمية عبد الحميد

2019-2020

مقدمة:

تحتوي هذه المطبوعة على دروس السنة الأولى بيولوجيا في مادة الرياضيات، حيث بـــدأنا بسرد بعض المفاهيم التي سترافقنا طيلة هاته السنة، و من ثم قدمنا بتقديم مفاهيم اساسية حــول الدوال العددية من اشتقاق و استمرارية و كذا أهم التطبيقات لها، و من ثم ختمـــنا بباب التكـــاملات العددية،

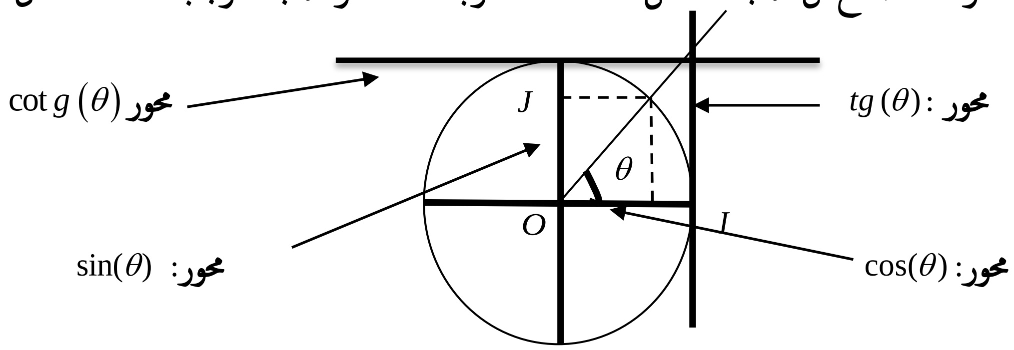
و نشير هنا أننا اعتمدنا في الأمثلة و التمارين على بعض البكالوريا و كـــذا بعض تمارين امتحـانات مقترحة

مـــراجـــعـة عامة:

حول العلاقات المثلثية:

الدائرة المثلثيّة:

نسمي كل دائرة (C) مزودة بـــــــــــــــــــــــــمعلم $(O;I;J)$ طول نصف قطرها 1 وحدة ، و موجــــــــــــــــــــــــــــهة **بالدائرة المثلثيّة**، و قد اصطلح أن الاتجاه المعاكس لعـــــــــــــــــــقارب الساعة هو الاتجاه الموجب، لاحظ الشكل:



من الدائرة المثلثية: $\cos(\theta)$ نسبة المجاور إلى الوتــــر،

$\sin(\theta)$ نسبة المقابل إلى الوتــــر،

$tg(\theta)$ نسبة المقابل إلى المجـــاور(أو نسبة $\sin(\theta)$ إلى $\cos(\theta)$)،

$\cot g(\theta)$ نسبة المجاور إلى المقـــابل (أو نسبة $\cos(\theta)$ إلى $\sin(\theta)$)،

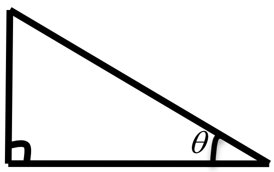
كذلك أمكن كتابة: $-1 \le \sin\theta \le 1$, $-1 \le \cos\theta \le 1$ من أجل عدد حقيقي θ.

جيب و جيب تمام أهم الزوايا الشهيرة:

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos(\theta)$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin(\theta)$

بعض التحولات من cos إلى sin و العكس:

عند ملاحظة المثلث القائم في الشكل المقابل يمكن أن نبين ببساطة:



$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta)$$

و كذلـــك:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$$

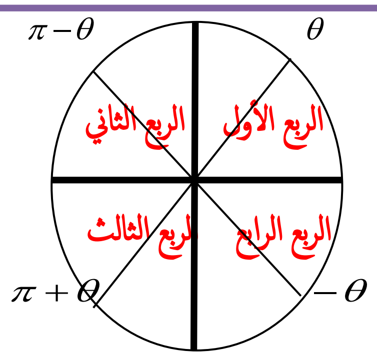
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\cos(-\theta)=\cos(\theta)$$

و منه

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$$

أرباع الدائرة المثلّثية:



و من هاته الدائرة أمكن كتابة:

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\theta)&=-\cos(\theta)\\ \sin(\pi-\theta)&=\sin(\theta)\\ \cos(\pi+\theta)&=-\cos(\theta)\\ \sin(\pi+\theta)&=-\sin(\theta)\end{aligned}$$

$$\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$$
$$\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$$

، $\cos(\theta)=\cos(\theta')$ **يعني** $\begin{cases}\theta=\theta'+2k\pi\\ \theta=-\theta'+2k\pi\end{cases}$

$\sin(\theta)=\sin(\theta')$ **يعني** $\begin{cases}\theta=\theta'+2k\pi\\ \theta=\pi-\theta'+2k\pi\end{cases}$

$tg(\theta)=tg(\theta')$ **يعني** $\theta=\theta'+k\pi$

$cotg(\theta)=cotg(\theta')$ **يعني** $\theta=\theta'+k\pi$ ، **حيث:** $k\in\mathbb{Z}$

cos و sin مجموع زاويتين :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}\quad .\cdots(*)$$

في حالة: $\alpha=\beta$ **تكون العلاقات المهـــمّة:**

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha)&=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\ \sin(2\alpha)&=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}\ ،$$

و كون: $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ ، و بكتابة $\cos^2(\alpha)$ بدلالة $\sin^2(\alpha)$ في هذه العلاقة السابقة ثم كتابة $\sin^2(\alpha)$ بدلالـــة $\cos^2(\alpha)$

نجد العلاقتين: $\begin{aligned}\cos(2\alpha)&=2\cos^2(\alpha)-1\\ \cos(2\alpha)&=1-2\sin^2(\alpha)\end{aligned}$ ،

تحويل الجداء إلى مجموع:

من $(*)$ و بوضع $\alpha+\beta=a$ و $\alpha-\beta=b$ **(لاحظ أن** $\alpha=\frac{a+b}{2},\ \beta=\frac{a-b}{2}$**)**

$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(a)+\cos(b)\right),\quad \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(b)-\cos(a)\right)$$

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin(a)+\sin(b)\right),\quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin(a)-\sin(b)\right)$$

حول الدوال العددية:

أ) تعريف دالة: كل صلة f تربط عنصرا x من $\mathbb{R}$ بعنصر على الأكثر y من $\mathbb{R}$ تسمى دالة،
ندعو : x سابقة أو لاحقة و y صورة السابقة x،

ب) مجموعة تعريف الدالة: السوابق x التي لها صور تسمى مجموعة تعريف الدالة f و نرمز لها بـ: D_f،

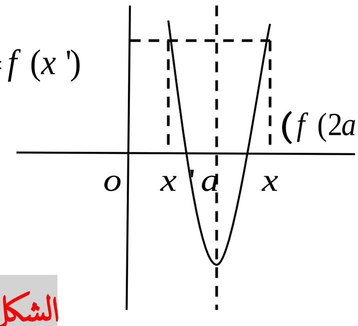
ج) التمثيل البياني للدالة f هو المنحنى المشكل من النقط $M(x;y)$ حيث: $f(x)=y$ و نرمز له عادة بـ: (C_f)،

د) إليك ميزات يمكن أن تتصف بها بعض الدوال:

f دالة معرّفة على D_f ، و تمثيلها البياني (C_f) في معلم متعامد و متجانس:

¤ **محور التناظر:** (لاحظ الشكل 1)

نقول أن $x=a$ محور تناظر **معناه** 1) $x, x' \in D_f$ ، $(x+x'=2a)$،
2) $f(x)=f(x')$ $(f(2a-x)=f(x))$،



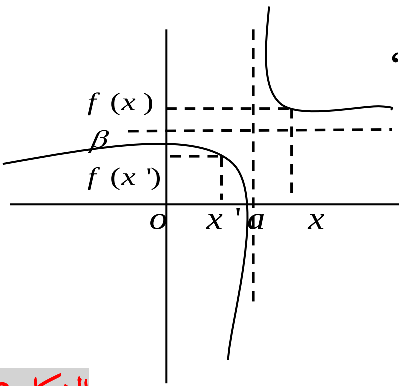
الشكل 1

التفسير الهندسي:

نقول أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم $x=a$

¤ **مركز التناظر :** (لاحظ الشكل 2)

نقول أن $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر **معناه** 1) $x, x' \in D_f$ ، $(x+x'=2\alpha)$،
2) $\frac{f(x)+f(x')}{2}=\beta$ $(f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta)$،



التفسير الهندسي:

نقول أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\omega(\alpha;\beta)$

الشكل 2

حالتان خاصتان (شفعية دالة):

- **الدالة الزوجيّة:**

f دالة زوجيّة **معناه** 1) من أجل كل x من D_f يكون $-x$ من D_f،
2) $f(-x)=f(x)$،

التفسير الهندسي : - يكون بيان الدالة الزوجيّة متناظرا بالنسبة لمحور التراتيب (هذا إثبات ثان للدالة الزوجيّة)،

- **الدالة الفرديّة:** f دالة فرديّة **معناه** 1) من أجل كل x من D_f يكون $-x$ من D_f ،
2) $f(-x)=-f(x)$ ،

التفسير الهندسي : - يكون بيان الدالة الفرديّة متناظرا بالنسبة للمبدإ (هذا إثبات ثان للدالة الفرديّة)،

ملاحظة :

لاحظ أنه لإثبات أن دالة ما زوجيّة أو فرديّة يجب التأكد من الشرطين معا و ليس التأكد من الشرط الثاني فقط، و تقول الدالة شفعية.

الدوال الدورية:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I، و $q\in\mathbb{R}^*$،
من أجل كل عدد حقيقي x من I يكون $x+q\in I$، و تحقق:
$f(x+q)=f(x)$ ، نقول أن الدالة f دورية و نسمي q دورة للدالة f،
و عادة يسمى دورها 'إن وجد' أصغر عدد حقيقي موجب تماما يحقق العلاقة السابقة.

مثال توضيحي لدوال دورية لا تقبل دورا:

إليك الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x)=\begin{cases}0 & ;x\in\mathbb{Q}\\ 1 & ;x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$،

ليكن $x\in\mathbb{R}$: من أجل $q=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$ لدينا الحالتان:

* $x\in\mathbb{Q}$ مـــن الواضـــح أن $x+\dfrac{1}{n}\in\mathbb{Q}$ أي: $\varphi\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=0=\varphi(x)$،

* $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ من الواضح أن $x+\dfrac{1}{n}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ أي: $\varphi\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=1=\varphi(x)$،

و بالتـــالي الخـــلاصة $\varphi\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=\varphi(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x،

و بالتالي $\dfrac{1}{n}$ دورة للدالة φ، و نلاحظ أنه لا يوجد عدد من الشكل السابق يكون هو الأصغر، و بالتالي لا وجود للدور.

بعض الدوال التي كثر استعمالها:

- دالة كثير الحدود: هي تلك الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ مع $a_n\neq 0$ ،
و $a_n, a_{n-1}, a_{n-2},\cdots,a_1, a_0$ من $\mathbb{R}$،
و نسمي n درجة كثير الحدود، و منحنى كل منها يدعى: "قطعا مكافئ"

- الدالة الناطقة: هي كل دالة تكتب على الشكل: $\dfrac{f}{g}$ حيث: f, g دالتا كثير حدود،
و هي معرّفة على $\mathbb{R}$ ما عدا القيم التي تجعل الدالة g معدومة،

- الدالة الصماء: هي تلك الدالة التي تكتب على الشكل: $\sqrt{f(x)}$ حيث: f دالة ليست مربـــــعا تام،
وهي معرّفة على $\mathbb{R}$ ما عدا القيم التي تجعل الدالة f ذات إشارة سالبة تماما،

- الـــدالة $\cos$: هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ نحو المجال $[-1;1]$، بـ $x\mapsto\cos x$ و هي دورية ودورها 2π،

- الـــدالة $\sin$: هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ نحو المجال $[-1;1]$، بـ $x\mapsto\sin x$ و هي دورية ودورها 2π.

ملاحظة:

يمكن أن نصادف بعض الدوال التي تتشكل من مزج للدوال السابقة (تركيب دوال؟) أو دوال أخرى سنـتعرض لها هـذه السنة.

الدوال الرتيبة:

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$،

- f دالة متزايدة تماما على جزء I_1 من I معناه من أجل كل x_1, x_2 من I_1 مثلا:* $x_1 \prec x_2$ يكون $f(x_1) \prec f(x_2)$،
أو* $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ من أجل كل x_1, x_2 من I_1 مختلفين،
- f دالة متناقصة تماما على جزء I_2 من I معناه من أجل كل x_1, x_2 من I_2 مثلا:* $x_1 \prec x_2$ يكون $f(x_1) \succ f(x_2)$،
أو* $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ من أجل كل x_1, x_2 من I_2 مختلفين،

و نقول: "الدالة رتيبة تماما" إذا كانت "متزايدة تماما" أو "متناقصة تماما"،

- f دالة ثابتة على جزء I_3 من I معناه من أجل كل $x_1, x_2 \in I_2$ مثلا: $x_1 \prec x_2$ يكون $f(x_1) = f(x_2)$،
(إذا كانت المتباينات السابقة ليـــست تامة نــــقول أن الدالة f رتيبة).

تركيب دالتين:

g دالة معرفة من I نحو J، و f معرفة من J من D_f في K، f تركيب g و التي سنرمز لها بـ $f \circ g$ و نقرأ: f دائرة g، هي تلك الدالة المعرفة من I في K بـ: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$،

لاحظ هذا المخطط:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "g"] \arrow[d] & J \arrow[r, "f"] & K \\ x \arrow[r] & g(x) \arrow[r] & f(g(x)) = (f \circ g)(x) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

خواص مهمة للقيمة المطلقة:

a, b عددان حقيقيان أو عبارتان جبريتان، و $r \succ 0$:

* $|a| = |b|$ معناه $\begin{cases} a = b \\ \text{أو} \\ a = -b \end{cases}$ "أو" يعني "اتحاد".
* $|a+b| \le |a| + |b|$ أو $|a-b| \le |a| + |b|$،
* $||a|-|b|| \le |a+b|$ أو $||a|-|b|| \le |a-b|$،
* $|x| \le r$ معناه $x \in [-r; r]$،
* $|x| \ge r$ معناه $x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$.

الـــدرس الأول :

لتكن f و g دالتين معرفتين في جوار α حيث: $\alpha\in\mathbb{R}$ أو $\alpha=\pm\infty$ (أي $\alpha=+\infty$ أو $\alpha=-\infty$)

النهايات و الجمع:

- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\in\mathbb{R}\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=b\in\mathbb{R}$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=a+b$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=b\in\mathbb{R}$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty+b=\infty$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$ فإن: $(1)\cdots\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty+\infty$

(لا يمكننا تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)$ دون تحر أكثر في هذه الحالة)

النهايات و الضرب:

- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\in\mathbb{R}\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=b\in\mathbb{R}$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=a\times b$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=b\in\mathbb{R}^*$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty\times b=\infty$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ فـــإن: $(2)\cdots\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty\times 0$،

(لا يمكننا تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\times g(x)\right)$ دون تحر أكثر في هذه الحالة)

- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$، (مع مراعاة الإشارات)

النهايات و القسمة:

- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\in\mathbb{R}\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=b\in\mathbb{R}^*$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{b}$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\in\mathbb{R}^*\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{0}$

نميز حالتين: **1** * $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{0^+}=+\infty\,,a\succ 0$ أو $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{0^+}=-\infty\,,a\prec 0$

2 * $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{0^-}=-\infty\,,a\succ 0$ أو $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{0^-}=+\infty\,,a\prec 0$

- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\in\mathbb{R}\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{a}{\infty}=0$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ فإن: $(3)\cdots\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{0}{0}$
- إذا كان: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty\,,\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$ فـــإن: $(4)\cdots\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$

(لا يمكننا تعيين النهاية $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)/g(x)\right)$ في الحالتين دون تحر أكثر)

نسمي $(1),(2),(3),(4)$ بحالات عـــــدم التعييـــــن أو كميات غير محددة و نلخصها بـ $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0(\pm\infty)$, $+\infty-\infty$ ،
فإذا تحصلنا أثناء حساب النهاية على أحد الكميات الأربع السابقة نكتب" ح ع ت" اختصـــارا للعبارة "حالــــــة عدم التعـيين"،
و يجب علينا سلك سبل أخرى لتعيين النهاية، نذكر على سبيل المثال لا الحصر:
- تغيير شكل الدالة (مثلا: ملاحظة عامل مشترك أو استعمال المرافق. لاحظ التطبيق في آخر الدرس، أو نغير المتغير و ســـــوف نشاهد مثلا هذه الطريقة في التمرين 02 صفحة 88 و سوف نستعملها في مسائل قادمة)،
– مفهـــــــوم الاشتقـــاق (سنتعرف على هذا المفهوم في فصـــــل لاحق لاحــــــظ التمريــن 02 صفحـــة 128)،
– أو:

الخواص:

1) f دالة كثير حدود أي: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ مع $a_n\neq 0$ عندئذ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n)$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$،

لأن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}a_nx^n$ ،

2) f دالة ناطقة أي: $f(x)=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}$ مع $a_m\neq 0, b_n\neq 0$ عندئذ: (حيث n و m من $\mathbb{N}^*$)،

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

لاحظ أن الخاصيتان محققتان في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ فقط،

تذكر أن : مرافق $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ هو: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ أو العكس.

تمرين:

احسب النهايات التالية:

$\bullet \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-10}{3x^2-5x-2}$, $\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$, $\bullet \lim\limits_{x\to 4}\frac{2x+3}{x-4}$

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$, $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $\bullet \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$, $p,q\succ 0$, $\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

حل:

$$\bullet\lim_{x\to 4}\frac{2x+3}{x-4}=\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4}\frac{2x+3}{x-4}=\frac{11}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4}\frac{2x+3}{x-4}=\frac{11}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

لأن:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-10}{3x^2-5x-2}=\dfrac{-2}{0}$

نـــــــقوم بدراسة إشارة المقام $3x^2-5x-2$ ، 2 جذر لـه أي الجذر الآخر هو: $-\dfrac{1}{3}$ ،

x		$-1/3$		2		$+\infty$
$3x^2-5x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$	

أي:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-10}{3x^2-5x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\dfrac{x^2+2x-10}{3x^2-5x-2}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{x^2+2x-10}{3x^2-5x-2}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\end{cases}$$

نعلم أن: $\left(a^3-b^3\right)=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b\right)$ ،

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{\text{إذن}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3$

ح ، ع ، ت

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{\text{إذن}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{x\times\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

ح ، ع ، ت

المرافق

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=+\infty-\infty\xrightarrow{\text{إذن}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

ح ، ع ، ت

المرافق

x عامل مشترك من البسط و المقام ،

مع العلم أن $\sqrt{x^2}=|x|$ و كون $x\to+\infty$ ننزع رمز القيمة المطلقة،

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x=+\infty-\infty\xrightarrow{\text{إذن}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{1}{2}$

ح ، ع ، ت

المرافق

x عامل مشترك من البسط و المقام ،

مع العلم أن $\sqrt{x^2}=|x|$ و كون $x\to-\infty$ نكتب $\sqrt{x^2}=-x$ ،

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\dfrac{0}{0}$

ح ، ع ، ت

و هي حالة عدم التعيين، لنستعمل المرافق لإزالتها:

$$\bullet \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+p^2}-p\right)\times\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(\sqrt{x^2+q^2}-q\right)\times\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+p^2}-p\right)\times\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{x^2+q^2-q^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+p^2}-p\right)\times\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)\times\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{x^2\times\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}=\frac{q}{p}$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty-\infty$$

ح ، ع ، ت

و هي حالة عدم التعيين، لنستعمل المرافق لإزالتها:

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

الدرس الثاني:

مبرهنات خاصة بالحصر:

ليكــن α عــددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$، و f, g, h دوالا معرفة في جوار α:

المبرهنة الأولى:

- إذا كان: $g(x) \le f(x)$ من أجل كل x قريب من α و:

1. $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ فـإن: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$

أو 2. $\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$.

المبرهنة الثانية:

إذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ من أجل كل x قريب من α و $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = l$ فإن: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$

حيث: l عدد حقيقي.

حالتان خاصتان:

- $|f(x)| \le g(x)$ و $\lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$ ،
- $|f(x) - l| \le g(x)$ و $\lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ ، طبعا المتباينتان محققتان في جوار α.

المستقيمات المقاربة:

f دالة معطاة، عند حساب النهايات لهذه الدالة على حدود مجموعة تعريفها، نجد عموما الحالات التالية:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ نقـــــول أن $y = b$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار ∞ .
- $\lim_{x \to a \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$ نقـــــول أن $x = a$ معادلة مستقيم مقارب عمـــــودي لمنحـــــنى الدالة f.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و:

** أمكن كتابة f على الشكل: $f(x) = ax + b + h(x)$ مع: $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$ ،

أو ** $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ،

نقول أن $y = ax + b$ معادلة مستقيم مقارب مائل في جوار ∞. و نقصد بـ ∞ : $+\infty$ أو $-\infty$.

مع: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$

* لدراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و مستقيم $(\Delta): y = ax + b$، نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - (ax + b)$

لهذا ننشئ الجدول:

x	$-\infty$ النقاط التي تتغير عندها الوضعية $+\infty$
إشارة: $f(x) - (ax + b)$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	فوق أو تحت أو يقطع

لنستغل فرصة التعرف على المستقيمات المقاربة و نعرف المنحنيات المقـــــــاربة:

إذا كانت f دالة معطاة، و استطعنا كتابتها على الشكل: $f(x)=g(x)+h(x)$ حيث (C_g) المنحنى الممثـــــــل للدالة g، و $\lim_{x\longrightarrow\infty} h(x)=0$ عندئذ المنحنى (C_f) مقارب لـ (C_g) في جوار ∞، مع (C_f) المنحنى الممثل لــ f،

جواب 3:

لن نضطر إلى حصر دالة أو عبارة لحساب نهايتها دائما بمجرد ذكر هاته المبرهنة التي نقبلها دون برهان:

مـــبرهنة:

a, b, c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$، $-\infty$، f, v, u دوال عـددية مع: $f=v\circ u$

إذا كان: $\lim_{x\to a} u(x)=b$ و $\lim_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=c$.

ملاحظة:

لن نعتمد دائما على هذه المبرهنة، لحساب النهايات بعد تعرفنا على مفهوم "الاستمرار"، أوردناه في الدرس الموالي.

تمرين 01:

f دالة عددية معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بــ :

$$f(x)=\frac{2x+\sin(x)}{x-1}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\succ 1$:

$$\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$$

2) استنتج نهاية f عند $+\infty$.

حل :

1) ليكن $x\succ 1$:

لدينا: $-1\le\sin(x)\le 1$ أي: $2x-1\le 2x+\sin(x)\le 2x+1$ و كون $x-1\succ 0$ أمكن ضرب المتباينة السابقـــة في $\frac{1}{x-1}$ دون تغيير اتجاه المتباينة أي: $\frac{2x-1}{x-1}\le\frac{2x+\sin(x)}{x-1}\le\frac{2x+1}{x-1}$ أي: $\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$

2) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}$ و من المتبـــاينة السابقة (أو بتطبيق نظرية الحصر) نستـنتـــج $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$.

الدرس الثالث

تعريف استمرار دالة عند نقطة:

لتكن f دالة معرفة على جزء J من $\mathbb{R}$، و I مجال مفتوح من J تنتمي إليه القيمة a

f مستمرة عند a **معناه** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$ أي: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to a} x\right) = f(a)$، (أو $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$)

ملاحظة 1:

هـذا التعريف يوحي لنــا بأن f معرفة عند القيمة a و $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجــــــــــودة في $\mathbb{R}$ (أي عدد حقيقي).

جواب 2:

تعريف استمرار دالة على اليمين:

لتكن f دالة معرفة على جزء J مفتوح من $\mathbb{R}$ يشمل a

f مستمرة على يمين a **معناه** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$،

تعريف استمرار دالة على اليسار:

لتكن f دالة معرفة على جــــزء J من $\mathbb{R}$ يشمـل a

f مستمرة على يسار a **معناه** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$،

ملاحظة2:

نقول على دالة f أنها مستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مستمرة على يمين و يسار a،

من التاريخ:

يعتبر مفهوم النهاية و الاستــمرار من أصعب المفاهيم من حيـــث الإدراك، و المراحل التي عاشتها الرياضيــــات قبل عهد كوشي - شفارتز تؤكد ذلك إذ ظل الرياضياتيون ينتظرون عـدة قرون حتى تم تشكيل تعريف شـاف و كاف لهذا المفهوم قبل القرن 18.

جواب3:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$

نقول أن f مستمرة على المجال المفتوح I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة منه.

ملاحظات مهمة:

إذا كانت f مستمرة عند a، و $f(a) \succ 0$ (على التوالي $f(a) \prec 0$) فإنه يوجد مجال مفتوح يشمل a حيث تبقى f موجبة تماما داخله (سالبة تماما داخله) نقول الدالة f تحافظ فيه على إشارتها.

تمرين 1:

ادرس استمرارية الدوال التالية على مجموعة تعريفها:

- f دالة ثابتة على $\mathbb{R}$،
- f دالة كثير حدود مع $D_f=\mathbb{R}$،
- $f(x)=\cos(x)$ مع $D_f=\mathbb{R}$،
- $f(x)=\sin(x)$ مع $D_f=\mathbb{R}$

حل:

دراسة الاستمرارية:

كون الدالة الثابتة حالة خاصة من دالة كثير الحدود نكتفي بالدراسة:

- f دالة كثير حدود أي: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ و ليكن a من $\mathbb{R}$ و منه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_0\right)=a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots a_0=f(a)$$ ،

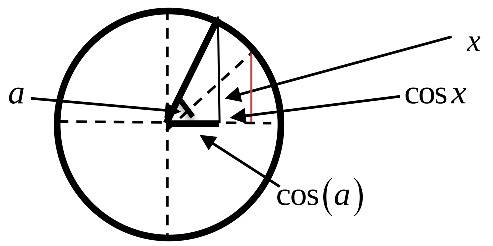
حسب مفهوم النهاية و الجمع،

مع العلم أن $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$،

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$،

- $f(x)=\cos(x)$ مع $D_f=\mathbb{R}$،

ليكن $a\in\mathbb{R}$ ، من الدائرة يمكن استنتاج: $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\cos(x)=\cos(a)$ أي: f مستمرة على $\mathbb{R}$،



و بنفس الطريقة يمكن أن نبين استمرار دالة sin على $\mathbb{R}$،

تمرين 2:

لتكن f, g دالتين معرفتين و مستمرتين عند a ،

بين أن:

- $f+g$ مستمرة عند a ،
- $f\times g$ مستمرة عند a ،
- $\dfrac{f}{g}$ مستمرة عند a حيث: $g(a)\neq 0$ ، ماذا لو كان: $g(a)=0$.

حل:

f, g دالتان مستمرتان عند a، أي: $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=f(a)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)=g(a)$ ،

- $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)+\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$ ،

حسب مفهوم النهاية و الجمع،

إذن $f+g$ مستمرة عند a،

- $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow a}f(x)\times\lim\limits_{x\longrightarrow a}g(x)=f(a)\times g(a)=(f\times g)(a)$ ،

حسب مفهوم النهاية و الضرب

إذن $f\times g$ مستمرة عند a،

- $g(a)\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\longrightarrow a}f(x)}{\lim\limits_{x\longrightarrow a}g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=\left(\dfrac{f}{g}\right)(a)$ ،

حسب مفهوم النهاية و القسمة،

إذا كان: $g(a)=0$ تكون الدالة $\dfrac{f}{g}$ غير معرفة عند a و هذا كاف للحكم أنها غير مستمرة عند a .

تمرين تطبيقي 3:

- لتكن f ، g دالتين معرفتين و مستمرتين عند a و $f(a)$ على التوالي،

بين أن $g\circ f$ مستمرة عند a،

هل توجد دالة ليست مستمرة عند أي قيمة من مجموعة تعريفها؟

حل:

- لدينا: f مستمر عند a معناه $\lim\limits_{x\longrightarrow a}f(x)=f(a)=\beta$ و g مستمرة عند $f(a)$ معناه: $\lim\limits_{x\longrightarrow f(a)}g(x)=g(f(a))=\delta$

و عليه تصبـح نهاية الدالة $g\circ f$ حسب أحد المبرهنات المذكورة في الدرس 2: $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(g\circ f)(x)=\delta=(g\circ f)(a)$ ،

أي $g\circ f$ مستمرة عند a.

- طرح هذا السؤال من قبل أسلافنا و قد اهتدوا إلى أمثلة تبين وجود دوال غير مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تـــــعريفها،

نأخذ على سبيل المثال:

$\varphi(x)=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 1 & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، نلاحظ أننا عندما نأخذ: $a\in\mathbb{R}$ نجد: $\varphi(a)=0$ أو $\varphi(a)=1$ ،

لكن النهاية $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\varphi(x)$ غير موجودة (متذبذبة بين القيمتين 0 و 1، أي لا تستقر عند قيمة)،

و هذا كاف للقول أن: φ غير مستمرة من أجل كل قيمة من $\mathbb{R}$ ،

"إن التطبيقات السابقة سوف نعتمدها خواصا تستعمل في المستقبل و دون برهان"

الدرس الرابع:

نشاط:

لتكن f دالة معرفة و مستمرة، و متناقصة تماما على المجال $[-2;4]$ ، لدينا المتباينة $f(-2)\succ 3\succ f(4)$ ،

و لتكن المجموعة A الجزئية من $[-2;4]$ حيث: $A=\{x\in[-2;4],\ \ f(x)\succ 3\}$ ،

1) بين أن هذه المجموعة غير خالية،

2) اذكر عنصر من المجال $[-2;4]$ لا ينـــــتمي إلى A،

3) ليكن $c\in[-2;4]$ أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A،

أ) بين أنه إذا كان $f(c)\prec 3$ لا يكون c أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A،

ب) استنتج أن $f(c)=3$ و اذكر التفسير الهندسي للنتيجة المحصل عليها،

4) بين أن العدد c وحيد في هذه الحالة (إرشاد: استعمل تناقـــــص الدالة f)،

5) أكتب خلاصة.

حل

f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-2;4]$، و $f(-2)\succ 3\succ f(4)\cdots(*)$ ولدينا المجموعة:

$$A=\{x\in[-2;4],\ \ f(x)\succ 3\}$$

1) من $(*)$ لدينا $f(-2)\succ 3$ أي: $-2\in A$ و منه المجموعة A غير خالية،

2) من $(*)$ لدينا كذلك $3\succ f(4)$ أي: $4\notin A$ ،

3) c من $[-2;4]$ أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A، نلاحظ أن كل عنصر أكبر من c لا ينتمي إلى A كون الدالة f متـناقصة تماما على المجال $]-2;4]$، إليك هذا التوضيح $\alpha\succ c$ مع $\alpha\in[-2;4]$، أي: $f(\alpha)\prec f(c)\leq 3$ ،

أ) نضع: $g(x)=f(x)-3$ ، يمكن ملاحظة أن الدالة g دالة مستمرة على المجال $[-2;4]$ كونها مجموع دالتين الأولى الـــدالة f المستمرة فرضا و الثانية الدالة الثابتة و التي أثبتنا استمرارها، ومن الفرض $f(c)\prec 3$ نستنتج أن $g(c)\prec 0$ من الاستمرار نستنتج أنه يوجد مجال مفتوح ينتمي إليه c تحافظ g بإشارتها السالبة داخله،

أي وجد عدد c_1 يحقق $c_1\prec c$ حيث $g(c_1)\prec 0$ أي: $f(c_1)\prec 3$ و هذا تنـاقض كون c أصغر عنصر لا ينتمي إلى A ،

ب) من أ) يمكن أن نستنتج $f(c)=3$،

التفسير الهنـــــدسي: المستقيــــــم ذو المعادلة $y=3$ يقطع منحـــــــنى الدالة f في النقطـــــة ذات الفاصلة c،

4)

لنستعمل الخلف و لنفرض وجود c' يختلف على c حيث: $f(c')=3$ نلاحظ أن $c'\succ c$ كون c أصغر عنصر، و من تناقص الدالة f أمكـــــن كتابة $3=f(c')\prec f(c)=3$ أي: $3\prec 3$ وهـــذا تناقض منطقي، و منـــــه وحدانية العدد c ،

5)

خلاصة:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;4[$ و $f(-2)\succ 3\succ f(4)$ يوجد و وحيد عدد حقيقي $c\in]-2;4[$ حيث: $f(c)=3$ ،

سؤال: هل خلاصة النشاط صحيحة دوما؟

جواب: إليك هاته المبرهنة:

مبرهنة القيم المتوسطة:

f دالة معرفة على المجال $[a;b]$، و مستمرة على المجال $]a;b[$ و k عدد حقيقي محصور بين: $f(a), f(b)$ ،
عندئذ يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $]a;b[$ حيث: $f(c)=k$.

مساعدة للبرهان:

يمكن تقسيم المجال $[a;b]$ إلى مجالات جزئية تكون f رتيبة على كل منها، متبعا نفس الخطوات المذكورة في النشاط تثبت هذه المبرهنة،

حالة خاصة و مهمة:

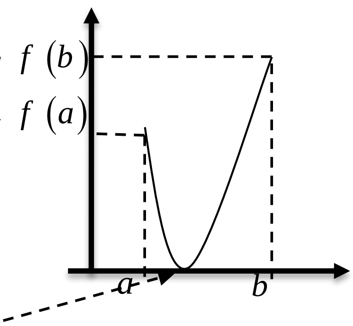
f دالة معرفة على المجال $[a;b]$، و مستمرة على المجال $]a;b[$ و $f(a)\times f(b)\prec 0$
يوجد على الأقل c من $]a;b[$ حيث: $f(c)=0$
(يفضل البعض تسمية هاته الحالة بمبرهنة القيم المتوسطة في حين المبرهنة السابقة بالنقطة المتوسطة) .

ملاحظة1:

إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإن الحل يكون وحيدا كما لاحظنا في النشاط.

ملاحظة 2:

شروط مبرهنة القيم المتوسطة، كافية و ليست لازمة، بمعنى:
يمكن أن تقبل المعادلة $f(x)=0$، حلا في المجال $[a,b]$، دون أن يكون $f(a)\times f(b)<0$، كما نشاهد في الشكل: (طبعا الدالة f مستمرة على هذا المجال)،



لاحظ أن: $f(a)\times f(b)>0$،
ورغم ذلك:
f تنعدم داخل المجال $[a,b]$

من التاريخ:

تعد مبرهنة القيم المتوسطة من أهم المبرهنات في باب الدوال المستمرة. وقد برهن عليها في الربع الأول من القرن التاسع عشر من طرف التشيكي بولزانو و الفرنسي كوشي و يمكن شرح هذه المبرهنة – بشكل بسيط - كالتالي: إنه لا يمكن المرور من ضفة نهر إلى أخرى دون قفز و دون أن تبلل أقدامنا، و هذا ما نعبر عنه رياضيا بـ: إذا أخذت الدالة إشارتين مختلفتين عند القيمتين a, b، فإن هذه الدالة تنعدم على الأقل مرة واحدة في المجال $[a,b]$.

ملاحظة 3 مهمة:

يمكن استبدال الشرط $f(a)\times f(b)<0$ بـ $\lim_{x\xrightarrow{<} b} f(x)\times \lim_{x\xrightarrow{>} a} f(x)\prec 0$ أو $\lim_{x\xrightarrow{>} a} f(x)\times f(b)\prec 0$ أو $f(a)\times \lim_{x\xrightarrow{<} b} f(x)\prec 0$
و هذا حسب الحاجة في كل تمرين.

ملاحظة 4:

مبرهنة القيم المتوسطة تبين وجود حل دون الحصول على قيمته صراحة و هذا عموما، لذلك نلجأ إلى طرق عديدة من بينها:

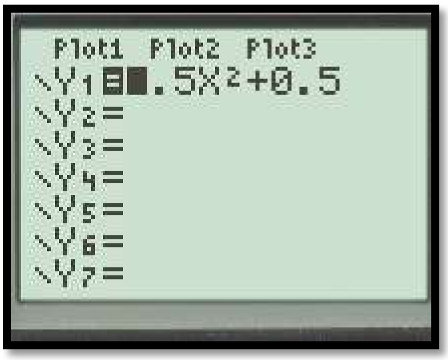
- طريقة التنصيف (لاحظ التطبيق 2) ،- طرق عددية و تعتمد على المتتاليات العددية، أو نستعمل الآلة الحاسبة البيانية كما يلي:

$Ti \quad 83$

A) رسم بيان الدالة :

بالضغط على الأيقونة: 

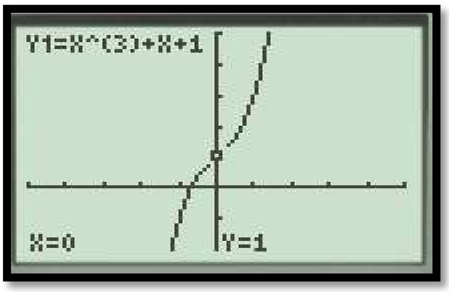
، يظهر :



نقوم بكتابة عبارة الدالة f مثلا نختار $f(x)=x^3+x+1$،

ثم نضغط على الأيقونة: 

، فنحصل على المنحنى كما بالشكل:



B) تعيين قيمة مقربة للحل α:

نضغـــط على الأيقونة: 

، ثم الأيقونة: 

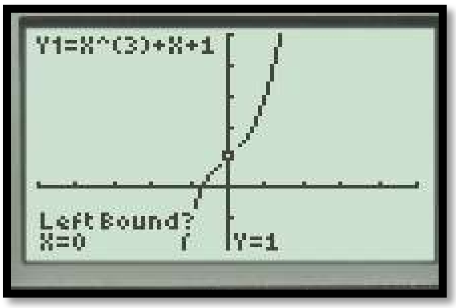
فنحصل على:

لاحظ التغير،

و نضغـــط على الأيقونة:  لنحصل على:

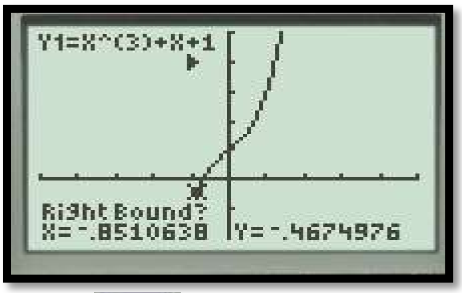
ثم نضغط على الأيقونة: 

لنحصل على:



و باستعمال:  أو:  نعين فاصلة أصغر من α ، ثم ننقر على: 

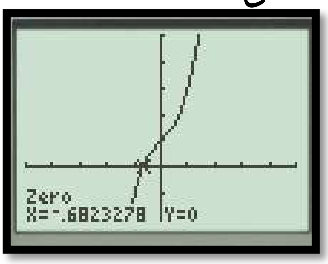
فنحصل على:



و في نفس الشكل الأخير نعين فاصلة أكبر من α ، ثم نضغط على: 

أخيرا نضغط مرة أخرى على: 

لنحصل على:



$\alpha \approx -0.6823278$

تمرين تطبيقي01:

f دالة عددية حيث: $f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x+2)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،

1) احسب النهايات عند حـــدود مجموعة التعـــريف،

2) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$ ، ماذا تستنتج؟

3) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها x_0 حيث : $-4<x_0<-3$.

حل:

لدينا: $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ ،

1) حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1+\dfrac{4}{(x+2)^2}\right)=-\infty$ ،
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\dfrac{4}{(x+2)^2}\right)=+\infty$ ،
- $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\left(x+1+\dfrac{4}{(x+2)^2}\right)=-1+\dfrac{4}{0^2}=+\infty$ ،

أو ندرس إشارة $(x+2)^2$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	

2) نعني بالكتابة $|x|\longrightarrow+\infty$: إما $x\longrightarrow+\infty$ أو $x\longrightarrow-\infty$ ، لدينا:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\big[f(x)-(x+1)\big]=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{4}{(x+2)^2}\right)=0$$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل في جـــــوار $-\infty$ أو $+\infty$ ،

3) لنبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها x_0 :

أي هـل يوجد $x_0\in]-4;-3[$ حيث: $f(x_0)=0$؟

لدينا: $f(-4)=-4+1+\dfrac{4}{4}=-2$ و $f(-3)=-3+1+\dfrac{4}{1}=2$ إذن: $f(-3)\times f(-4)\prec 0$ ،

نلاحظ أن الدالة f مستمرة على المجال $]-4;-3[$ كونها مجموع و ضرب دوال مستمرة على المجال السابق،

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجـــــــــــد على الأقل $x_0\in]-4;-3[$ حيث: $f(x_0)=0$.

سؤال: هل الحل المذكور سابقا وحيد؟

تمرين تطبيقي 02:

1 * بين أن المعادلة: $x^3+2=0$ تقبل حلا وحيدا α حقيقيا،

2 * أ) عين حصرا له في مجال سعته 0.5،

ب) عين قيمة تقريبية للحل بدقة 10^{-1}.

حل:

*1 نضع: $f(x)=x^3+2$ ، f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\prec 0$ هذا من جهة و من جهـــــة أخرى

ليكن: $x_1;x_2\in\mathbb{R}$ ، $x_1\prec x_2$ أي: $x_1^3\prec x_2^3$ (الدالة مكعب متزايدة تماما) و منه $x_1^3+2\prec x_2^3+2$ ، الدالة f دالة متزايدة تماما،

إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha\in\mathbb{R}$ حيث: $f(\alpha)=0$ أي المعادلة تقبل حلا حقيقيـــــا و وحيــــــــدا،

2 * ب) الحصر:

يمكن أن نلاحظ: $f(0)=2\succ 0$ أي $\alpha\in]-\infty;0[$ (هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة)،

و كذلك: $f(-1)=1\succ 0$ أي: $\alpha\in]-\infty;-1[$ (و هذا حسب مبرهنة القيم المتوسـطة)،

و $f(-2)=-8+2=-6\prec 0$ أي: $\alpha\in]-2;-1[$ طـول هذا المجال $-1-(-2)=1$ ،

تذكر:

طول المجال: $[a;b]$ هو: $b-a$ ،

مركز المجال: $[a;b]$ هو: $\dfrac{a+b}{2}$ ،

طول نصف قطر المجال: $[a;b]$ هو: $\dfrac{b-a}{2}$ ،

مركز المجال: $]-2;-1[$ هو $\dfrac{-3}{2}$ ، و $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{27}{8}+\dfrac{16}{8}=-\dfrac{11}{8}\prec 0$ أي: $\left]-\dfrac{3}{2};-1\right[$ و طول هذا المجال:

$-1+\dfrac{3}{2}=0.5$ و منه المجال المطلوب: $\alpha\in\left]\dfrac{-3}{2};-1\right[$ ،

ب) قيمة تقريبية للحل بدقة 10^{-1}:

نواصل الحصر السابق حتى نصل إلى مجال، طرفاه عددان حقيقيان يشتركان في رقم بعد الفاصلة طبعا في كتابتها العشرية،

مركز المجال: $\left]-\dfrac{3}{2};-1\right[$ هو $-\dfrac{5}{4}$ ، و $f\left(-\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{125}{64}+\dfrac{128}{64}=\dfrac{3}{64}\succ 0$ أي: $\alpha\in\left]\underbrace{-\dfrac{3}{2}}_{\simeq -1.5};\underbrace{-\dfrac{5}{4}}_{\simeq -1.25}\right[$ ،

مركز المجال $\left]-\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right[$ هو: $-\dfrac{11}{8}$ ، و $f\left(-\dfrac{11}{8}\right)=-\dfrac{1331}{512}+\dfrac{1024}{512}=-\dfrac{307}{512}\prec 0$ أي: $\alpha\in\left]\underbrace{-\dfrac{11}{8}}_{\simeq -1.375};\underbrace{-\dfrac{5}{4}}_{\simeq -1.25}\right[$ ،

مركز المجال $\left]-\frac{11}{8};-\frac{5}{4}\right[$ هو: $-\frac{21}{16}$، و $f\left(-\frac{21}{16}\right)=-\frac{9261}{4096}+\frac{8192}{4096}=-\frac{1069}{4096}\prec 0$ أي: $\alpha\in\left]\underset{\simeq -1.31}{-\frac{21}{16}};-\frac{5}{4}\right[$،

مركز المجال $\left]-\frac{21}{16};-\frac{5}{4}\right[$ هو: $-\frac{41}{32}$ ، و $f\left(-\frac{41}{32}\right)=-\frac{68921}{32768}+\frac{65536}{32768}=-\frac{3385}{32768}\prec 0$ أي: $\alpha\in\left]\underset{\simeq -1.281}{-\frac{41}{32}};\underset{\simeq -1.25}{-\frac{5}{4}}\right[$،

أي القيمة التقريبية المطلوبة هي: $\alpha\simeq -1.2$.

و باستعمال الحاسبة البيانية نجد: X=-1.259921 .

يمكن أن نعين قيما تقريبية للحل بالدقة التي تطلب منا، و هذا باستعمال الطريقة السابقة و تسمى **"طريقة التنصيف"** .

إليك الطريقة بشكلها العام:

لنفرض أننا بينا باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن الحل يحقق: $\alpha\in\left]a_0;b_0\right[$، نعلم أن $\frac{a_0+b_0}{2}$ مركز المجال السابق،

و بملاحظة إشارة $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$، يمكن أن نضع $\alpha\in\left]a_1;b_1\right[$ مع العلم أن طول هذا المجال $\frac{b_0-a_0}{2}$،

و بتكرار العملية السابقة n مرة نجد: $\alpha\in\left]a_n;b_n\right[$ مع العلم أن طول هذا المجال $\frac{b_0-a_0}{2^n}$،

يمكن أن نستنتج من كل هذا، عدد المرات اللازمة للتقسيم حتى نحصل على دقة تقل أو تساوي عددا حقيقيا $\varepsilon\succ 0$

أي: $\frac{b_0-a_0}{2^n}\le\varepsilon$ معناه: $2^n\ge\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}$، مثلا في التمرين التطبيقي السابق بينا أن $\alpha\in\left]-2;-1\right[$،

يمكن معرفة عدد المرات التي يجب القيام بها للإجابة على السؤال 2 – أ) أي: $\frac{-1+2}{2^n}=0.5$ و منه: $2^n=2$ و بالتالي: $n=1$.

تمرين تطبيقي 03:

f دالة مستمرة و معرفة على المجال I حيث: $I=[0;1]$ بحيث من أجل كل x من I : $f(x)\in\left]0;1\right[$،

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث: $f(\alpha)=\alpha$.

حل :

f دالة مستمرة و معرفة على المجال: I بحيث من أجل كل x من I : $f(x)\in\left]0;1\right[$،

نضع: $g(x)=f(x)-x$ ، g دالة مستمرة على المجال I كونها مجموع دالتين مستمرتين على نفس المجال ، و

$g(0)=f(0)\in\left]0;1\right[$ أي: $g(0)\succ 0$ و $g(1)=f(1)-1$ و لما كان: $f(1)\in\left]0;1\right[$ معناه $0\prec f(x)\prec 1$ أي

$-1\prec f(1)-1\prec 0$ و عليه $g(1)\prec 0$ ومنه أمكن كتابة: $g(0)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل

$\alpha\in\left]0;1\right[$ حيث: $g(\alpha)=0$ و بالتالي: $f(\alpha)=\alpha$ ، و . هـ . م.

الدرس الخامس:

نشاط استكشافي:

في السقوط الحر لجسم ما يكون لدينا: $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ حيث: $t\in[0;T]$ و S المسافة المقطوعة، t الزمن اللازم لقطع المسافة S ، g الجاذبية، و T زمن الوصول،

عند الزمن $t_1\in[0;T]$ يقطع الجسم مسافة $S(t_1)$، و يقطع مسافة $S(t_2)$ عند اللحظة $t_2\in[0;T]$ ،

1) احسب السرعة المتوسطة $v_{[t_1;t_2]}$ بين اللحظتين t_1 و t_2 ،

2) هل السرعة المتوسطة تعطينا مقدار السرعة عند اللحظة t_1 ؟ هل يمكنك اقتراح حـل تجـده مناسبا؟

3) لأجل هذا نضع: $v(t_1)=\lim\limits_{t_2\to t_1} v_{[t_1;t_2]}$

أ) احسب $v(t_1)$ بدلالة t_1 ،

ب) لما كان t_1 كيفي من الفترة $[0;T]$ أمكن نزع الدليل 1، قل لماذا $v(t)$ تعرف دالة على المجال $[0;T]$؟

ج) هل يمكن الحصول على عبارة $v(t)$ دون أن تعطى لنا عبارة $S(t)$ ؟ أعط اسما لـ $v(t)$ تجده مناسبا.

حل النشاط:

لدينا: $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ مع $t\in[0;T]$ --------------------------

تعليق: نلاحظ أن المسافة دالة في الزمن، يمكن الحصول على هذه المعادلة بتطبيق قوانين إسحاق نيوتن المدروسة في الفيزياء.

1) حساب $v_{[t_1;t_2]}$:

$$v_{[t_1;t_2]}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\frac{1}{2}gt_2^2-\frac{1}{2}gt_1^2}{t_2-t_1}=\frac{1}{2}g(t_2+t_1)$$

2) تمثل $v_{[t_1;t_2]}$ السرعة المتوسطة في الفترة $[t_1;t_2]$ و كون الحركة غير منتظمة، فهي لا تعطينا وصفا للسرعة في اللحظة t_1 .

يمكن اقتراح:

كلما كانت اللحظة t_2 قريبة من اللحظة t_1 ازداد وصف السرعة عند اللحظة t_1 دقة،

3) حسب الاقتراح السابق فإن $\lim\limits_{t_2\to t_1} v_{[t_1;t_2]}$ تعطي السرعة عند اللحظة t_1 و التي سنسميها "السرعة اللحظية" و نرمز لها بـ $v(t_1)$،

أ) حساب $v(t_1)$ بدلالة t_1 :

لدينا: $\lim\limits_{t_2\to t_1} v_{[t_1;t_2]}=\lim\limits_{t_2\to t_1}\left(\frac{1}{2}g(t_2+t_1)\right)=gt_1$ ،

ب) لما كان t_1 كيفيا و لا يخضع لأي شروط من الفترة $[0;T]$ أمكن التخلي عن الدليل1، و يمكن ملاحظة أن كل لحظة من الفترة السابقة تقابلها سرعة لحظية وحيدة و هذا يعرف دالة،

ج) لن نتمكن من الحصول على الدالة $v(t)$ دون أن تعطى لنا عبارة $S(t)$، فهي تعتمد اعتمادا كليا عليها كأنها تشتق منها، و لهذا نسميها الدالة المشتقة،

مثل هذه المسائل كانت دافعا لظهور مفهومي الاشتقاق و التفاضل*

أي: • مسألة إيجاد السرعة مهما كانت قانون الحركة،

في الدرس المــوالي،

* سوف نتطرق لمفهوم التفـاضل

و كذلك • مسألة إيجاد المماس لمنحنى ما " أي تقريب أي دالة باستعمال دالة تآلفيـــــــة "،
و قد قادت كلتا المسألتين إلى مسألة واحدة و جوهر هذه المسألة** هو الإجابة على السؤال التالي:

سؤال: f دالة معطاة،

هل يمكن إيجاد دالة أخرى و التي نسميها "الدالة المشتقة" و التي تمثل سرعة تغير الدالة f بالنسبة لتغير المتغير x ؟

جواب: للإجابة على السؤال السابق نعرف:

العدد المشتق:

f دالة معرفة على مجـــــال مفتـــوح I، و $a\in I$ ،

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a معناه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجودة في $\mathbb{R}$،

(أو $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ كما يفضل البعض)

و نرمز للعدد المحصل عليه بـ $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a.

سؤال: كيف يمكننا مشاهدة العدد المشتق هندسيا، (لاحظ الدرس التالي)

ملاحظة:

- إذا كان التعريف السابق محقق من أجل $x \xrightarrow{>} a$ أو $x \xrightarrow{<} a$ نقول أن f قابلة للاشتقاق من يمين أو يسار القيمة a على الترتيب،
- f قابلة للاشتقـــــاق عند a معناه قابلة للاشتقــــاق من اليمين و اليســــــار و

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x \xrightarrow{<} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

القابلية للاشتقاق على مجال و الدالة المشتقة عليه:

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا قبلت الاشتقاق عنـــــد كل نقطة منه، و بالتــــــالي يمكن إرفاق كل عدد من المجال I بعدد مشتـــــق وحيـــد،

أي نعرف الدالة المشتقة f': $\begin{array}{l} f':I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f'(x)\end{array}$.

ملاحظة:

يـــطرح كثير منا السؤال التالي: لمــــــــاذا نضطر إلى فتح المجال المغلق مثلا $[a;b]$ أثناء الاشتقاق؟

جواب:

من التاريخ:

يعـد نيوتن $(1642-1727)$ أول من وضـــع المسألة** السابقة، كما طرحها ليبنيتز $(1646-1716)$، بصــــورة مشابهة في سبعينيات و ثمانيات القرن السابع عشر، و لكن فيرما $(1601-1655)$ و باسكال $(1623-1662)$ و غيرهمـــا من العلماء كانوا قد أوجدوا في أواســـط القرن السابع عشر قوانين معينة لإيجـاد مشتقات دوال كثيرة، و قد اختتم نيوتن و ليبنيتز هذا التطور فأدخلا المفاهيم العامـــــة للمشتقـــة و التفاضل. كما وضعـا الرمــــوز التي تسهل العمليات الحسابيـــة الكثيـــرة، و طوروا مفهوم و طرق حساب التفاضل حتى بلـــغ أعظم مراحــل تطـــوره، وقد استخدمـا حســـاب التفاضـــل في حل العديد من المسائل الهندسيـة، و الميكانيكيـــة، و لقــــد زال النقص في السرد المنطقي الدقيـــق في القــــرن التاسع عشر فقط.

يمكن ملاحظة أن الاشتقاق مفهوم يعتمد على النقاط التي تكون بالقرب من النقطة التي نشتق عندها، وعليه وجب فتـــح المجال $[a;b]$ لأن الصورة $f(x)$ ليس لها معنى إذا كـــان $x \prec a$ أو $x \succ b$،

تـــابع للملاحظة:

و هذا لا يمنع من حالات خاصة يمكن ترك المجال مغلقا:

- إذا كان محتوى تماما في مجال آخر تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق،
- أو إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق من أجل كل نقطة من المجال المفتوح $]a;b[$ و قابلة للاشتقاق على يمين a و على يسار b .

العـلاقة بـــين الاستـمرار و الاشـتقـاقـية :

إذ كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة a فهي مستمرة عندها،

لأن:

f قابلة للاشتقاق عند a معناه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\in\mathbb{R}$ أي: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+O(x)\ /\ \lim_{x\to a}O(x)=0$

معناه: $f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+O(x)(x-a)$ عند المرور إلى النهاية نجد: $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ أي:

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ و بالتالي الدالة f مستمرة عند a .

سؤال: هل يمكن حساب مشتقة مجموع و جداء و قسمة و مقلوب و تركيب دوال قابلة للاشتقاق؟

إليك المبرهنة:

مبـــرهنة (الاشتقاق و العمليات):

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند a، و h دالة قابلة للاشتقاق عند $f(a)$، عندئذ:

- $f+g$ قابلة للاشتقاق عند a و $(f+g)'(a)=(f'+g')(a)$ ،
- $k\times f$ قابلة للاشتقاق عند a و $(k\times f)'(a)=k\times f'(a)$ ،

نقول أن مؤثر الاشتقاق $'\circ$ خطي

- $f\times g$ قابلة للاشتقاق عند a و $(f\times g)'(a)=f'(a)\times g(a)+f(a)\times g'(a)$،
- $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند a و $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{(g(a))^2}$ حيث: $g(a)\neq 0$،
- $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق عند a و $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$ حيث: $f(a)\neq 0$،
- $h\circ f$ قابلة للاشتقاق عند a و $(h\circ f)'(a)=f'(a)\times h'(f(a))$،

تمرين تطبيقي 01:

أثبت ما جيء به في المبرهنة السابقة.

حل:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق عند a، و h قابلة للاشتقاق عند $f(a)$:

• عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $f+g$ عند a :

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)\in\mathbb{R}$$

كون أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق عند a

أي: $f+g$ قابلة للاشتقاق عند a و $(f+g)'(a)=(f'+g')(a)$،

•عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $k\times f(x)$ عند a:

$$\lim_{x\to a}\frac{k\times f(x)-k\times f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}k\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k\times f'(a)\in\mathbb{R}$$

f قابلة للاشتقاق عند a،

أي: $k\times f(x)$ قابلة للاشتقاق عند a و $(k\times f)'(a)=k\times f'(a)$،

•عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $f\times g$ عند a:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)+g(a)\times\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=$$

$$=f(a)\times g'(a)+f'(a)\times g(a)\in\mathbb{R}$$

كون أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق عند a
و f مستمر عند a،

أي: $f\times g$ دالة قابلة للاشتقاق عند a و منه: $(f\times g)'(a)=f(a)\times g'(a)+f'(a)\times g(a)$،

•عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $\frac{f}{g}$ عند a، حيث: $g(a)\neq 0$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(a)-g(x)\times f(a)}{(x-a)\times g(x)\times g(a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)+f(a)\times g(a)-g(x)\times f(a)}{(x-a)\times g(x)\times g(a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{(x-a)\times g(a)\times g(x)}=$$

$$=\frac{1}{(g(a))^2}\left[g(a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]=$$

كون أن الدالتين $f,\ g$ قابلتان للاشتقاق عند a، و gمستمرة عند a،

$$=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{(g(a))^2}$$

أي: $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند a و $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\times g(a)-f(a)\times g'(a)}{(g(a))^2}$

- لدينا $f(a)\neq 0$ ، نطبق مشتق حاصل القسمة على الـــدالة $\frac{1}{f}$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\frac{1'\times f(a)-f'(a)\times 1}{f^2(a)}=\frac{-f'(a)}{(f(a))^2}$$،

- نطبع التعريف على الدالة $h\circ f$ عند a:

$$\lim_{x\to a}\frac{(h\circ f)(x)-(h\circ f)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(f(x))-h(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{h(f(x))-h(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=\cdots(*)$$

نعلم أنه إذا كان $x\to a$ فإن $f(x)\to f(a)$ كون f مستمرة عند a، و لما كان f و h قابلتين للاشتقاق عند a و $f(a)$ على التوالي يكون: $\lim_{f(x)\to f(a)}\frac{h(f(x))-h(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\times h'(f(a))$

وبالتالي تكون الدالة $h\circ f$ قابلة للاشتقاق عند a و $(h\circ f)'(a)=f'(a)\times h'(f(a))$.

ملاحظة:

قمنا في $(*)$ بإظهار عناصر تساعدنا للوصول إلى المطلوب، إذ ضربنا في $\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}=1$ و التي يجـــب أن يكون لها معنى، بساطة يمكن أن نلاحظ أنه عندما تكون الدالة f ثابتة تجعل النسبة السابقة ليس لها معنى و بالتالي لا يمكننـــــــا توظيفهـــا، في هاته الحالة إن الـدالة $h\circ f$ تكون كذلك ثابتة، لاحظ المخطط التـــــالي:

$x\in\mathbb{R}\xrightarrow{f}f(x)=a\xrightarrow{h}(h\circ f)(x)=h(a)$ أي: $(h\circ f)'(a)=0$ (لاحظ التطبيق الثاني) دون المرور بحالة اللبس السابقة، "لاحظ أن هاته الحالة لا تمس بعمومية القانون المذكور".

تمرين تطبيقي 02:

باستعمال التعريف، أحسب الدالة المشتقة للدوال التالية محددا مجال الاشتقاقية:

- $f(x)=a$ حيث: a ثابت حقيقي، .... $D_f=\mathbb{R}$،
- $f(x)=x^n$ حيث: $n\geq 1$ عدد طبيعي، .... $D_f=\mathbb{R}$،
- $f(x)=\sqrt{x}$ .... $D_f=[0;+\infty[$،
- $f(x)=\cos(x)$ .... $D_f=\mathbb{R}$،
- $f(x)=\sin(x)$ .... $D_f=\mathbb{R}$،

حل:

حساب باستعمال التعريف، الدوال المشتقة مع تحديد مجال الاشتقاق:

- $f(x)=a$ ، ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ عند تطبيق تعريف الاشتقاق نجد: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a-a}{x-x_0}=0$

و عليه مشتق أي كمية ثابتة تساوي الصفر، و يبدو واضحا فيزيائيا، حيث أن كل جسم ثابت ليست له سرعة، مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$

- $f(x)=x^n$ ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ و منه :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x_0\times x^{n-2}+\cdots+x_0{}^{n-1}\right)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x_0\times x^{n-2}+\cdots+x_0{}^{n-1}\right)=x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}$$

أي مجال الاشتقاق هو $\mathbb{R}$، و $f'(x)=nx^{n-1}$ مع $n\geq 1$

تذكر العلاقة المهمة التي نحتاج إليها في بعض التمارين: $a^n-b^n=(a-b)\times\left(a^{n-1}+b\times a^{n-2}+\cdots+b^{n-1}\right)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

- $f(x)=\sqrt{x}$

بداية ليكن $x_0\in\mathbb{R}_+^*$: لدينا تعريفا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

بقي أن ندرس قابلية الاشتقاق على يمين0:

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\notin\mathbb{R}$$

و بالتالي f غير قابلة للاشتقاق على يمين0، أي مجال الاشتقاق $]0;+\infty[$ ، و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ،

- $f(x)=\cos(x)$ ليكن $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2\left(\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right)}{x-x_0}=$$

راجع دساتير التحويل في الباب الأول،

$$=-\lim_{x\to x_0}\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=-\sin(x_0)$$

أي مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$، و $f'(x)=-\sin(x)$

- $f(x)=\sin(x)$ ليكن $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\left(\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos(x_0)$$

أي مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$ و $f'(x)=\cos(x)$ ،

ملاحظة:

لن نستعمل تعريف الاشتقاق في كل مرة، لكن سنعتمد على المبرهنة و مشتق بعض الدوال المألوفة، مثل ما ورد في التمرين التطبيقي 2 لدراسة إشكالية رياضية "من دراسة دوال ... الخ".

التمرين التطبيقي 03:

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f(x)=|x|$ على $\mathbb{R}$،

حـــل:

كتابة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة: $f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x\leq 0 \end{cases}$ لنميز الحالات التالية:

* $x\succ 0$ تكون: $f(x)=x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=1$،

** $x\prec 0$ تكون $f(x)=-x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و $f'(x)=-1$،

*** لنستعمل التعريف لاختبار قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\dfrac{x}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}\dfrac{-x}{x}=-1 \end{cases}$$

أي: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ،

و منه الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند **0**،

خلاصة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

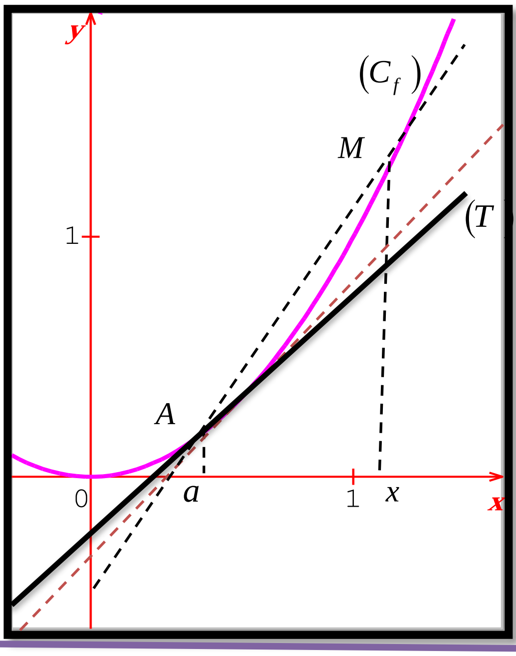
الدرس السادس:

هذا الدرس امتداد للدرس السابق إذ سنجيب على أسئلة طرحت فيه، و أخرى يتبادر طرحها في الأذهان.

• السؤال الأول: ما التفسير الهندسي للاشتقـــــاق؟

جواب:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال المفتوح I، و $a \in I$ ، (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، (T) مماس المنحنى عند A غير مواز لمحور التراتيب M نقطة متحركة من (C_f) فاصلتها x تختلف عن a لاحظ البيان:



ميل القاطع (AM) للمنحنى يعطى بالعلاقة: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- كلما قربنا النقطة M من A وهذا من جهة اليمين أو اليسار بجعل x قريبا من a نلاحظ أن ميل كل قاطع يقترب من ميل المماس (T) أي: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \rho \in \mathbb{R}$ حيث: رمزنا بـ ρ لميل المستقيم (T)،

هذا من جهة و من جهة أخرى لدينا: $\rho = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ وهذا حسب التعريف الموضوع في الدرس السابق أي العدد المشتق ما هو إلا ميل المماس للدالة عند النقطة المشتق عندها.

السؤال الثاني: هل يمكن تعيين المعادلة الديكارتية للمماس (T) ؟

جواب:

رأينا في التفسير الهندسي أن ميل المماس (T) مساو لـ $f'(a)$ أي أمكن كتابة: $y = f'(a)x + b$، و نعلم انتماء النقطة $A(a;f(a))$ أي أمكن تعيين الثابت b، $b = f(a) - f'(a) \times a$ عند التعويض نجد المعادلة النهائية للمماس عند a التي تطلب في تمارين مختلفة:

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

تمرين تطبيقي:

أوجد في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس للدالة f عند النقطة a:

- $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ عند $a=0$،
- $f(x) = \sin(x-1)$ عند $a = \pi + 1$،
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ عند $a = -1$ ،

- $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)+1}$ عند $a=\dfrac{\pi}{2}$.

حــل:

إيجاد معادلة المماس في كل حالة من الحالات التالية: نعلم مما سبق: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\left(-x^2+4x+1\right)/\left(x^2+1\right)^2$،
و بالتعويض نجد: $(\Delta): y=x-2$
- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\cos(x-1)$
و بالتعويض نجد: $(\Delta): y=-x+\pi+1$
- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $x\in\mathbb{R}:\quad f'(x)=x/\sqrt{x^2+1}$
و بالتعويض نجد: $(\Delta): y=-\left(1/\sqrt{2}\right)x+\left(1/\sqrt{2}\right)$
- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $x\in\mathbb{R}:\quad f'(x)=-(2\cos x\sin x)/\left(\sin^2(x)+1\right)^2$
و بالتعويض نجد: $(\Delta): y=\dfrac{1}{2}$

ملاحظة هامة:

يعد المماس أحسن تقريب للدالة f في جــــوار a أي: $f(x)\simeq f'(a)(x-a)+f(a)$ حيـــث: x قريــــب من a، يسمى تقريبا تآلفيا.

توحي لنا هذه المساواة التقريبية فكرة رسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f دون معرفة عبارة f صراحة في حين أعطيت لنا مشتقتها و صورة نقطة بواسطتها،

تسمى هذه الطريقة بـ"طريقة أولير"

إليك هذا التوضيح: لتكن الدالة f المعرفـــة على $\mathbb{R}_+^*$ و دالتهـــــــــــا المشتقـــــــــــــة $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ حيث: $x\in\mathbb{R}_+^*$ ،

المطلوب إنشاء رسم تقريبي لمنحناها على المجال $[1;8]$ حيث: $f(1)=0$،

تتبع الخطوات التالية:

- نقوم بتقسيم المجال $[1;8]$ إلى مجالات جزئية طول كل منها 0.5 مثلا ، و نسمي هذه القيمة "خطوة"
- نعلم بداية النقطة $\Omega_0(1;0)$

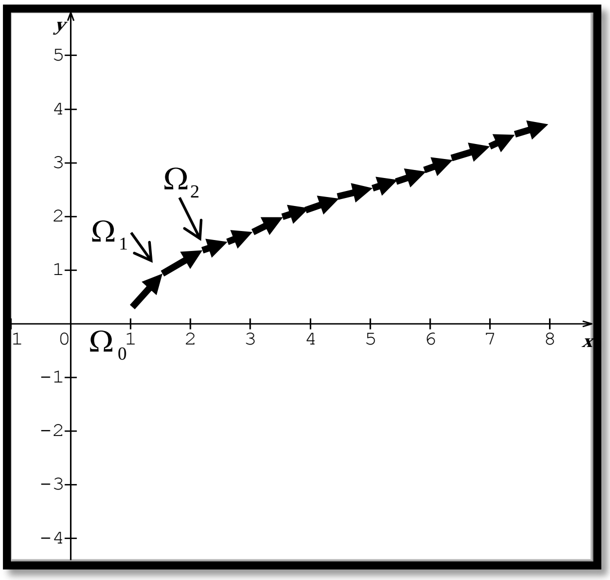
- نرســم المماس عند النقطة المعلمة من الواضح أن ميله $f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ و سوف نعبر عــــلى المماس بسهم بدايته النقطة $(1;0)$ و نهـــايته نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x=1.5$ و المماس المرسوم و التي نرمز لها بـ Ω_1 (لاحظ الشكل)

•يمكن ملاحظة قرب النقطة Ω_1 من النقطة $(1.5;f(1.5))$ المنتمية إلى منحنى الدالة، وهذا اعتمادا على المساواة التقريبيـة المذكورة في الملاحظة السابقة $f(1.5) \simeq f'(1)(1.5-1)+f(1)=0.5$ (لأن 1.5 في جوار 1) و نكون بهذا كأننا عينا نقطة أخرى لمنحنى الدالة f ،

• ثم نعيد نفس العمل و هذا برسم المستقيم الموازي للمماس عند النقطة Ω_1 أي ميله $f'(1.5)=\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3}$ ، و نعين نقطـة تقاطـــع هذا الأخير مع المستقيم الذي معادلته $x=2$ لتكن النقطة Ω_2 و التي تمثل نقطة أخرى لرسم المنحنى التقريبي مع العلـــــــــم أن:

$f(2) \simeq f'(1.5)(2-1.5)+f(1.5)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ حيث: 2 في جوار $1,5$،

هكذا حتى نصل إلى آخر نقطة $(8;f(8))$حيث: $f(8) \simeq f'(7.5)(8-7.5)+f(7.5)$ حيث $f(7.5)$ محسوبـــة ســـابقا، لاحظ الشكل التالي (نفضل الرسم مباشرة دون المرور بالحسابات السابقة):



و بالربط بين النقط بخط سلس نحصل على المنحنى التقريبي المطلوب، كلما كانت الخطـــوة صغيرة كـــــــــان الرسم أدق.

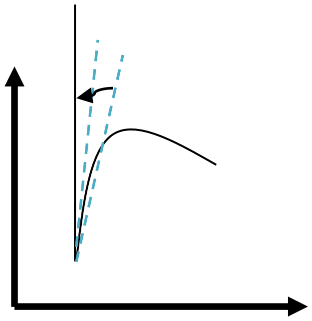
• السؤال الثالث: هل يمكن أن نذكر الحالات التي تكون فيها الدوال غير قابلة للاشتقاق، وما التفسير الهندسي في كـل حالة؟

جواب:

•النهاية غير منتهية $\lim_{h \xrightarrow[<]{>} 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \infty$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقـــاق عنـــد هــــذه القيمة،

التفسير الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب عند النقطة ذات الإحداثيات (a,b) التي تسمى نقطة توقف، كما يظهر في الشكل:



•عند حساب النهاية $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$: نضطر إلى تميز الحالتين: $b_1 \neq b_2$،

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = b_1$$
$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = b_2$$

نقول الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند هذه القيمة،

التفسير الهندسي:

المنحنى يقبل نصفي مماسين عند النقطة (a,b)، و تعطى معادلتها الديكارتية على النحو:

$$\begin{cases} (D_1): y = b_1(x-a)+b & , x \succ 0 \\ (D_2): y = b_2(x-a)+b & , x \prec 0 \end{cases}$$
و تسمى النقطة (a,b) "نقطـــة زاويـــة"

•النهاية $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ غير موجودة:

أي لا تستقرّ عند قيمة حقيقيّة، كذلك في هذه الحـــالة نقول أن الدالة f غير قـابلة للاشتقاق عند هذه القيمة،

و يمكن تفسير هذا هندسيا: منحنى الدالة لا تملـــك اتجاهـــا في جـــوار هذه النقطـــة.

ملاحظة:

يمكن أن نستنتج من عملنا السابق أن مفهوم الاشتقاق مفهوم هام جدا، إذ بفضله نحدد الاتجاه الذي يرتبط بالمنـحنى ارتباط وثيقا، باختصار لا يمكن رسم أو حتى تخيل منحنى دالة غير قابلة للاشتقاق عند كل نقطة، لاحظ المثال التالي الذي يقرب الفكرة:

$$\begin{cases} f(x)=x\sin(\frac{1}{x}) & /\, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$ ،

الدالة f المستمرة لا تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لأن النهاية: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة كما بينا سابقا و بالتالي لا يمكننا الانتقال من النقطة0 إلى نقطة أخرى لأننا لا نعرف الاتجاه الذي يجب أن نتبعه، و لحسن الحظ عند الابتعاد قليلا عن النقطة0 يمكن تحديد الاتجاه و بالتالي رسم المنحنى الممثل للدالة f.

السؤال الرابع: بما أن الاشتقاق مرتبط بالاتجاه، فهل يمكن الاعتماد عليه لدراسة تغيرات دالة ما؟

جواب:

إليك هذه المبرهنة التي تجيب عن هذا السؤال:

مـــبرهنة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I:

- نقول أن f متزايدة تماما على مـجال J من I **معناه** $f'(x)\succ 0$ من أجل كل x من J،
- نقول أن f متناقصة تماما على المجال K من I **معناه** $f'(x)\prec 0$ من أجـــل كل $x\in K$،
- نقول أن f ثـــــابتة على المجال L من I **معناه** $f'(x)=0$ من أجـــل كل $x\in L$.

لمحة عن البرهان:

لنفرض أن الدالة f متزايدة تماما على مجال J من I:

أي من أجل كل x_1, x_2 من J لدينا: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\succ 0$ لاحظ الباب الأول، معناه $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\succ 0$ من أجـل كـل x_2 قريب من x_1 المثبت،

أي: $0\prec\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\lim\limits_{x_2\to x_1}=f'(x_1)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي x_1 من J، و هو المطلوب، تترك البـــقية للقارئ.

السؤال الخامس: ما هو التفاضل*؟

جواب:

التفـــــاضل لغة هو التغير،

سوف نشاهد التفاضل رياضيا، لتكن الدالة f القابلـــــــــــة للاشتقاق عـــــــــند a أي:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\in\mathbb{R}$، يمكن كتابة: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+o(x)$ حيث: $\lim\limits_{x\to a}o(x)=0$، و منه:

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+(x-a)O(x)\quad\cdots(1)$$

نضع: $\Delta x=x-a$ و يمثل مقدار التغير، و يقابل هذا التغير تغير آخر للصورة هو $\Delta y=f(x)-f(a)$

تصبح العلاقة (1) على الشكل: $\Delta y=f'(a)\Delta x+\Delta x\, o(x)$ نلاحظ أنه كلما كان التغير Δx صغيرا كلما كان المقدار $\Delta x\, o(x)$ أصغر منه، و نقصد بالصغر الاقتراب إلى الصفر، أي يمكن التخلي على الكمية $\Delta x\, o(x)$:

و بالتالي يمكن كتابة المساواة التقريبية: $\Delta y\simeq f'(a)\Delta x$ و هذا من أجل Δx صغير.

تعريف: نسمي الكمية $f'(x)\Delta x$ بتفاضل الدالة y عند x و نرمز لها بـ : $df=dy=f'(x)\Delta x$،

ملاحظة: إذن التفاضل قيمة تقريبية للتغير Δf،

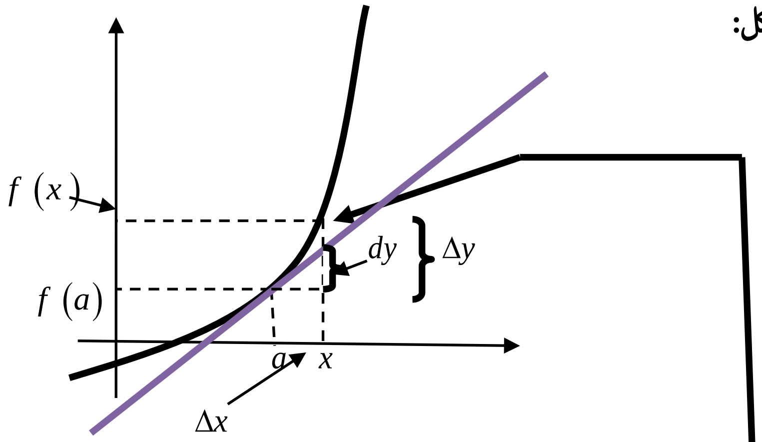
أمثلة:

- $dx = (x)' \Delta x = \Delta x$، أي: $dx = \Delta x$،
- $d(x^2) = 2x \ \Delta x = 2xdx$،

و بالتالي نضع الخلاصة: $df(x) = f'(x)dx$ أي: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ $\frac{df}{dx}(x) =$ (هذا الترميز مستعمل في الفيزياء بكثرة).

إليك الرؤية الهندسية:

لاحظ الشكل:



لاحظ أن ميل المماس للدالة f عند a مساوي لـ $f'(a)$،

و كون هذه الكمية أسرع في الاقتراب من الصفر من Δx، الكمية المتبقية تمثل التفاضل، و منه: $df = f'(a)dx$.

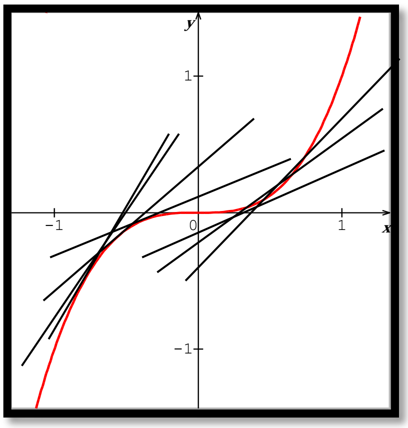
العلاقة بين المشتقة الأولى و الثانية:

نقول أن النقطة M ذات الفاصلة x_0 أنها نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f **إذا** المشتقـــــة الثانية تنعدم مغيرة إشارتها عند x_0

يمكن ملاحظة هذا بيانيا:

نقول أن منحنى دالة ينعطف عند نقطة إذا كانت أميال المماسات أو f' في جوار هذه النقطة تتزايد ثم تتناقص أو العكـــــس،

لاحظ الشكل:



و هذا معناه أن الدالة f'' سالبة تارة و موجبة تارة أخرى أو العكس -لاحظ المبرهنة في الصفحة السابقة-.

ملاحظة هامة:

أ/ إذا وجدنا $f'(x_0)=0$ و f' لم تغير إشارتها عند "في جوار" x_0 فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f ،
لاحظ أن أ/ استلزام فقط،
ب/ المماس عند نقطة الانعطاف يكون مخترقا للمنحنى يعد هذا إثبات آخر لوجود نقطة انعطاف.

خطوات رسم منحنى ممثل لدالة:

في نهاية كل دراسة دالة يطلب عادة رسم بيانها، لهذا نتبع المراحل التالية:
1) التقيّد بالسلم المعطى، أو اختيار السلم المناسب في حالة عدم وضع قيود،
2) تحديد – رسم- النقاط الخاصة:
القيم القصوى، مركز التناظر، محور التناظر، نقطة الانعطاف، نقطة الزاويّة، نقطة توقف...
3) رسم المستقيمات المقـــاربة، و المماسات،
4) مراقبة جدول التغيرات و الوضع النسبي.

ملاحظة:

كنا قد ذكرنا بعض الخواص التي يمكن أن تتصف بها دالة ما في الباب الأول، و التي تستعمل غالبا لتبسيط دراستـــها، نذكـر مثلا:
$a \succ 0$ ، لتكن الدالة f معرفة على المجال $(-a;a)$، و نقصد بالرمز $(\ .\ ;\ .\ )$: إمكانية أن يكـون المجال مغلــــقا أو مفتــــوحا،
أ/ إذا كانت الدالة f زوجية: يمكن أن نقتصر في الدراسة على مجال $[0;a)$، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمـل البقية بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب،
ب/ إذا كانت الدالة f فردية: يمكن أن نقتصر في الدراسة على مجال $[0;a)$، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمل البقية بالتناظر بالنسبة للمبدأ $(0;0)$،
ج/ إذا كانت الدالة f دورية و دورها $q \succ 0$: يمكن أن نقتصر في الدراسة على مجال طوله q، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمل البقية بدورات مشابهة للرسم السابق طول كل منها q،
د/ يمكن أن تكون الدالة (زوجية أو فردية) و دورية لتبسيط الدراسة نستعمل (أ/ أو ب/) و ج/،

تمـــــــــاريـــن حـــــــول:

* النهــــــــــــايــــــــــات،

*الاستـــــــــمراريـــــــــة،

*مبرهنة القيم المتوسطـــــــة.

النهايات:

التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{-3x^3-1}+x\sqrt[3]{3}\right)$

3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x+2}-2}{x+1}\right)$.

حل:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$

حالة عـــــدم التعيين،

إزالتها: باستعمال العامل المشترك نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}=4$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{-3x^3-1}+x\sqrt[3]{3}\right)=-\infty+\infty \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{\left(-3x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\sqrt[3]{3x^3+1}\right)\times\left(x\sqrt[3]{3}\right)+\left(x\sqrt[3]{3}\right)^2}\right)=0$

حالة عـــــدم التعيين،

لأن: تذكر أن:

$$\left(a^3+b^3\right)=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

و منه: $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ ،

نضـــــع: $a=\sqrt[3]{-3x^3-1}\ ;\ b=x\sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[3]{-3x^3-1}+x\sqrt[3]{3}=\frac{-3x^3-1+3x^3}{\left(-3x^3-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\sqrt[3]{3x^3+1}\right)\times\left(x\sqrt[3]{3}\right)+\left(x\sqrt[3]{3}\right)^2}$$

3) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x+2}-2}{x+1}\right)=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

لأن $x\prec-1$ معناه: $x+1\prec0$.

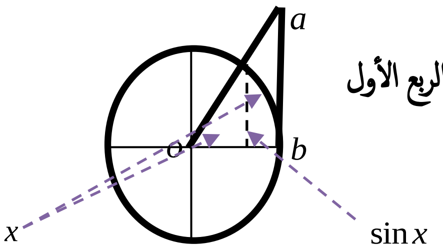
التمرين 02:

احسب النهـــــايات التـــــالية:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$ • $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(x)$.

حـل:

حساب النهايات:



• من الدائرة المثلثية يمكن ملاحظة: $\sin x \le x$ من أجل كل $x \neq 0$ (بالراديان) من الربع الأول

أي: $(1)\cdots \frac{\sin x}{x} \le 1$ و لدينا كذلك من المثلث الكبير oab: $\cos x = \frac{1}{oa}$ ،

و $\sin x = \frac{ab}{oa} \ge x\frac{1}{oa} = x\cos x$ أي: $(2)\cdots \frac{\sin x}{x} \ge \cos x$ ،

من (1) و (2) نستنتج $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ عند المرور إلى النهاية بجعل $x \xrightarrow{>} 0$ نجد و باستعمال نظريات الحصر $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

و بطريقة مماثلة "تترك للقارئ" نجد $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، أي: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ،

ملاحظة: يمكن حساب النهاية السابقة باستعمال مفهوم "الاشتقاق" لاحظ التمرين 02 صفحة 128،

• $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right) = 0$ ،

حسب دساتير التحويل الباب الأول،

حسب النهاية الأولى و هذا بتغيير المتغير بوضع: $t = \frac{x}{2}$،

• $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ،

النهاية الأولى و هذا بتغيير المتغير بوضع: $t = \frac{x}{2}$،

• $\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$

نضع $x = 2n\pi$ حيث: n من $\mathbb{N}$ تكون عندئذ النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\cos(x) = \lim_{n\to+\infty}\cos(2n\pi) = 1$ ،

و من أجل: $x = (2n+1)\pi$ نجد النهاية $\lim_{x\to+\infty}\cos x = \lim_{n\to+\infty}\cos(2n\pi+\pi) = -1$ إذن النهاية تتعلق بمسار x إلى $+\infty$

أي $\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$ لا تستقر عند قيمة و بالتالي النهاية غير موجودة عند $+\infty$،

• كذلك يمكن أن نبين عدم وجود $\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ بنفس الطريقة باختيار زوايا مناسبة مثلا $x = \frac{\pi}{2}+2n\pi$ مرة و $x = -\frac{\pi}{2}+2n\pi$ مرة أخرى "تترك الحسابات للقارئ".

التمرين 03:

احسب نهايات الدوال التالية على حدود مجموعة التعريف:

- $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$
- $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$
- $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$
- $f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2}$
- $f(x)=x^2+1-\dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$
- $f(x)=7x^3-2x^2+3x-1$
- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$
- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

حل:

حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

f معرفة معناه: $(x-1)^2\neq 0$ أي: $x-1\neq 0$ و بالتالي: $x\neq 1$ أي: $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

كثير حدود على كثير حدود و النهاية عند ∞

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x-1)^2}=\frac{3}{0^2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

أو ندرس إشارة المقام:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	

0^2 نقصد به أنه عندما يقترب x من 1 تقترب الكمية $(x-1)^2$ من قيم قريبة من الصفر و تربع فيزداد اقترابها من الصفر بإشارة موجبة،

- $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$

f معرفة معناه: $(x-1)\times(2-x)\neq 0$ أي: $x\neq 1$ و $x\neq 2$ و منه: $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}=]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{(x-1)\times(2-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-x^2}=-2=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

يمكن إعطاء تفسير هندسي لهاته النهاية: المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ أو $+\infty$ ،

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}=\frac{2}{0}$ نقـــوم بدراســـــــــة إشــــــــارة المقـــــــــام:

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$(x-1)\times(2-x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

عند ملاحظة الجدول:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}\quad \text{و} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

نستنتج أن المستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=2$ مستقيمان مقاربان عموديان لبيان الدالة f .

- $f(x)=\sqrt{x}+\frac{5}{x}$

f معرفــــــــــــــــة معنـــــــــاه: $\begin{cases}x\geq0\\ x\neq0\end{cases}$ أي: $x\succ0$ و منــــــــــــه: $D_f=]0;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left(\sqrt{x}+\frac{5}{x}\right)=0+\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{5}{x}\right)=+\infty+0=+\infty$$

- $f(x)=x+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x-2}$

f معرفة معناه: $\begin{cases}1-x\neq0\\ x-2\neq0\end{cases}$ أي: $x\neq1$ و $x\neq2$ أي: $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}=]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x-2}\right)=-\infty+0-0=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x-2}\right)=+\infty+0-0=+\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left(x+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x-2}\right)=1+\frac{1}{0}-\frac{1}{-1}$$

بدراسة إشارة $1-x$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$1-x$	$+$ 0 $-$

إذن:

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=1+\frac{1}{0^+}-\frac{1}{-1}=+\infty$$ ،

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}\left(x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}\right) = 1 - \frac{1}{0}$$

بدراسة إشارة $x-2$:

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

إذن:

$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$ ،

$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$ ،

• $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{(1-x)^2}$

f معرفة معناه: $(1-x)^2 \neq 0$ أي: $1-x \neq 0$ أي: $x \neq 1$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2}\right) = +\infty + 1 - 0 = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}\left(x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2}\right) = 2 - \frac{1}{0^2} = -\infty$$

• $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

f معرفة معناه: $x^2+1 \neq 0$ وهذا محقق من أجل كل عدد حقيقي x أي: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

• $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ،

f معرفة من أجل كل عدد حقيقي أي: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ ،

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(7x^3 - 2x^2 + 3x - 1\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(7x^3\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(7x^3 - 2x^2 + 3x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(7x^3\right) = +\infty$$

• $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ،

f معرفة معناه $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ و منه: $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

أي: $f(0) = -1$ ، و $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{2}{0}$ نقوم بدراسة إشارة المقام:

لدينا: $x \geq 1$ معناه $\sqrt{x} \geq 1$ أي: $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ ، و $0 \leq x < 1$ معناه $\sqrt{x} \leq 1$ أي: $\sqrt{x} - 1 < 0$ ، أي أمكن إنشاء الجدول:

كون الدالة الجذرية متزايدة

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	

أو يمكن استعمال المرافق أي: $\sqrt{x}-1=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ أي اشارة $\sqrt{x}-1$ من اشارة $x-1$ مع مراعاة أن $x\ge 0$،

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}$$ حالة عدم التعيين:

نستعمل المرافق:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}\times\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)=1\times(+\infty)=+\infty$$

- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ،

f معرفة معناه $\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 3\end{cases}$ أي: $D_f=[-1;3[\cup]3;+\infty[$ ،

النهايات:

$$f(-1)=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\frac{0}{0}$$ حالة عدم التعيين:

إزالتها باستعمال المرافق: $\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{+\infty}{+\infty}$$ حالة عدم التعيين:

إزالتها: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=0$ ،

التمرين 04:

f دالة عددية تحقــق من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\succ 1$:

$$\frac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\frac{3x+7}{x-1}$$

ما هي نهاية f عند $+\infty$.

حل:

لما كانت الدالة f تحقق: $\dfrac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x+7}{x-1}$ من أجل كل x أكبر تماما من 1،

عند المرور إلى النهاية وهـذا بجعــل $x\to+\infty$ نجــد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos(x)}{x}\le\lim_{x\to+\infty}f(x)\le\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{x-1}$$

$$3 \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=3 \qquad 3$$

توضيح:

هذا لأن: $\frac{3x-1}{x}\le\frac{3x+\cos(x)}{x}\le\frac{3x+1}{x}$ من أجل كل $x\succ1\succ0$ ،)

التمرين 05:

احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف، مع دراسة المستقيمات المقاربة في كل حالة من الحـــــــــــالات التالية:

- $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$ ، و • $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$ ،
- $f(x)=x+\frac{\sin(x)}{x}$ ، و • $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$ ،
- $f(x)=\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$.

حل:

- $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$ ، $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

و لدينا: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10}{x+1}=0$ أي منحنى الدالة f يقبـــــل المستقيم الذي معادلته $y=2x+3$ كمقـــــارب له في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ ،

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(2x+3+\frac{10}{x+1}\right)=1+\frac{10}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(2x+3+\frac{10}{x+1}\right)=1+\frac{10}{0^+}=+\infty$$

نستنتج أن المســـــتقيم الذي معادلته $x=-1$ مقـــــــارب عمـــــــــــودي لمنـــــحنى الــــــــــدالة f ،

- $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$ ، $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

و لدينا: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=0$ أي منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ معادلته من الشكل: $y=-x+1$ ،

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(-x+1-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{1}{0^2}=1-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

نستنتج من هاته النهاية أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب عمـــــودي لمنحـــــــــنى الــــــــــــدالة f،

- $f(x)=x+\dfrac{\sin(x)}{x}$ ، $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)=-\infty \quad , \quad \underset{\downarrow\atop 0}{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}\le\underset{\downarrow\atop 0}{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}}\le\underset{\downarrow\atop 0}{\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)=+\infty \quad , \quad \underset{\downarrow\atop 0}{\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\le\underset{\downarrow\atop 0}{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}$$

و لدينا: $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ أي منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ معادلتـه من الشكـل: $y=x$ ،

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1 ،$$

منحنى الدالة f ينطلق بالقرب من النقطة $(0;1)$،

- $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$ ، $D_f=]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x-3}{x-4}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-3}{x-4}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

و نلاحظ أنّ: $\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}=\dfrac{2(x-4)^2+9x-35}{x-4}=2x-8+\dfrac{9x-36+1}{x-4}=2x+1+\dfrac{1}{x-4}$ من أجـل كل: $x\in\mathbb{R}-\{4\}$

و $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x-4}\right)=0$ أي أمكن استنتاج أنّ: $y=2x+1$ مستقيم مقـــارب مائـــــل لمنحـــــنى الدالة f في جـــوار $\pm\infty$،

$$\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{x\to4}\frac{2x^2-7x-3}{x-4}=\frac{1}{0}$$

بدراسة إشارة المقام:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

أي:
$$\begin{cases}\lim_{x\overset{<}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}4}\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\overset{>}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases} ،$$

$x=4$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

- $f(x)=\dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ،

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

و لدينا:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x-5 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\left(x^3+2x^2+x\right) & x-2 \\ \hline -2x^2-4x-5 & \\ -\left(-2x^2-4x-2\right) & \\ \hline -3 & \end{array}$$

أي: $\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} = x-2-\frac{3}{(x+1)^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{(x+1)^2} = 0$ ،

و منه المستقيم ذو المعادلة $y = x-2$ مقارب لمنحنى الدالة f في جوار $\pm\infty$،

و $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ و بالتالي المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

التمرين 06:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2+3x}{2x-1}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها،

2) أوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث:

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{2x-1}$$

بين أن منحنى الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين.

حل:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x}{2x-1}$$

1) مجموعة التعريف:

f معرفة معناه: $2x-1 \neq 0$ أي: $x \neq \frac{1}{2}$ و منه $D_f = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3x}{2x-1} = \frac{2}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{2x^2+3x}{2x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{2x^2+3x}{2x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

2) عند استعمال القسمة مثلا:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x & 2x-1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^2-x\right) & x+2 \\ \hline 4x & \\ -(4x-2) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

أي: $\frac{2x^2+3x}{2x-1}=x+2+\frac{2}{2x-1}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ،

و منه: $a=1\ \ ,b=2\,,\,c=2$،

لدينا: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x-1}=0$ ، إذن: $y=x+2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار ∞،

من النهايات المحسوبة سابقا نستنتج أن $x=\frac{1}{2}$ هي معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

من علماء العرب:

ابن عراق:

هو الأمير أبو نصر منصور بن علي بن عراق، من أهل خوارزم، ولد لعائلة حاكمة في كيلان إيران عام (349هـ - 960م)، وتوفي عام (428 هـ - 1036م) بأفغانستان قرب مدينة غزنة، وهو من العلماء المسلمين المختصين في الرياضيات والفلك، وقد جاءت شهرته بسبب اكتشافه حساب المثلثات.

كان بن عراق معلماً للبيروني وزميلاً له، وقام وإياه بالعديد من الاكتشافات في علم الرياضيات، وبإهداء العديد من أعمالهما لبعضهما.

تركزت معظم أعمال ابن عراق على الرياضيات، في حين شملت بعض كتاباته الأخرى علم الفلك، وفي علم الرياضيات كانت له كتابات في علم المثلثات، والتي طوّرها عن كتابات بطليموس، كما صوّب ونقّح العديد من النظريات الإغريقية، ومن آثاره المعرفية التي خلّفها (رسالة في إصلاح شكل من كتاب منلاوس في الكريات) التي طبعها كراوس في برلين عام 1936م، ومن مؤلفاته كذلك (المجسطي الشاهي)، و(الدوائر التي تحد الساعات الزمانية).

الاستمرارية:

التمرين 07:

لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + b \quad ; \quad x > 1, \\ f(x) = x^2 + x \quad ; \quad x \le 1. \end{cases}$$

عين قيمة b حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد $x_0 = 1$.

حل:

الدالة f مستمرة عند 1 معناه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = 2 + b = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 2$ فنحصل على المعادلة $2 = f(1) = 2 + b = 2$ معناه: $b = 0$،

أي عبارة الدالة هي: $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \succ 1 \\ x^2 + x & ; x \le 1 \end{cases}$

التمرين 08:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & , \ x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) بين أن $|f(x)| < |x|$ من أجل كل x حيث: $x \ne 0$،

2) استنتـــــــــــج أن f مستمـــــــــــرة عنـــد 0 .

حل:

1) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$: لدينا $|f(x)| = \left| x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \right| = |x| \times \left| \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \right| \le |x| \times 1 = |x|$ و بالتالي $|f(x)| < |x|$ مـــع $x \ne 0$

2) لدينا $f(0) = 0$ ، لنحسب النهاية: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

من المتباينة السابقة نستنتج $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| \le \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ (حسب نظريات الحصر) أي: $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$ و منه: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

أي: الدالة f مستمـــرة عند0.

التمرين 09:

نعتبر الدالة العددية المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(1 - \cos x)\sin x}{x^2} & , x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ،

1) هل الدالة f مستمرة عند 0،

2) بين أن $|f(x)| \le \dfrac{2}{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

حل:

1)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}\times\sin x\right]=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\sin x\right]=\frac{1}{2}\times 1\times 0=0=f(0)$$

إذن f مستمرة عند 0،

2) ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{2}{x^2}\geq 2\frac{\left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right|\times|\sin x|}{x^2}=\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin x}{x^2}\right|=\left|\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2}\right|=|f(x)|$$ أو يمكن الاعتماد على المتباينة $|a-b|\leq|a|+|b|$

عند المرور إلى النهاية و بجعل $x\longrightarrow+\infty$ نجد: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$، (حسب نظريات الحصر).

التمرين 10:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ f(0)=0 \end{cases}$$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل:

نميز الحالتين:

- $x\neq 0$: تكون $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$، f عبارة عن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$، فهي مستمرة على $\mathbb{R}^*$،
- $x=0$:

عند تطبيق تعريف الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\underset{\uparrow}{=}\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{المرافق}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=0=f(0)$$

ح،ع،ت

أي f مستمرة عند 0،

خلاصة: f مستمرة على $\mathbb{R}$،

التمرين 11:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-a+3}{x}, & x\leq 2\\ f(x)=x^2+2x-a, & x\succ 2 \end{cases}$$ ،

عين قيمة a حتى تكون الدالة f مستمرة عند $x_0=2$.

حل:

عند استعمال تعريف الاستمرار:

f مستمرة عند 2 **معناه:** $\frac{11-a}{2}=f(2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ و هذا يكـــافئ: $\frac{11-a}{2}=8-a$ معنـــــــاه $11-a=16-2a$ و منه $a=5$،

تصبح عبارة الدالة:

$$.f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-2}{x} & , \quad x\le 2\\ x^2+2x-5 & , \quad x\succ 2\end{cases}$$

التمرين 12:

تـــعريف:

- نسمي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x العدد الصحيح n الذي يحقق: $n\le x\prec n+1$ و نرمز له بـ: $[x]=n$ أو $E(x)$،

مثال:

حساب: $[11.01]$, $[\sqrt{3}]$, $[-1]$, $[-2.3]$:

لدينا: $-3\le -2.3\prec -2$ و عليه: $E(-2.3)=[-2.3]=-3$

$-1\le -1\prec 0$ و عليه: $E(-1)=[-1]=-1$

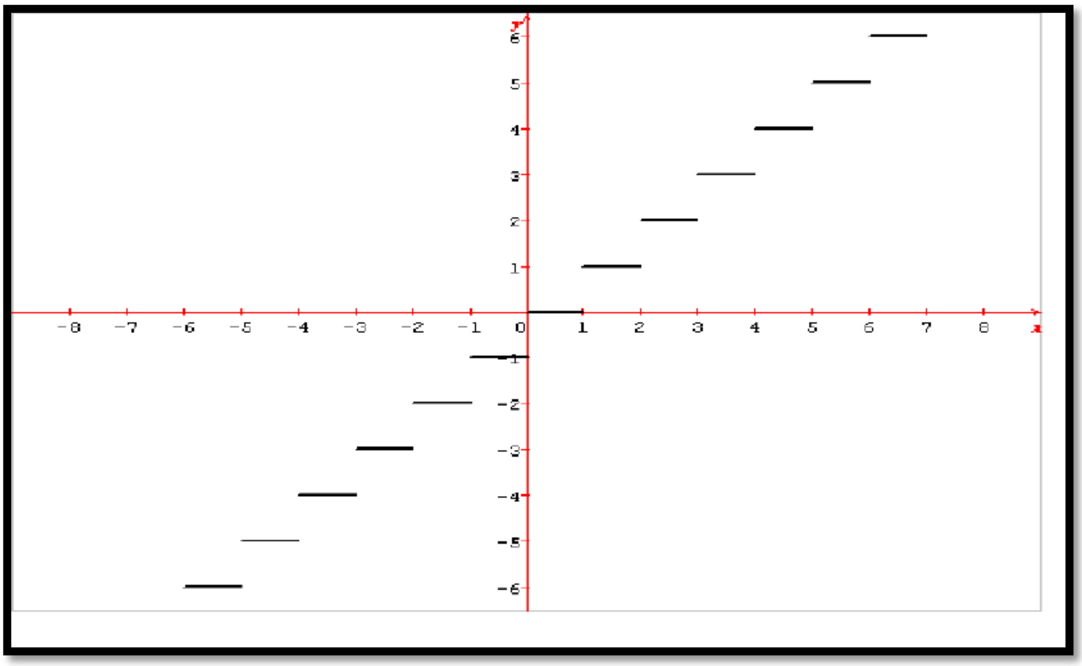
لاحظ من أجل كل عدد n من $\mathbb{Z}$ لدينا: $n\le n\prec n+1$ أي يمكن استنتاج: $E(n)=[n]=n$

$1\le\sqrt{3}\prec 2$ و عليه: $E(\sqrt{3})=[\sqrt{3}]=1$

$11\le 11.01\prec 12$ و عليه: $E(11.01)=[11.01]=11$

- يمكن ملاحظة أن كل عدد حقيقي يملك جزء صحيحا واحدا، أي يمكن تعريف الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي بالجزء الصحيح له،

أي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون: $f(x)=[x]$ ، و التمثيل البياني لهذه الدالة هو:



أدرس استمرارية الدوال التالية:

1) $f(x)=[x]$ على $\mathbb{R}$ ،

2) $f(x)=x([2x]-2[x])$ على $\mathbb{R}$ ،

3) $f(x)=[x]\sin(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

4) $g(x)=[x]\sin(\pi x)$ على $\mathbb{R}$ ،

5) $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Z}\\ x & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ على $\mathbb{R}$

حل:

دراسة استمرارية الدوال:

1) $f(x)=[x]$ على $\mathbb{R}$

• ليكن $a\in\mathbb{Z}$ لدينا $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}[x]=a-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}[x]=a\end{cases}$ أي f غير مستمرة عند كل عدد صحيح،

• $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}[x]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}[x]=[a]=f(a)\longrightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}[x]=[a]\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}[x]=[a]\end{cases}$

أي f مستمرة عند $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ،

و التمثيل البياني السابق يؤكد ذلك،

2) $f(x)=x([2x]-2[x])$ على $\mathbb{R}$ ،

نكتب الدالة f دون رمز الجزء الصحيح:

• ليكن: $x\in[n;n+1[$ حيث: $n\in\mathbb{Z}$ ، فإن: $[x]=n$

فيكون: $2n\le 2x\prec 2n+2$ أي: $2x\in\{2n\}\cup]2n;2n+1[\cup\{2n+1\}\cup]2n+1;2n+2[$ و بالتالي وجب تمييز الحالات:

أ) $2x=2n$ (أي: $x=n$) فإن: $[2x]=2n$ و $[x]=n$

$$f(x)=0\quad ,x=n\in\mathbb{Z}$$

ب) $2x\in]2n;2n+1[$ (أي: $x\in\left]n;\frac{2n+1}{2}\right[$) فإن: $[2x]=2n$ و $[x]=n$

$$f(x)=0\quad ,x\in\left]n;\frac{2n+1}{2}\right[\quad ,n\in\mathbb{Z}$$

ج) $2x\in]2n+1;2n+2[$ (أي: $x\in\left]\frac{2n+1}{2};n+1\right[$) فإن: $[2x]=2n+1$ و $[x]=n$

$$f(x)=x\quad ,x\in\left]\frac{2n+1}{2};n+1\right[\quad ,n\in\mathbb{Z}$$

تذكر أن $\frac{2n+1}{2}$ منتصف القطعة $[n;n+1]$ ،

د) $2x=2n+1$ (أي: $x=\frac{2n+1}{2}$) فإن: $[2x]=2n+1$ و $[x]=n$ ،

$$f(x)=x\quad ,x=\frac{2n+1}{2}\ ,n\in\mathbb{Z}$$

و التالي أمكن كتابة: $n \in \mathbb{Z}$ ، $f(x)=\begin{cases} 0 & , x \in \left[n;\frac{2n+1}{2}\right[\\ x & , x \in \left[\frac{2n+1}{2};n+1\right[\end{cases}$ ،

من الواضح:

- استمرار الدالة f على كل مجال من الشكل: $\left]n;\frac{2n+1}{2}\right[$ لأنها عبارة على دالة ثابتة، حيث $n \in \mathbb{Z}$ ،
- و استمرار الدالة f على كل مجال من الشكل: $\left]\frac{2n+1}{2};n+1\right[$ لأنها دالة خطية، حيث $n \in \mathbb{Z}$ ،

لندرس الاستمرارية عند $n \in \mathbb{Z}$ و $\frac{2n+1}{2}$:

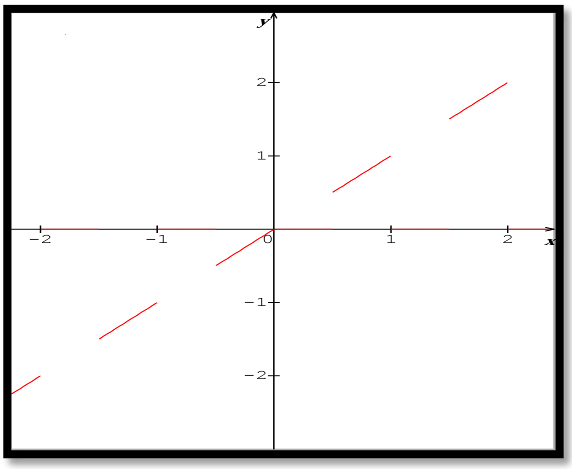
- $n \in \mathbb{Z}$:

$f(n)=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} n} f(x)=0 \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{<} n} f(x)=n$ إذن الدالة f غير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معدوم،
في حين نلاحظ استمرارها عند الصفر،

- $\frac{2n+1}{2}$:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{2n+1}{2}} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{2n+1}{2}} 0=0 \neq \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{2n+1}{2}} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{2n+1}{2}} x=\frac{2n+1}{2}$$

أي f غير مستمرة عند كل عدد ناطق من الشكل: $\frac{2n+1}{2}$ حيث n من
و الشكل التالي يوضح هذا:



3) $f(x)=[x]\sin(x)$ على $\mathbb{R}$ ،
لدينا الحالتان:

- $n \prec x_0 \prec n+1$ مع $n \in \mathbb{Z}$: $f(x_0)=n\sin x_0=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)$

أي f مستمرة عند x_0 ،

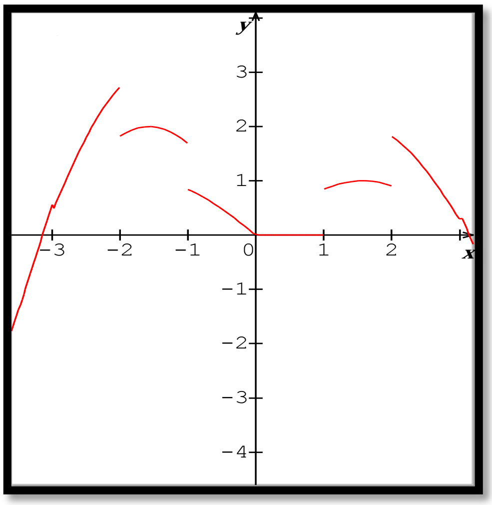
•• $x_0=n \in \mathbb{Z}$:

$f(x_0)=n\sin(n)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=n\sin(n)\neq(n-1)\sin(n)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)$ ،

إذن f غير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معدوم،

أما عند الصفر فيكون: $f(0)=\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=0\sin 0=0=(-1)\sin 0=\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x)$ أي استمرار f عند 0،

لاحظ الشكل:



4) $g(x)=[x]\sin(\pi x)$ على $\mathbb{R}$،

لدينا الحالتان:

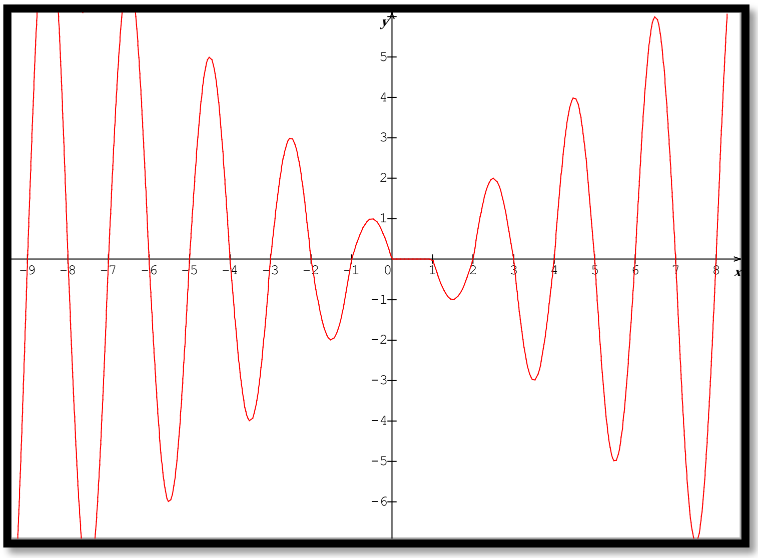
• $n \prec x_0 \prec n+1$ مع $n\in\mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x)=n\sin(\pi x_0)=f(x_0)$،

أي f مستمرة عند x_0،

•• $x_0=n\in\mathbb{Z}$:

$f(n)=\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} n} f(x)=0=(n-1)\sin(n\pi)=\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} n} f(x)$،

إذن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$،



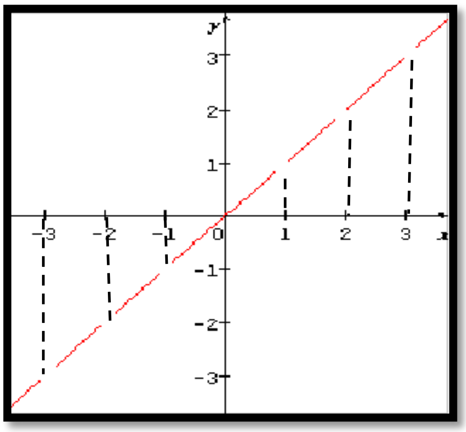
5) $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Z}\\ x & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ على $\mathbb{R}$،

نميز الحالتين:

• $x\notin\mathbb{Z}$: الدالة f مستمرة لأنها خطية "كثير حدود"،

•• $x\in\mathbb{Z}^*: f(x)=n\neq 0=f(x)$ $\lim\limits_{x\to n\in\mathbb{Z}^*} f$ أي f غـــير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معـــــــــــــــدوم،

••• $x=0: f(x)=0=f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f$ ، أي f مستمرة عند 0 ،



التمرين 13:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)\left[\dfrac{1}{x-1}\right] & , \quad x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f،

2) احسب: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$.

حل:

1) دراسة استمرارية الدالة f:

كتابة الدالة f دون رمز الجزء الصحيح: ليكن $n\in\mathbb{Z}$، من أجل $n\leq\dfrac{1}{x-1}\prec n+1$ لنميز الحالات:

• $n=0$ يكون: $\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=0$ ، أي: $f(x)=0$،

• $n=-1$ يكون: $-1\leq\dfrac{1}{x-1}\prec 0$ أي: $\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=-1$ و منه $f(x)=-(x-1)$ ،

• $n\neq 0$ و $n\neq -1$ يكون: $\dfrac{1}{n+1}\prec x-1\geq\dfrac{1}{n}$ و منه: $\dfrac{1}{n+1}+1\prec x\leq\dfrac{1}{n}+1$ أي: $f(x)=(x-1)\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=(x-1)\times n$

نلخص بـــــ:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\leq\dfrac{1}{x-1}\prec 1\longrightarrow x\succ 2 \\ (x-1)\times n & , \quad \dfrac{1}{n+1}+1\prec x\leq\dfrac{1}{n}+1 \quad , \quad n\in\mathbb{Z}-\{0;-1\} \\ -(x-1) & , \quad x\leq 0 \\ 1 & , \quad x=1 \end{cases}$$

نميز الحالات التالية:

• إذا كان $x\succ 2$: f دالـــــــة مستمرة عـــــلى هـــــــــــذا المجـــــــال لأنهـــــا معـــــــــدومة،

• إذا كان $x\prec 0$: f دالة مستمرة عـــــــــــــلى هــــذا المجـــال لأنهــــــــــــا دالة تـــــــــآلفية،

• إذا كان: $\frac{1}{n+1}+1 \prec x \prec \frac{1}{n}+1$: f دالة مستمرة على هذا المجال لأنها دالة تآلفية،

• إذا كان: $x=1$:

ليكن العدد الحقيقي x قريبا بكفاية من العدد 1، لأجل هذا نميز الحالتين:

الحالة الأولى $x \prec 1$:

يوجد $n \in \mathbb{Z}^*-\{-1\}$ حيث $\frac{1}{n+1}+1 \prec x \le \frac{1}{n}+1$ (نلاحظ أن $n \to -\infty$ يكافئ $x \xrightarrow{\prec} 1$)

و بالتالي: $f(x)=n(x-1)$ و كون f متناقصة تماما على المجال السابق أمكن كتابة:

$$f\left(\frac{1}{n}+1\right) \le f(x) \prec \lim_{x \xrightarrow{\succ} \frac{1}{n+1}+1} f(x)$$

أي: $$1 \le f(x) \prec \frac{n}{n+1}$$

بجعل $n \to -\infty$ يكون $x \xrightarrow{\prec} 1$ نجد: $1 \le \lim_{x \xrightarrow{\prec} 1} f(x) \prec \lim_{x \to +\infty} \frac{n}{n+1}=1$ و حسب نظريات الحصر يكون:

$\lim_{x \xrightarrow{\prec} 1} f(x)=1$ ،

الحالة الثانية $x \succ 1$:

يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ حيث $\frac{1}{n+1}+1 \prec x \le \frac{1}{n}+1$ (نلاحظ أن $n \to +\infty$ معناه $x \xrightarrow{\succ} 1$)

و بالتالي: $f(x)=n(x-1)$ و كون f متزايدة تماما على المجال السابق نجد:

$$\lim_{x \xrightarrow{\succ} \frac{1}{n+1}+1} f(x) \prec f(x) \le f\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

أي: $$\frac{n}{n+1} \prec f(x) \le 1$$

بجعل $n \to +\infty$ يكون $x \xrightarrow{\succ} 1$ نجد: $\lim_{x \to +\infty} \frac{n}{n+1}=1 \prec \lim_{x \xrightarrow{\prec} 1} f(x) \le 1$ و حسب نظريات الحصر يكون:

$\lim_{x \xrightarrow{\succ} 1} f(x)=1$ ،

أي: $\lim_{x \to 1} f(x)=1=f(1)$.

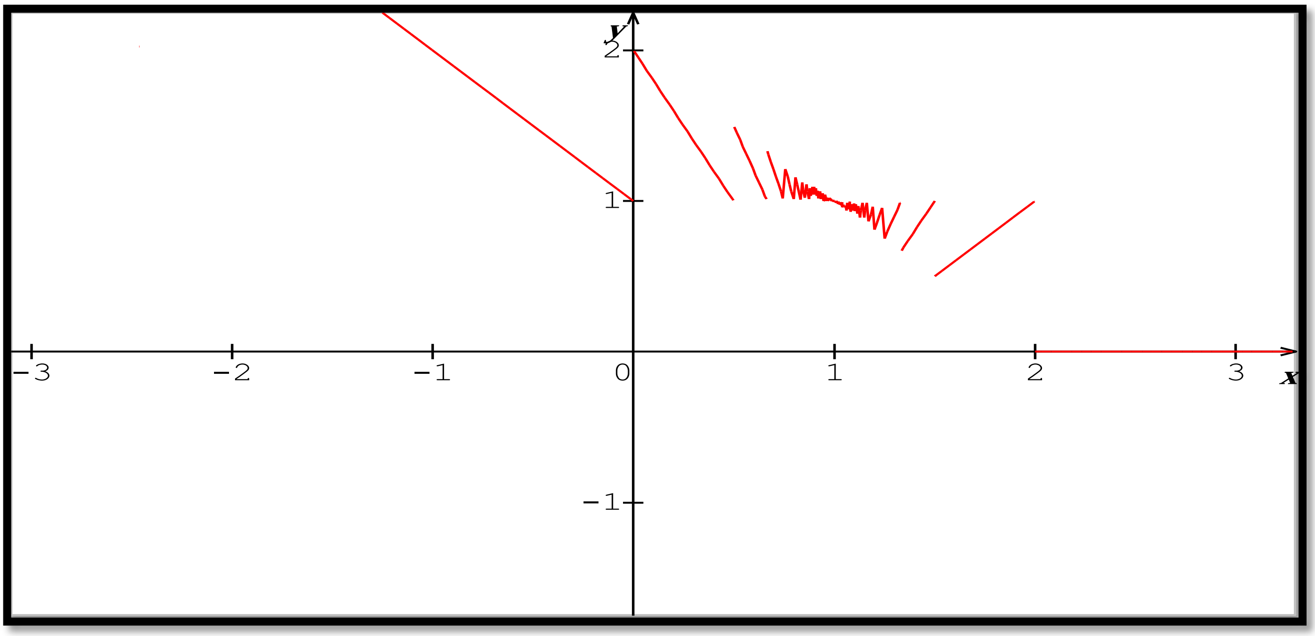
الخلاصة: f مستمرة عند 1،

• بقي أن ندرس الاستمرارية عند $x=1+\frac{1}{n}$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{x \xrightarrow{\prec} 1+\frac{1}{n}} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{\prec} 1+\frac{1}{n}} \left(n(x-1)\right)=1 \ne \lim_{x \xrightarrow{\succ} 1+\frac{1}{n}} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{\succ} 1+\frac{1}{n}} \left((n-1)(x-1)\right)=\frac{n-1}{n}$$

أي f غير مستمرة عند كل قيمة $x=1+\frac{1}{n}$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$.

لاحظ الشكل:



2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-(x-1)\right]=+\infty$ وهـــــذا من العبـــــارة السابقة.

التمرين 14:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & , x\neq 0\\ -1 \quad ; & x=0\end{cases}$$

1) أكتب f دون رمز القيمة المطلقة،

2) هل f مستمرة عند $-1, 0, 1$؟

3) ادرس استمرارية f على المجالين: $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right], [2;5]$.

حل:

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$: لدينا
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2-x} & , \quad x\succ 0\\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x} & , \quad x\prec 0\\ -1 & , \quad x\neq 0\end{cases}\longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & , \quad x\succ 0\\ \dfrac{x-1}{x+1} & , \quad x\prec 0\\ -1 & , \quad x\neq 0\end{cases}$$

2) دراسة استمرارية الدالة عند $-1, 0, 1$:

f دالة غير معرفة عند القيمتين: $-1, 1$ و هذا كاف للحـــكم على عدم استمرارهـــا عنـــدها،

أما عند 0: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x+1}{x-1}=-1=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x-1}{x+1}=f(0)$ أي الـــدالة f مستمرة عنـــد الصفر،

3) نلاحظ انتماء العدد 1 إلى المجال $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ التي f غير مستمرة عنده، أي f غـــير مستمرة على المجـــال $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$،

• $x\in[2;5]$ أي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و بالتالي f مستمرة على المجال المفتوح $]2;5[$ و على يمين 2 و يسار 5،

التمرين 15:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(3-x)^n-a}{x-2} & ,x\succ 2\\[2mm] \dfrac{b-x}{2} & ,x\leq 2\end{cases}\qquad ,\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

أ) أدرس استمرار الدالة f على المجاليـن: $]2;+\infty[$, $]-\infty;2[$ ،

ب) عين قيمتي a , b حتى تكـون الدالة مستمرة عنـد 2.

حل:

أ) • ليكن: $x\in]2;+\infty[$ تكون $f(x)=\dfrac{(3-x)^n-a}{x-2}$ و هي عـبارة عن ضرب دالتـين مستمرتـين على $]2;+\infty[$

إذن f مستمرة عـلى $]2;+\infty[$ ،

• ليكـن: $x\in]-\infty;2[$ تكـون $f(x)=\dfrac{b-x}{2}$ و هي دالة مستمـرة على $]-\infty;2[$ لأنها دالة تآلفية مستمرة على $\mathbb{R}$

و بالأخص عـلى $]-\infty;2[$ ،

ب) تعيين قيمتي a , b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2:

لدينا f مستمرة عند 2 معناه $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}2}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}2}f(x)=f(2)\cdots(*)$، لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}2}f(x)=f(2)=\dfrac{b-2}{2}$ و

$$\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}\left(\frac{(3-x)^n-a}{x-2}\right)=\frac{1-a}{0}\cdots(**)$$

وجب تمييز الحالتين:

١) $a=1$:

$$\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}\left(\frac{(3-x)^n-1}{x-2}\right)=\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}\left(\frac{(3-x-1)\left((3-x)^0+(3-x)^1+\cdots+(3-x)^{n-1}\right)}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}\left(-\left((3-x)^0+(3-x)^1+\cdots+(3-x)^{n-1}\right)\right)=-\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ مرة}}\right)=-n$$

و من $(*)$ و بعد حساب النهاية: $(**)$ نجد: $\dfrac{b-2}{2}=-n$ أي: $b=-2n+2$.

٢) $a\neq 1$:

$$\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{\succ}2}\frac{(3-x)^n-a}{x-2}=\frac{1-a}{0^+}=\begin{cases}+\infty\,,a\prec 1\\-\infty\,,a\succ 1\end{cases}$$

و هذا كاف للحكم أن f غير مستمـرة في هـذه الحالة،

خلاصة: f مستمرة عند 2 معناه $a=1$ و $b=-2n+2$.

التمرين 16:

لتكن الدالة f المستمرة على المجال $[0;1]$ حيث: $f(1)=f(0)=0$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$: $f(x)\succ 0$،

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0;1[$ حيث: $f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

حل:

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ حيث: $f(1)=f(0)=0$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، نضع: $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ لدينا: g مستمرة على المجال $\left]0;1-\frac{1}{n}\right[\subset]0;1[$

لأنها تركيب دوال مستمرة على نفس المجال، و

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)=0-f\left(\frac{1}{n}\right)=-f\left(\frac{1}{n}\right)\prec 0$$

لدينا $\frac{1}{n}\in]0;1[$ أي $f\left(\frac{1}{n}\right)\succ 0$ حسب المعطيات،

و $g\left(1-\frac{1}{n}\right)=f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f(1)=f\left(1-\frac{1}{n}\right)\succ 0$

$$0\prec\frac{1}{n}\prec 1\quad,\quad n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$$

$$0\succ\frac{-1}{n}\succ -1\longrightarrow 0\prec 1-\frac{1}{n}\prec 1\longrightarrow f\left(1-\frac{1}{n}\right)\succ 0$$

أي: $g(0)\times g\left(1-\frac{1}{n}\right)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $c\in\left]0;1-\frac{1}{n}\right[\subset]0;1[$ حيث $g(c)=0$ أي:

$$f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$$

و . هـ . م

التمرين 17:

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث : $f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$

- بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]a;b[$ بحيث: $f(c)=bc$.

حل:

نضع: $g(x)=f(x)-bx$

g دالة مستمرة على المجال $]a;b[$ لأنها مجموع دوال مستمرة على المجال السابق و

$$g(a)=f(a)-ab\prec 0\qquad,\qquad g(b)=f(b)-b^2\succ 0$$

من المعطيات،

أي: $g(a)\times g(b)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل c من $]a;b[$ حيث: $g(c)=0$ أي $f(c)=cb$

و. هـ. م

التمرين 18:

f دالة مستمرة على المجال: $[0;1]$ بحيث: $f(0)=0$ و $f(1)=1$

• بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث: $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$.

حل:

نضع $g(x)=f(x)-\dfrac{1-x}{1+x}$ ،

g دالة مستمرة على المجال $]0;1[$ لأنها مجموع دوال مستمرة على المجال السابق، و $g(0)=f(0)-1=-1$ و $g(1)=1-0=1$

أي: $g(0)\times g(1)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل $c\in]0;1[$ حيث: $g(c)=0$ أي: $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$ ،

و.ه.م

تمارين حـول الاشـــــــتقـــاقية:

التمرين 01:

احسب الدوال المشتقة للدوال التالية :

- $f(x)=5x^4-x^3+x+1$،
- $f(x)=\dfrac{1}{(3x-4)^4}$،
- $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-4}+(2x-1)^7$ ،
- $f(x)=\sin^3 x-\cos^3 x+2\tan x$.

حل:

حساب الدوال المشتقة:

- f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(5x^4-x^3+x+1\right)'=\left(5x^4\right)'-\left(x^3\right)'+\left(x\right)'+\left(1\right)'=20x^3-3x^2+1$

مع: $x\in\mathbb{R}$،

- f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ و $f'(x)=\left(\dfrac{1}{(3x-4)^4}\right)'=\dfrac{-\left((3x-4)^4\right)'}{(3x-4)^8}=\dfrac{-12(3x-4)^3}{(3x-4)^8}=\dfrac{-12}{(3x-4)^5}$ ،

مع: $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$،

- f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ و

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{3x-4}+(2x-1)^7\right)'=\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)'+\left((2x-1)^7\right)'=$$
$$=\frac{1\times(3x-4)-3\times(x+1)}{(3x-4)^2}+14(2x-1)^6=\frac{-7}{(3x-4)^2}+14(2x-1)^6$$

مع: $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$،

- f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\left(\sin^3 x-\cos^3 x+2tgx\right)'=\left(\sin^3 x\right)'-\left(\cos^3 x\right)'+2\left(tgx\right)'=$$
$$=3\cos x\times\sin^2 x+3\sin x\times\cos^2 x+2\left(1+tg^2 x\right)$$

مع: $x\in\mathbb{R}$،

التمرين 02:

باستعمال تعريف الاشتقاق احسب النهايات التالية:

* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-3)^2-4}{x-1}$،
* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$،
* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$،
* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

حل:

* لدينا: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2-(1-3)^2}{x-1}=\left[2(x-3)\right]_{x=1}=-4$ ،

مشتقة الدالة $x\mapsto(x-3)^2$ عند 1

(أو يمكن استعمال الطريقة: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3-2)(x-3+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-5)=-4$)

* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\left[\cos x\right]_{x=0}=1$

مشتقة الدالة $x\mapsto\sin x$ عند 0

كنا قد وجدنا هاته النهاية في درس النهايات،

* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x-\cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\left[-\sin x\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$ ،

مشتقة الدالة $x\mapsto\cos x$ عند $\pi/2$

* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2-1}}{x-2}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)_{x=2}=\dfrac{1}{2}$ ،

مشتقة الدالة $x\mapsto\sqrt{x-1}$ عند 2

(أو نستعمل المرافق: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$)

التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x};x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(0)=0\end{cases}$$

- ادرس استمرار الدالة f عند 0،
- هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

حل:

- دراسة الاستمرارية عند الصفر:

$$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$$ حالة عدم التعيين:

و لدينا حسب العلاقات المثلثية المدروسة سابقة:

$\cos x=1-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ أي: $2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=1-\cos x$ و $\sin x=2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

أي تصبح النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=0$$

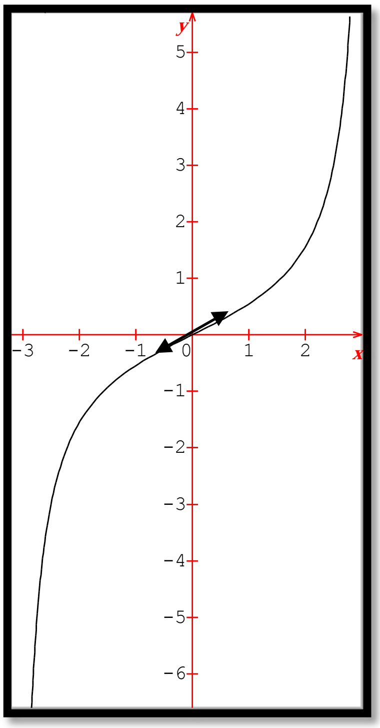
و بالتالي الدالة f مستمرة عند **0**،

- **دراسة القابلية للاشتقاق عند الصفر: بتطبيق التعريف**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\times\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

أي الدالة f قابلة للاشتقاق عند**0**.

لاحظ التمثيل البياني:



التمرين 04:

نعتبر الدالة العددية المعرفة من أجل كل عدد حقيقي: $f(x)=x^3+ax^2+b$ ،

حدد العددين a و b علما أن المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ هو مماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة **1**.

حل:

تعيين العددين a و b :

من معادلة المماس أمكن استنتاج: $f(1)=-1 \Leftarrow 1+a+b=-1 \cdots (*)$ و $f'(1)=1 \Leftarrow 3+2a=1$ أي: $a=-1$ ،

و من $(*)$ نجد $b=-1$ في الختام الدالة المطلوبة: $f(x)=x^3-x^2-1$.

التمرين 05:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

- احسب النهايات عند حدود أطراف مجموعة التعريف،
- ادرس المستقيمات المقاربة،
- احسب f' و ادرس إشارتها مشكلا جدول تغيرات الدالة f،
- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين -1.6 و -1.7 ،
- ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f)،

حل:

$f(x)=3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}$ و $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ،

- النهايات عند الأطراف المفتوحة:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{3x-1}_{-\infty}-\underbrace{\frac{x-1}{(x+1)^2}}_{0}\right)=-\infty$$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\left(3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}\right)=-4+\frac{2}{0^2}=-4+\frac{2}{0^+}=+\infty$$

- المستقيمات المقاربة:

من النهايات السابقة أمكن كتابة:

$x=-1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

$y=3x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ و $+\infty$ ، لأن: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{(x+1)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

- ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x)=\left(3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2}\right)'=3-\frac{1\times(x+1)^2-2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}=3-\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3}=3+\frac{x-3}{(x+1)^3}=$$

$$\frac{3(x^3+3x^2+3x+1)+x-3}{(x+1)^3}=\frac{3x^3+9x^2+9x+3+x-3}{(x+1)^3}=\frac{x(3x^2+9x+10)}{(x+1)^3}=\frac{x(x+1)(3x^2+9x+10)}{(x+1)^4}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $x(x+1)(3x^2+9x+10)$:

عند حساب مميز كثير الحدود من الدرجة الثانية: $\Delta=81-120=-39\prec 0$ أي: $3x^2+9x+10\succ 0$ من أجل كل عدد حقيقي

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	‖	$+\infty$ ↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

و $f(0)=0$ ،

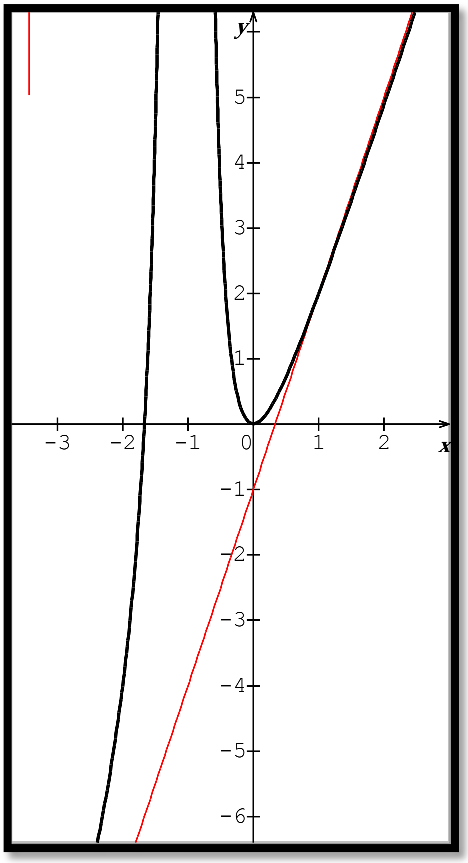
- نلاحظ أن $-1\succ-1.6\succ-1.7$ من جدول التغيرات يمكن أن نستنتج f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1.7;-1.6[$

و $f(-1.7)=-6.1+\dfrac{2.7}{0.49}\simeq-6.1+5.51\simeq-0.59$ و $f(-1.6)=-5.8+\dfrac{2.6}{0.36}=-5.8+7.22=1.42$

أي: $f(-1.7)\times f(-1.6)\prec0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1.6;-1.7[$ ،

- رسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f):



التمرين 06:

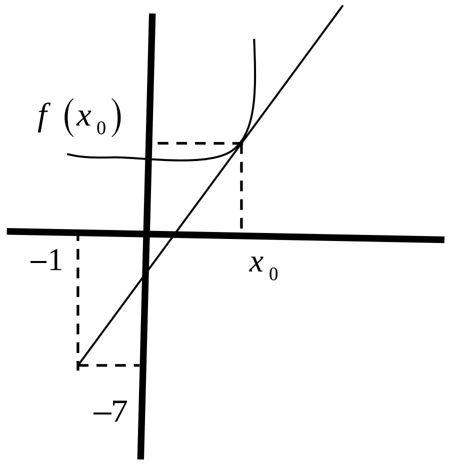
f دالة عددية معرفة على: $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ ،

(Δ) مماس لمنحنى الدالة f يشمل النقطة $(-1;-7)$ ،

أوجد معادلة المماس.

حل:

طريقة أولى:



(Δ) مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_0;f(x_0))$ يشمل النقطة $(-1;-7)$،

المساواة التالية واضحة: $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)+7}{x_0+1}$

عند حساب المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq 1$: $f'(x)=\dfrac{3x+3-3x+2}{(x+1)^2}=\dfrac{5}{(x+1)^2}$

أي: $\dfrac{\dfrac{3x_0-2}{x_0+1}+7}{x_0+1}=\dfrac{5}{(x_0+1)^2}\rightarrow\dfrac{3x_0-2+7x_0+7}{(x_0+1)^2}=\dfrac{5}{(x_0+1)^2}$

$10x_0=0\longrightarrow x_0=0$

تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $(\Delta):y=5x-2$

طريقة ثانية:

ليكن $(\Delta):y=ax+b$ معادلة المماس لمنحنى f و $(-1;-7)\in(\Delta)$ أي: $b=-7+a\cdots(*)$،

تعيين فاصلة النقطة التي يكون فيها (Δ) مماسا لمنحنى الدالة f، أي لنبحث عن $x_0\in\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث:

$(**)\cdots f'(x_0)=a$

$(**)$ تكافئ $\dfrac{5}{(x+1)^2}=a$ أي $(x+1)^2=\dfrac{5}{a}$ من الواضح أن $a\neq 0$ أي: $x_0=\sqrt{\dfrac{5}{a}}-1$ أو $x_0=-\sqrt{\dfrac{5}{a}}-1$،

لدينا: $(x_0;f(x_0))\in(\Delta)$ نميز الحالتين:

• $x_0=\sqrt{\dfrac{5}{a}}-1$ و $f(x_0)=ax_0+b$ عند التعويض: $\dfrac{3\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5}{\sqrt{\dfrac{5}{a}}}=\sqrt{5a}-a+b$ و من $(*)$ نجد $\dfrac{3\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5}{\sqrt{\dfrac{5}{a}}}=\sqrt{5a}-7$ أي:

$3\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5=5-7\sqrt{\dfrac{5}{a}}$ و منه: $10\sqrt{\dfrac{5}{a}}=10\longrightarrow a=5$ و من $(*)$ نجد $b=-2$ ،

أي معادلة المماس في هذه الحالة: $(\Delta):y=5x-2$ و نقطة التماس هي: $(0;-2)$،

• $x_0=-\sqrt{\dfrac{5}{a}}-1$ و $f(x_0)=ax_0+b$ عند التعويض: $\dfrac{-3\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5}{-\sqrt{\dfrac{5}{a}}}=-\sqrt{5a}-a+b$ و من $(*)$ نجد $\dfrac{-3\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5}{-\sqrt{\dfrac{5}{a}}}=-\sqrt{5a}-7$

$$-3\sqrt{\frac{5}{a}}-5=-\sqrt{\frac{5}{a}}\left(-\sqrt{5a}-7\right)$$

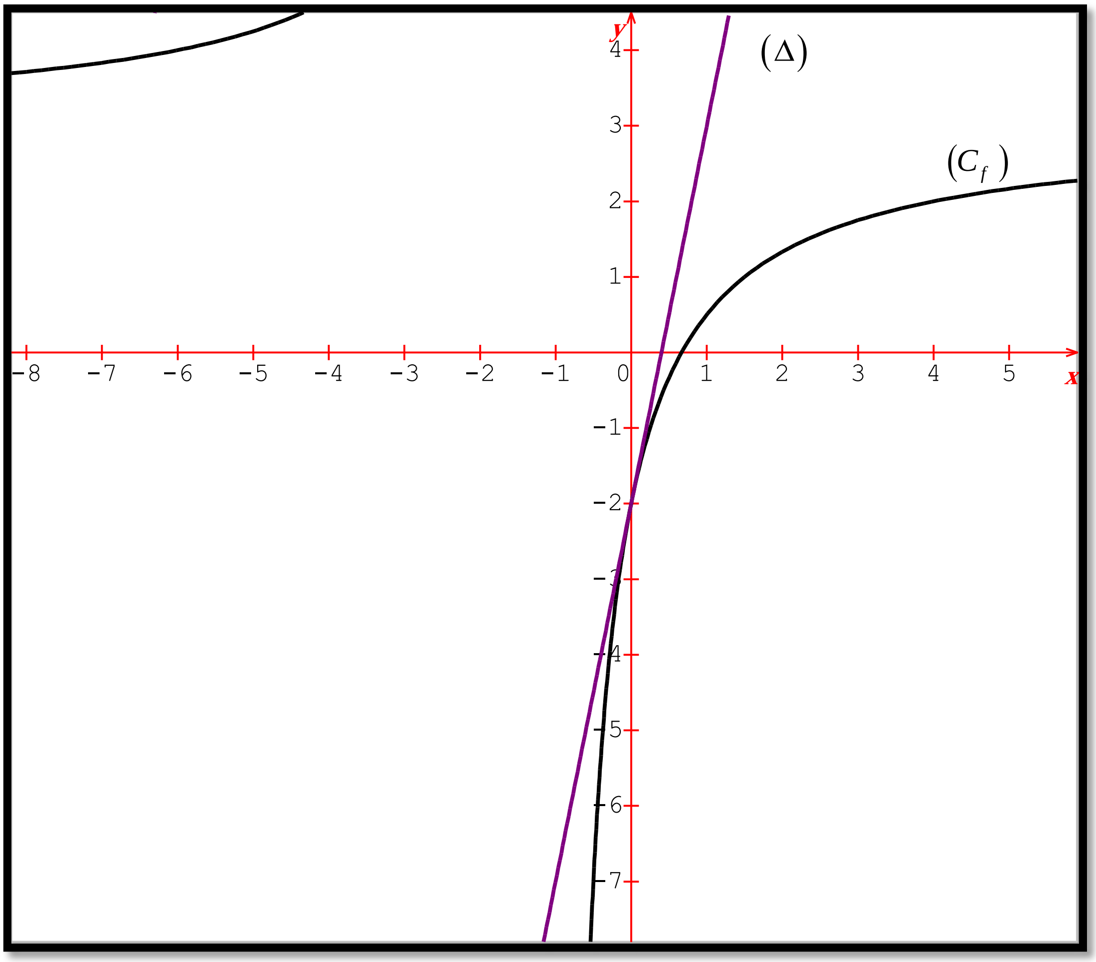
$$-3\sqrt{\frac{5}{a}}-5=5+7\sqrt{\frac{5}{a}}$$

$$10\sqrt{\frac{5}{a}}=-10$$

$$\sqrt{\frac{5}{a}}=-1$$

و هذه المعادلة لا تقبل حلولا.

لاحظ الشكل:



الدوال الأصلـــــــــــــــية:

الدرس الأول:

تمهيـــــد:

نعود إلى الفصل الأول أي الدوال العددية، حيث بينا أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال من مجموعة تعريفها، تعرف دالة أخـرى سميت بالدالة المشتقة - لقد قدمنا تبريرا لهذه التسمية - فمن المنطقي أن نطرح السـؤال التـــالي:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال I،

هل توجد دالة F تعد مشتقتها f على مجال I أي من أجل كل x من I: $F'(x)=f(x)$ ؟

تعتبر الدالة F أصل ظهور الدالة f لهذا اختير لها اسم **"الدالة الأصلية"**،

جواب:

مثل هذا السؤال يظهر جليا في مسائل البحث عن حلول معادلات تفاضلية مثلا، و التي قلنا أنها تمثل محاكاة لبعض الظواهر المختلفة التي يتعرض لها الإنسان، خاصة في ظل التوجه الذي يشهده العالم نحو العددية،

وبالتـــالي أعطي اهتمـــام بالغ لمثـــل هـــاته الأسئلـة وحاول الرياضيـاتيون إعطـاء حلول في باب سمي بالتحليـل الرياضي، إليك بعض التعاريف الأولية و المبرهنات في هذا الباب الواسع الذي لا شـك أننا سنكتشف فيه بعض الجوانب في سنوات قادمة:

تعريف الدالة الأصليّة:

لتكن الدالة f المعرّفة على المجال I، و F دالة قابلة للاشتقاق على I، إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل x من I: $F'(x)=f(x)$

نقول عندئذ أنّ F دالة أصليّة للدالة f على المجال I.

سؤال:

ما هي الشروط التي يجب أن تتوفر حتى تقبل الدالة f دالة أصليّة؟

جواب :

إليك هاته الـ

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا كانـــــت f دالة مستمرّة على المجال I (مغلق أو مفتوح أو نصف مفتوح)، فإن f تقبل دالـــــة أصليّة على المجال I.

ملاحظة:

شرط المبرهنة لازم لا كافيا، أي يمكن أن تكون F دالة أصليّة لدالة f غير مستمرّة على مجال I، إليك هذا **المثال:**

لتكن الدالتان F و f المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x}+2x & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x)=\begin{cases}-\left(\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x^2}\right)+2 & , x\neq 0\\ \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

بدايـــــــة لنتأكـد أنّ: $F'(x)=f(x) \quad , x\in\mathbb{R}$،

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ أي: $F(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}+2x$ و منه:

$$F'(x)=\left(\frac{\cos x-1}{x}+2x\right)'=\frac{-x\sin x-\cos x+1}{x^2}+2=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x-1}{x^2}+2=-\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)+2=f(x)$$

لنستعمل التعريف لحساب المشتقة عند الصفــر:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+2\right)=\frac{3}{2}$$

العلاقات المثلثية

نهاية شهيرة

إذن: $F'(x)=f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x،

هل f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

يبدو أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لأنه عبارة عن تركيب دوال مستمرة، بقيت مشكلة الاستمرارية القيمة صفر:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)+4x\right)=-\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\neq\frac{3}{2}=f(0)$$

إذن الدالة f تقبل دالة أصلية دون أن تكون مستمرة.

مبرهنة (*) (تقبل دون برهان):

مجموعة الدوال الأصليّة:

لتكن الدالة f مستمرّة على المجال I، بالتالي تقبل دالة أصليّة F على المجال I،

مجموعة الدوال الأصليّة للدالة f على المجال I هي: $x\mapsto F(x)+C$ حيث: C ثابت حقيقي.

نتيجة:

f دالة مستمرّة على I، و منه توجد دالة أصليّة وحيدة F تحقق $F(x_0)=y_0$،

لأنّ:

لتكن F_1 دالة أصلية للدالة f، و حسـب النتيجـة السابقة مجموعـة الدوال الأصليـة هي F حيث: $F(x)=F_1(x)+C$، و حسـب الشـرط $F(x_0)=y_0$ الـذي نسميه الشـــــرط الابتـــداﺋي، $F(x_0)=F_1(x_0)+C=y_0$ أي: $C=y_0-F'(x_0)$.

تمرين تطبيقي 01:

في كل حالة من الحالات التالية، بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $F(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}$ و $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}$ حيث: $I=\mathbb{R}$،

2) $F(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ و $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$ حيث: $I=\mathbb{R}$،

3) $F(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ و $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ حيث: $I=]-\infty;2[$،

4) $F(x)=\dfrac{-x^2+x-4}{x^2+3x-1}$ و $f(x)=\dfrac{-4x^2+10x+11}{(x^2+3x-1)^2}$ حيث: $I=]1;+\infty[$،

5) $F(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$ و $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$ حيث: $I=]0;+\infty[$.

حــل:

لنبين في كل حالة أن F دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1) ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(\frac{x^2-3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x-3)(x^2+1)-2x(x^2-3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-3x^2-3-2x^3+6x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}$$

إذن $F'(x)=f(x)$، و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$،

2) ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)'=\frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2+3-2x^2-2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

إذن $F'(x)=f(x)$، و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$،

3) ليكن x من $]-\infty;2[$:

$$F'(x)=\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)'=\frac{(2x-5)(x-2)-(x^2-5x+7)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

إذن $F'(x)=f(x)$، و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;2[$،

4) ليكن x من $]1;+\infty[$:

$$F'(x)=\left(\frac{-x^2+x-4}{x^2+3x-1}\right)'=\frac{(-2x+1)(x^2+3x-1)-(2x+3)(-x^2+x-4)}{(x^2+3x-1)^2}$$
$$=\frac{-2x^3-6x^2+2x+x^2+3x-1-(-2x^3+2x^2-8x-3x^2+3x-12)}{(x^2+3x-1)^2}$$
$$=\frac{-2x^3-6x^2+2x+x^2+3x-1+2x^3-2x^2+8x+3x^2-3x+12}{(x^2+3x-1)^2}=\frac{-4x^2+10x+11}{(x^2+3x-1)^2}$$

إذن $F'(x)=f(x)$، و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$،

5) ليكن x من $]0;+\infty[$:

$$F'(x)=\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{3\sqrt{x}-\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}}{2}=\frac{6x-3x+1}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$$

إذن $F'(x)=f(x)$، و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

من علماء الرياضيات:

برنارد ريمان Bernhard Riemann:

رياضيات الماني، ولد في عام 1826 وتوفي في 1866، له مساهمات كثيرة في نظرية الأعداد والهندسة التفاضلية والتحليل، له عدة نظريات سميت باسمه كنظرية ريمان التي تتعلق بتابع زيتا ريمان التي تقول أن القسم الحقيقي من الجذور العقدية لهذا التابع تساوي نصف دوما، واشتهر بتوزيع الأعداد الأولية، ويتمتع بمهارات رياضية استثنائية.

الدرس الثاني:

تمـــهيد:

في تطبيق الدرس السابق استطعنا أن نتأكد من أن دوالا معطاة F أصلية لدوال أخرى f على مجال ما، لكن مـاذا لـو لم تعـط الدالة F و طلب تعيين دوال أصلية لدوال مختلفة، إن المبرهنة(*) صفحة 369 ، تضمن أن كـل دالة مستمـرة تتمتع بدوال أصلية، لكن هاته المبرهنة لن تقلل من صعوبة تعيين الدوال الأصلية لهذا في درسنا هذا سنحــاول إيجاد طرق لحساب بعض الدوال الأصلية:
* نلاحظ أن تعريف الدالة الأصلية يعتمد كليا على مفهوم الاشتقـــاق، بالرجوع إلى الباب الأول و بالضبـط إلى درس الاشتقـاق و اعتمادا على مشتق بعض الدوال المألوفة، و عمليات عليه نسرد:

اعتمادا على المخـــطط التالي (مثلا):

لاحظنا بالاشتقاق:

الدالة: $x^n \quad , n \in \mathbb{N}^*$ $\longrightarrow$ الدالة المشتقة: $n\,x^{n-1}$ مع: $x \in \mathbb{R}$

حسب تعريف الدالة الأصلية:

x^n حيث n من $\mathbb{N}^*$، إحدى الدوال الأصلية للدالة $n\,x^{n-1}$،

و بالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto n\,x^{n-1}$ هي: $x \mapsto x^n + C$ حيث: n من $\mathbb{N}^*$ و C عدد حقيقي ... (1).

و بالتالي يمكن استنتاج دوال الأصلية للدالة: x^n حيث n من $\mathbb{N}$ و بملاحظة أن:

- $x^n = \dfrac{1}{(n+1)} \times \left[(n+1)x^{(n+1)-1}\right]$

- و حسب (1) الدوال الأصلية المطلوبة هي: $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ حيث: C عدد حقيقي،

و بطريقة مشابهة نجد:

f دالة معرفة على المجال I، و F دالـــة أصليّة للـــــــــــدالة f على المجـــــال I:

$f(x) =$	$F(x)$	المجال I:
a	$a\,x + C$	على $\mathbb{R}$ ... (1)
x	$(1/2)x^2 + C$	على $\mathbb{R}$ ... (2)
x^n، حيث n من $\mathbb{N}^*$	$\left(1/(n+1)\right)x^{n+1} + C$	على $\mathbb{R}$ ... (3)
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	على $\mathbb{R}^*_+$ ... (4)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	على $\mathbb{R}^*$ ... (5)
$\dfrac{1}{x^n}$ ، حيث n من $\mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{(1-n)} \times \dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	على $\mathbb{R}^*$ ...(6)
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	على $\mathbb{R}$ ... (7)
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	على $\mathbb{R}$ ... (8)
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$	$tg(x)$	على: $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ... (9)
e^x	e^x	على $\mathbb{R}$ ... (10)

ملاحـــظة:

ينصح الطالب بإعادة طريقة الاعتماد على الاشتقاق لتعيين الدوال الأصلية الموضحة بالجدول و هذا لاستيعاب المفهوم جيدا.

اعتمـادا كذلك على الاشتقاق و عمليات عليه الواردة في الفصل الأول، نكتب الـ:

المبرهنة:

f ، g دالتان معرفتان على المجال I،

1/ F و G دالتان أصليتان لـ f و g على المجال I، إذن: $F+G$ دالة أصليّة للدالة $f+g$ على المجال I

2/ F دالة أصليّة للدالة f على المجال I، و منه kF دالة أصليّـــــة لـ kf على المجال I حيـــث: $k\in\mathbb{R}$

3/ u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I:

أ/ الدوال الأصليّة للدالة $u'u$ هي: $\frac{1}{2}u^2+C$

ب/ الدوال الأصليّة للدالة $u'u^n$ هي: $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$، من أجل كل عدد طبيـــــــــعي n

ج/ الدوال الأصليّة للدالة $\frac{u'}{u^n}$ هي: $\frac{1}{1-n}u^{1-n}+C$ ، من أجل كل طبيعي n حيث: $n\in\mathbb{N}-\{1\}$

د/ الدوال الأصليّة للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ هي: $2\sqrt{u}+C$، من أجـــل u دالة موجب تمـــاما،

ه/ الدوال الأصليّة للدالة $u'e^u$ هـي: e^u+C،

و/ الدوال الأصليّة للدالة $\frac{u'}{u}$ هي: $\ln(u)+C$،

ن/ الدوال الأصليّة للدالة $v'(x)\times u'(v(x))$ هي : $u(v(x))+C$.

حيث: n من $\mathbb{N}$، و C ثابت حقيقي

إرشاد:

باستعمال الاشتقاق مع الأخذ في الحسبان المعطيات في كل خاصة، نحصل على الثبات.

تمارين تطبيقي 01:

عين الدوال الأصليّة للدالة f، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=2x-1$، و 2) $f(x)=x^2-4x+3$، و 3) $f(x)=-3x^3+5x^2-4$،

4) $f(x)=x^4-x^3$ و 5) $f(x)=\frac{4}{x^2}$، و 6) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ و 7) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$،

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$، 9) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ ، و 10) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$.

حل:

في كل ما يلي C ثابت حقيقي هذا بداية، و يجب أن يكون من الواضح تطبيـــق العـلاقة **2**/ اعتمادا على المخطط و المبرهنة المذكورة في الصفحة السابقة:

1) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=2x-1$ هي: $F(x)=x^2-x+C$ على المجال $\mathbb{R}$

بتطبيـــــق (2) و (1) ثـــم **1**/

2) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=x^2-4x+3$ هي: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+C$

بتطبيق (2) و (1) و (3) ثـم **1**/

3) الدوال الأصلية للدالة $f(x)=-3x^3+5x^2-4$ هي: $F(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-4x+C$

بتطبيـق (2) و (1) و (3) ثم **1**/

4) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=x^4-x^3$ هي f حيث: $F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+C$

بتطبيـــق (2) و (3) ثـــم **1**/

5) الدوال الأصلية للدالة $f(x)=\frac{4}{x^2}$ هي F حيث: $F(x)=4\times\left(\frac{1}{1-2}\times\frac{1}{x^{2-1}}\right)=-\frac{4}{x}+C$

بتطبيق (6)

6) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ هي F حيث: $F(x)=\frac{1}{(1-2)}\times\frac{1}{x^{2-1}}-\frac{1}{(1-3)}\times\frac{1}{x^{3-1}}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$

بتطبيق (6)

7) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ هي F حيث: $F(x)=6\sqrt{x}+C$

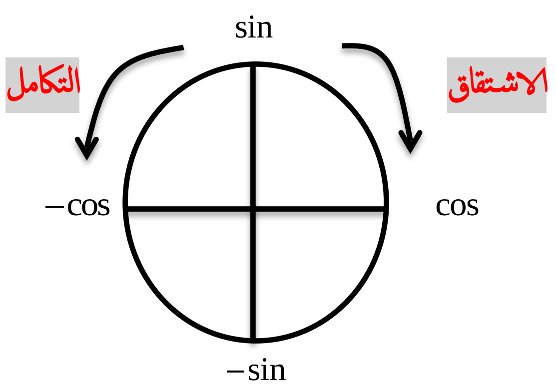
بتطبيق (4)

8) الدوال الأصلية للدالة f حيث: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ هي F حيث: $F(x)=2\sqrt{x-1}+C$

بتطبيق **3**/ د/

9) لدينا $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$ الــــدوال الأصلية للدالـــة f هي F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+C$

خلاصة مهمة:



من الدائرة المثلثية السابقة يتضح أن * الدوال الأصلية للدالـة $x \mapsto \cos(ax+b)$ هي $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$،

* الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \sin(ax+b)$ هي $x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$،

حيث: a من $\mathbb{R}^*$ و b مـن $\mathbb{R}$،

10) لدينا هذا التبسيـــــط:

$$f(x)=\frac{\sin(2x)}{\cos^3(x)}\underset{\text{العلاقات المثلثية}}{=}\frac{2\cos(x)\times\sin(x)}{\cos^3(x)}=(-2)\times\frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

بالتالي الدوال الأصلية للدالة f $F(x)\underset{\text{بتطبيق 3/ ج/}}{=}(-2)\times\left(\frac{1}{(1-2)(\cos(x))^{2-1}}\right)+C=\frac{2}{\cos(x)}+C$.

سؤال:

ماذا لو لم نستطع تشكيل إحدى العبارات السابقة لتعيين دوال أصلية؟

إجابة:

* سوف نذكر أداة لتعيين دوال أصلية لبعض الدوال تعـرف باسم **"المكاملة بالتجزئة"**،

* يمكن إيجاد طرق أخرى لحساب دوال أصلية كتغيير المتغير مثلا أو تعريف دوال أخرى، لكن المجال لا يسمح، فقط أردنا في هـاته المناسبة أن نذكر أنه يمكن أن نصادف دوال لا يمكن أن نجد لها دوالا أصلية بدلالة الدوال المألوفة نذكـر على سبيـل: $x \mapsto e^{\cos x}$ أو $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ ... الخ، عندئذ نلجأ في كثير من الأحيان إلى الطرق العددية.

الحســـاب التكـــــــاملي:

الدرس الثالث:

نشاط استكشافي:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،

1) لتكن الدالة f المعرّفة على $[0;3]$ بـ: $f(x)=2x+1$

أ) مثل بيان الدالة f،

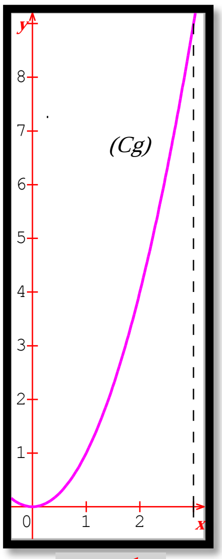
ب) احسب المساحة المحصورة بين بيان الدالة و محور الفواصل،

ج) عيّن دالة أصليّة F للدالة f على المجال $[0;3]$،

د) احسب $F(3)-F(0)$، ماذا تستنتج؟

2) التمثيل البياني المقابل للدالة $g(x)=x^2$ على المجال $[0;3]$، **الشكل 01**

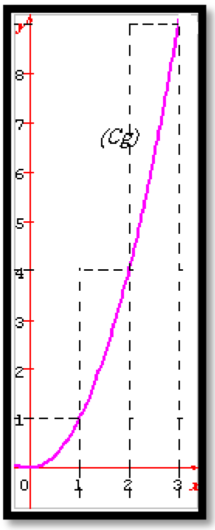
أ) هل تستطيع حساب المساحة S المحصورة بين منحنى الدالة g ؟



الشكل 01

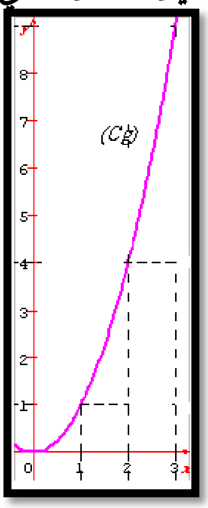
ب) **أولا:** قمنا بتقسيم المجال $[0;3]$ إلى مجالات جزئيّة أطوالها 1،

* احسب S_1 مجموع مساحات المستطيلات المتلاحقة في **الشكل02**



الشكل 02

* احسب S_2 مجموع مساحات المستطيلات المتلاحقة في الشكل 3،



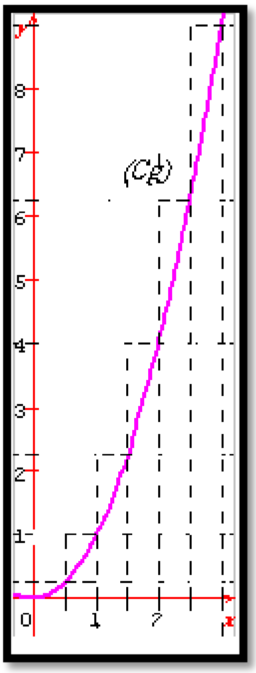
الشكل 03

* أعط حصرا للمساحة S ،

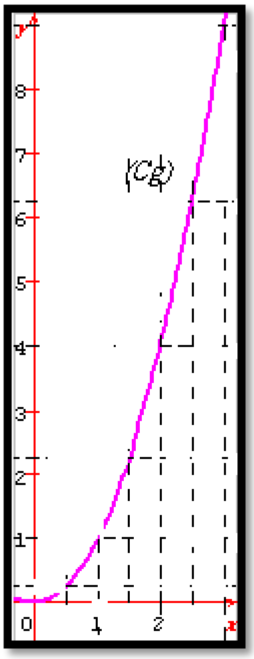
ثانيا: بنيّة إيجاد حصر أدق من السابق، قسمنا المجال $[0;3]$ إلى مجالات طول كل منها $\frac{1}{2}$،

* احسب S'_1 مجموع مساحات المستطيلات المتلاحقة في **الشكل 04:**

* احسب S'_2 مجموع مساحات المستطيلات المتلاحقة في **الشكل 05:**



الشكل 04



الشكل 05

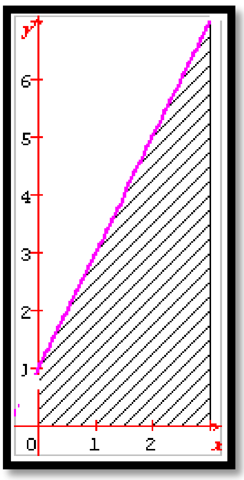
استنتج الحصر الأكثر دقة،

ج) ماذا تلاحظ ؟ أكتب خلاصة .

حل النشاط:

1) الدالة f المعرّفة على $[0;4]$ بـ: $f(x) = 2x + 1$

أ) تمثيل بيان الدالة لاحظ الشكل المقابل:



ب) حساب المســـــاحة المحصورة بين بيان الدالة و محور الفواصل:

هذا الشكل عبارة على شبه منحرف تعطى مساحته على الشكل:

$\frac{(7+1)\times 3}{2} = 12$ وحدة مساحة،

ج) تعيين دالة أصليّة للدالة f على المجال $[0;3]$،

يمكن ملاحظة أنّ: $F(x) = x^2 + x$ إحدى الدوال الأصليّة للدالة f،

د) حساب : $F(3) - F(0)$:

$F(3) - F(1) = 9 + 3 - 1 - 1 = 12$، و عليه نستنتج أن المقدار $F(3) - F(0)$ مساو لـ مساحة الحيّز المحسوبة سابقا،

سؤال: هل هذا محقق دوما؟

2) أعطي التمثيل البياني للدالة $g(x)=x^2$ على المجال: $[0;3]$

أ) لا يمكن إيجاد قاعدة هندسيّة لحساب مساحة الحيّز المحصور بين منحنى الدالة g و محور الفواصل،

لأجل ذلك:

ب) أولا: *حساب S_1 : مجموع مساحات المستطيلات المتلاحقة، عند الاعتماد على الشكل 2،

$S_1=1\times1+1\times4+1\times8=13$ وحدة مساحة،

* حساب S_2: اعتمادا على الشكل 3، $S_2=1\times0+1\times1+1\times4=5$ وحدة مساحة،

نستنتج من الشكل أنّ: $5<S<13$ ،

ثانيا : حساب S'_1 : من الشكل 4) $S'_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}+\frac{1}{2}\times9\simeq11.38$ وحدة مساحة،

حساب S'_2 : من الشكل 5) $S'_2=0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}\simeq6.9$ وحدة مساحة،

و بذلك نستنتج حصرا أحسن من السابق : $6.9<S<11.38$

ج) نلاحظ أنه كلّما كانت أطوال المجالات المقسّمة، أقل طولا، اقتربت مجموع مساحات المستطيلات العلوية أو السفليّة إلى المساحة الفعليّة S، و منه الخلاصة:

لنعتبر التقسيم $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ للمجال $[0;3]$، حيث : n من $\mathbb{N}^*$ (يجب ملاحظة أنّ $0=x_0<x_1<...<x_n=3$)

عند استعمال المجاميع العلوية: $(x_1-x_0)g(x_1)+(x_2-x_1)g(x_2)+...+(x_n-x_{n-1})g(x_n)$ ، لنتقيد بالرموز:

$x_1-x_0=dx_1$

$x_2-x_1=dx_2$ نجد: $g(x_1)dx_1+g(x_2)dx_2+...+g(x_n)dx_n$

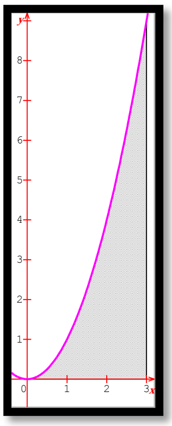
$x_n-x_{n-1}=dx_n$

و بجعل n يؤول إلى $+\infty$ فإن المجموع السابق يقترب من المساحة S ،

قد أدخل لايبنيتز على هذه النهاية الرمز $\int_0^3 g(x)dx$

حيث يدل الرمز $\int$ (شكل مطوط للحرف S) للحرف الأول للكلمة $Summa$، التي تعني مجموع، أما العبارة $g(x)dx$ فهي الشكل العام للحدود المجموعة، و قد أطلق كذلك لايبنيتز كلمة كامل على $\int_0^3 g(x)dx$ ، بهدف التمييز بين المجموع المنتهي و اللامنتهي.

لاحظ الشكل:



بناء المعارف:

تعريف:

لتكن الدالة f مستمرّة و موجبة على المجال $[a;b]$، المساحة المحصورة بين بيان الدالة f و محور الفواصل $y=0$ و المستقيمين $x=a$ و $x=b$، هو العدد الحقيقي الموجب:

$\int_a^b f(x)dx$ و تقرأ: تكامل f من a حتى b تفاضل أو تغيّر x.

حساب الدالة الأصليّة باستعمال التكامل: (تقبل ما يلي)

f دالة مستمرّة على I، و ليكن a عدد من I، الدالة الأصليّة الوحيدة F التي تنعدم عند a تعطى بالعلاقة:

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

ترميز:

يرمز للدوال الأصليّة لـ f بـ: $F_C(x)=\int f(x)dx$، الرمز: F_C لتعلق الدالة F بالثابت C.

تمرين تطبيقي 01:

احسب في كل مما يلي الدوال الأصلية:

* $f(x)=2x^2+\frac{1}{2}$
* $f(x)=\frac{1}{x-1}$
* $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

حل:

لدينا:

* $F(x)=\int\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x+C$
* $F(x)=\int\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln|x-1|+C$
* $F(x)=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\ln\left(x^2+1\right)+C$

حيث: $C\in\mathbb{R}$

تمرين تطبيقي 02:

احسب في كل مما يلي الدالة الأصلية التي تنعدم عند a:

* $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ حيث: $a=1$

* $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ حيث: $a=0$

* $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ حيث: $a=\dfrac{\pi}{2}$

حل:

* $F(x)=\int_1^x \dfrac{t}{t^2+4}dt=\dfrac{1}{2}\ln(t^2+4)\Big]_1^x=\dfrac{1}{2}\left(\ln(x^2+4)-\ln(5)\right)$

* $F(x)=\int_0^x \dfrac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}dt=2\sqrt{t^2+t+1}\Big]_0^x=2\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)$

* $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x \left(\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)dt=\ln|\sin(t)|\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x=\ln|\sin(x)|$.

طريقة عمليّة لحساب:

أولا: المساحة المحصورة بين منحنى دالة f و محور الفواصل، و المستقيمين $x=a$ و $x=b$:

f دالة مستمرّة و موجبة على I، F دالة أصليّة لـ f على المجال I، يكون: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ و نكتـــــــــب:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$$

لأن:

f دالة مستمرّة و موجبة على I، و بالتالي حسب "تعريف الدالة الأصليّة باستعمال التكامل" الدالة الأصليّة F التي تنعدم عند α تعطى بالعلاقة: $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$، لدينا: $F(a)=\int_\alpha^a f(t)dt$ و $F(b)=\int_\alpha^b f(t)dt$ مع: $a<b$، و عليه:

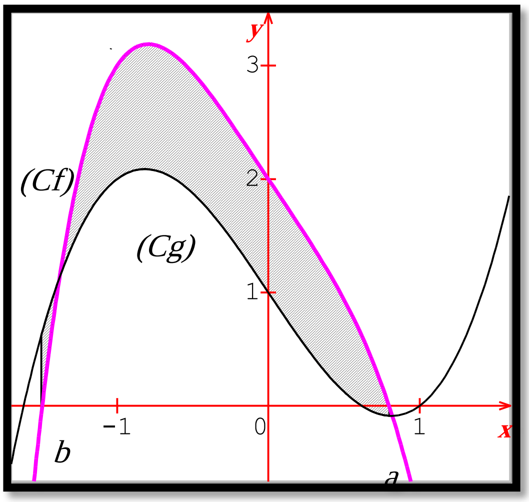
$$F(b)-F(a)=\int_\alpha^b f(t)dt-\int_\alpha^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt.$$

ثانيا: مساحة حيز محصور بين بيان دالتين:

ليكن f و g مستمرتان على $[a;b]$، حيث: $f(x) > g(x)$

العدد: $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ يمثل المساحة المحصورة بين بيان الدالة f و بيـــان الدالة g، و المستقيمـــين: $x = a$ و $x = b$،

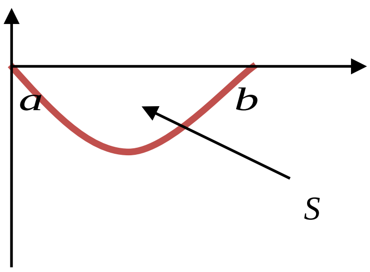
كما بالشكل:



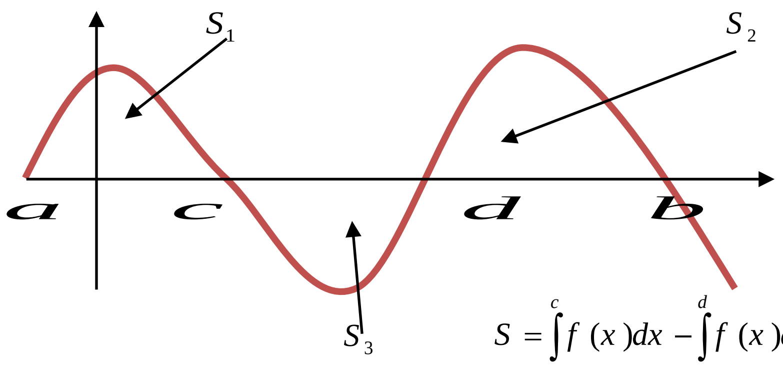
ثالثـــا: حساب المساحة المحصورة بين بيان دالة f متغيّرة الإشارة على مجال $[a;b]$ و محور الفواصل:

- f دالة سالبة على المجال $[a;b]$:

$S = -\int_a^b f(x)dx$ وحدة مساحة



- f دالة متغيرة الإشارة:



$S = S_1 + S_2 + S_3$ أي: $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$

ملاحظة:

- يجب مراعاة وحدة المساحة المعمول بها.

تمرين تطبيقي 01:

أولا:

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^{x}-1$،

1/ ادرس تغيرات الدالة g،

2/ بين أن للمعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلين α و β حيث: $-1,2\prec\alpha\prec-1,1$ و $1,8\prec\beta\prec1,9$،

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$،

ثانيا:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،

1/ احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجتين هندسيا،

2/ بين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها،

3/ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ و استنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$،

4/ احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)،

5/ λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1،

أ/ احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}[f(x)-1]dx$، ماذا تمثل هاته النهاية؟

ب/ احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل:

أولا:

لدينا: $g(x)=(2-x)e^{x}-1$ و $D_g=\mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2-x)e^{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-x\,e^{x}-1\right)=-1$،

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-x)e^{x}-1\right)=-\infty$

المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=\left((2-x)e^{x}-1\right)'=(-1+2-x)e^{x}=(1-x)e^{x}$،

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1\simeq 1.71$	$\searrow$	$-\infty$

2/ من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g دالة مستمرة على $\mathbb{R}$، و

* متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times g(1)\prec 0$ و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha\in]-\infty;1[$

حيث: $g(\alpha)=0$ و كون $]-1.2;-1.1[\subset]-\infty;1]$ يكفي التأكد أن $g(-1.2)\times g(-1.1)\prec 0$ ؟

لدينا $g(-1.2)=(2+1.2)e^{-1.2}-1\simeq -0.036\prec 0$ و $g(-1.1)=(2+1.1)e^{-1.1}-1\simeq 0.032\succ 0$

و بالتالي: $\alpha\in]-1.2;-1.1[$.

*و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\times g(1)\prec 0$ و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\beta\in]1;+\infty[$

حيث: $g(\beta)=0$ و كون $]1.8;1.9[\subset[1;+\infty[$ يكفي التأكد أن $g(1.8)\times g(1.9)\prec 0$ ؟

لدينا $g(1.8)=(2-1.8)e^{1.8}-1\simeq 0.21\succ 0$ و $g(1.9)=(2-1.9)e^{1.9}-1\simeq -0.33\prec 0$ و بالتالي تحقق $g(1.8)\times g(1.9)\prec 0$

و بالتالي: $\beta\in]1.8;1.9[$.

3/ من جدول التغيرات نستنتج و الجواب السابق نستنتج إشارة الدالة g:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ثانيا:

لدينا $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ و $D_f=\mathbb{R}$،

1/ حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}}\right)=1$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=1$ في جوار $+\infty$،

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)=0$ و التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ في جوار $-\infty$

2/ من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\frac{e^{2x}-xe^x-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

من الجزء الأول نستنتج:

* f دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[\beta;+\infty[$ ،
* f دالة متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$ ،

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3/ نعلم أن $g(\alpha)=0$ (أو $g(\beta)=0$) ..... (*) معناه $(2-\alpha)e^{\alpha}=1$ أي: $e^{\alpha}=\frac{1}{2-\alpha}$، هذا من جهة و من جهة أخرى:

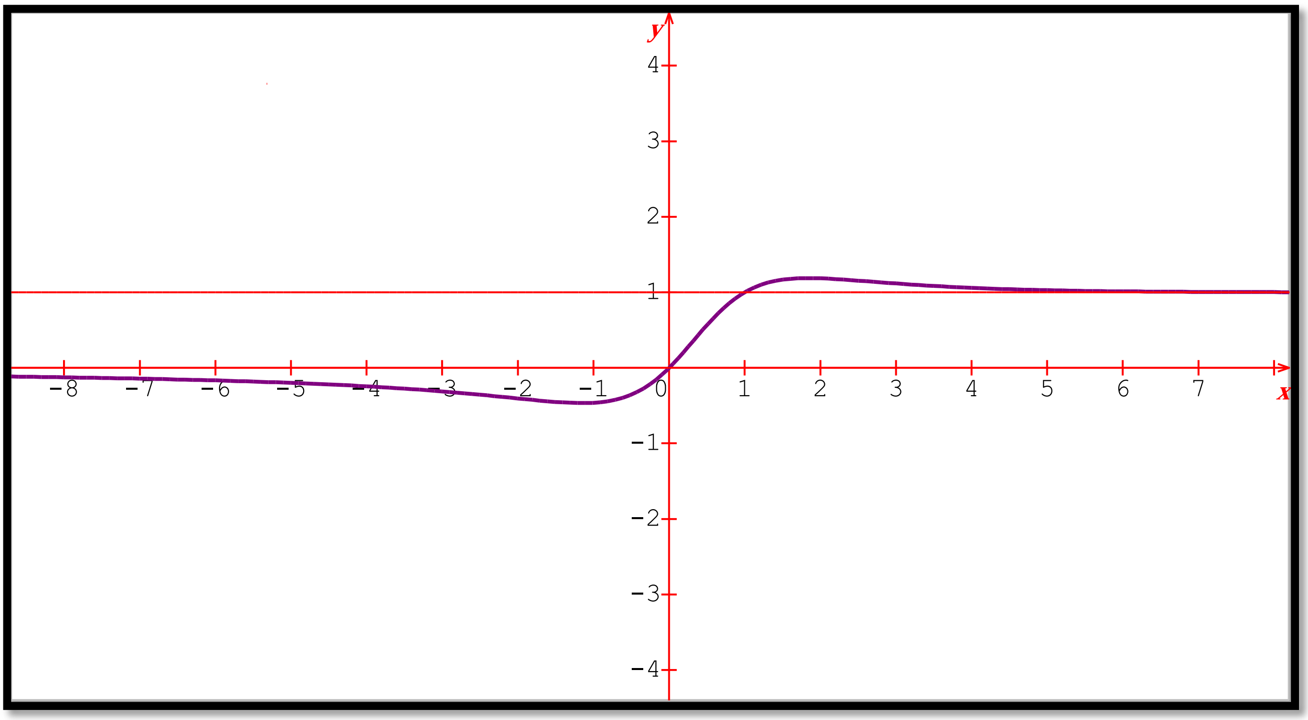
$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^{2}}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$$ ،

و كون $\alpha\in]-1.2;-1.1[$ معناه $-2.2\prec\alpha-1\prec-2.1$ يكافئ $-\frac{1}{2.1}\simeq-0.48\prec\frac{1}{\alpha-1}=f(\alpha)\prec-\frac{1}{2.2}\simeq-0.45$ ،

و من(*) يمكن الحصول على: $f(\beta)=\frac{1}{\beta-1}$ و مما سبق لدينا $1.8\prec\beta\prec1.9$ أي: $0.8\prec\beta-1\prec0.9$ و منه:

$$\frac{1}{0.9}\simeq1.11\prec\frac{1}{\beta-1}=f(\beta)\prec\frac{1}{0.8}\simeq1.25$$ ،

4/ لدينا $f(1)=1$ ، رسم المنحنى (C_f):



5/ $\lambda \geq 1$:

أ/

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]dx=\int_1^{\lambda}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\right]dx=\int_1^{\lambda}\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)dx-\int_1^{\lambda}dx=\ln\left(e^x-x\right)\Big]_1^{\lambda}+1-\lambda=\ln\left(\frac{e^{\lambda}-\lambda}{e-1}\right)+1-\lambda$$

$$=\ln\left(\frac{1-\frac{\lambda}{e^{\lambda}}}{e-1}\right)+1$$

ب/ عند المرور بجعل $\lambda \to +\infty$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1-\frac{\lambda}{e^{\lambda}}}{e-1}\right)+1\right)=1-\ln(e-1)$.

تعميـــــــم مهم:

f دالة مستمرّة على $[a;b]$، و F إحدى الدوال الأصليّة للدالة f على $[a;b]$

العدد الحقيقي: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ هو تكامل f من a نحو b تفاضل x.

خواص التكامل:

f, g دالتان مستمرتان على $[a;b]$:

- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ تدعى علاقة شـــال حيث c مـــن $[a;b]$،
- $\begin{cases}\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\\ \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\end{cases}$ نقول أن التكـــــامل خـــطي،
- إذا كان : $f(x)\geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)dx\geq 0$، و $f(x)\leq g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)\leq\int_a^b g(x)$،
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

تمرين تطبيقي 02:

احسب التكاملين التالية:

* $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x\right)dx$

* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))dx$ و $\int_0^3\left|x^2-1\right|dx$.

حل:

* $\int_{-1}^{1}\left(x^{3}+x\right)dx=\left.\frac{1}{4}x^{4}+\frac{1}{2}x^{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$

* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x)\right)dx=\cos(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$

* قبل حساب $\int_{0}^{3}\left|x^{2}-1\right|dx$:

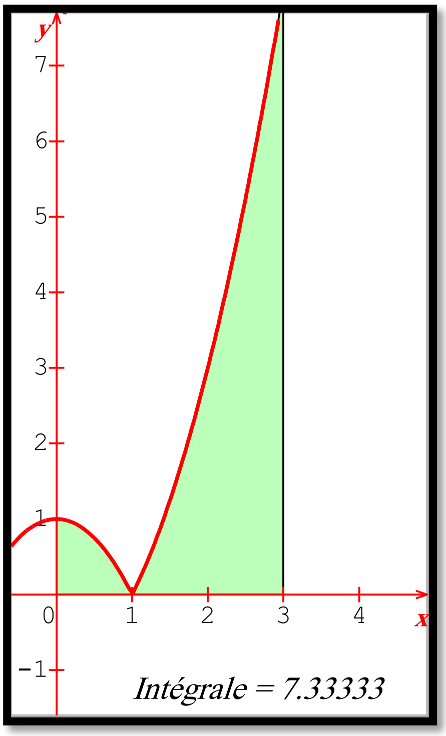
دراسة اشارة $\left|x^{2}-1\right|$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

و بالتالي:

$$\int_{0}^{3}\left|x^{2}-1\right|dx=\int_{0}^{1}\left(1-x^{2}\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^{2}-1\right)dx=\left.x-\frac{1}{3}x^{3}\right]_{0}^{1}+\left.\frac{1}{3}x^{3}-x\right]_{1}^{3}=1-\frac{1}{3}+9-3-\frac{1}{3}+1=\frac{22}{3}$$

لاحظ الشكل التـــــالي:



ملاحـــــــــــظتان:

- المساحة مقدار موجب دوما و لهذا وضعنا شرط أن تكون الدالة f موجبة و تعرفنا على تلك الحـــــالات التي تكون فيها الدالة سالبة أو متغيّرة الإشارة، لكن التكامل ليس دائما ذا إشارة موجبة،

(لاحظ أن مفهومي التكامل و المساحات مختلفان لاحظ التمرين التطبيقي السابق)

- نلاحـظ أنه لحسـاب تكامل أو مساحة حيز مشكل من منحنى دالة يجب تعيين دالة أصلية، التي رأينا في الدروس السابقة طرقا لتعيينها، سنذكر الآن أداة أخرى لحساب تكامل أو تعيين دوال أصلية، تعرف بـ:

المكاملة بالتجزئة:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $[a;b]$، و f' ، g' مستمرتان على المجال $[a;b]$، و منه:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

تمرين تطبيقي 03:

باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكاملات التالية:

* $\int_1^2 \ln(x)dx$

* $\int_0^1 t\,e^t\,dt$.

حل:

لنستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب التكاملين:

* نضع $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$ و بالتالي: $\begin{cases}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1\end{cases}$

$$\int_1^2 \ln(x)dx=x\ln(x)\Big]_1^2-\int_1^2 1dx=2\ln(2)-1$$

* نضع $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=e^t\end{cases}$ و بالتالي: $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=e^t\end{cases}$

$$\int_0^1 t\,e^t\,dt=t\,e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=e-(e-1)=1$$.

ملاحظة:

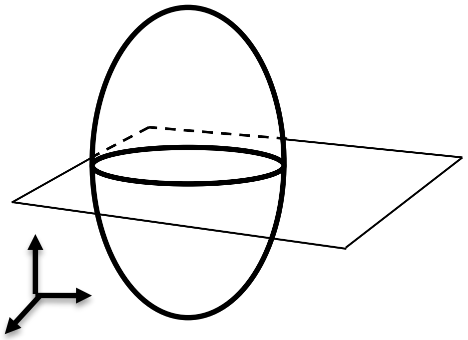
قد لا نوفق في اختيار التوابع المناسبة لحساب التكامل بالتجزئة:

نود حساب $\int_0^1 t\,e^t\,dt$ بوضع * نضع $\begin{cases}u'(t)=e^t\\ v(t)=\frac{1}{2}t^2\end{cases}$ و بالتـــــالي: $\begin{cases}u(t)=e^t\\ v'(t)=t\end{cases}$

$$\int_0^1 t\,e^t\,dt=\frac{1}{2}t^2e^t\Big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}t^2e^t\,dt=\frac{1}{2}e-\int_0^1\frac{1}{2}t^2e^t\,dt$$ لاحـــظ أن التكامل المحصـــل عليه أعقد من التكامل السابق،

و بالتالي لم نوفق في اختيار التوابع، في حين استطعنا تعيين قيمة التكامل بالاختيار الموضح في حل التمرين التطبيقي السابق.

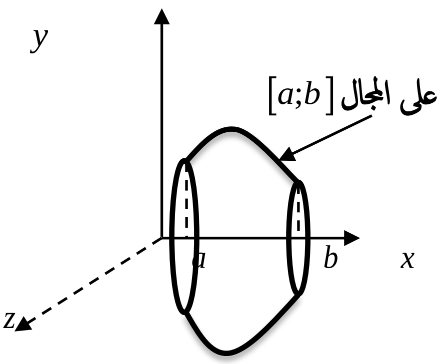
استعمال الحساب التكاملي في حساب حجوم بعض الأشكال:



مبدأ كافا ليري :

ليكن الشكل المقابل، نود حساب V الحجم البيضوي، عند قطع الشكل السابق:

بالمستوي (P)، فنحصل على شكل تتغيّر مساحته بدلالة z عندئذ: $V=\int_a^b S(z)dz$



تمرين تطبيقي على هذا المبدإ:

لتكن الدالة f و الممثلة على المجال $[a;b]$ كما بالشكل:

عند تدوير هذا الشكل على محور الفواصل نحصل على الجسم المقابل،

و هدفنا: حساب حجمه،

عند قطع الشكل السابق بمستوي مواز للمستوي (yoz)،

نحصل على قرص مساحته $\pi(f(x))^2$

و عند تطبيق المبدإ السابق نجد: $V=\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$.

لننه هذا الفصل بإعطاء حلول لبعض المعادلات التفاضلية:

- حلول المعادلة التفاضليّة من الشكل: $y'(x)=f(x)$ ، حيث: f دالة مستمرة
  هي الدوال الأصليّة للدالة f أي y حيث: $y(x)=F(x)+C$
- حلول المعادلة التفاضليّة من الشكل: $y''(x)=f(x)$ حيث: f دالة مستمرّة
  هي y حيث: $y(x)=G(x)+C_1x+C_2$ ، حيث: G هي الدالة الأصليّة للدالة F التي بدورها دالة أصليّة للدالة f
- حلول المعادلة التفاضليّة من الشكل y حيث: $y''=-\omega^2 y$
  هي: $y(x)=c_1\cos(\omega x)+c_2\sin(\omega x)$ حيث: c_1,c_2 .

إليك التمارين التالية:

تمرين 01:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*-\{1\}$ بـ $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

1/ ادرس تغيرات الدالة f،

2/ أثبت أن النقطة $\omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر المنحنى (C_f)،

3/ أثبت أن المستقيم الذي معادلته: $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لـ (C_f)،

4/ ادرس وضعية (C_f) و (Δ)،

5/ أنشـــــــئ (Δ) ثم (C_f)،

6/ احسب مساحة الحـــــيز $S(\lambda)$ مـــن المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=-\frac{1}{2}x$ و $x=2$ و $x=\lambda$ حيث: $\lambda\in]1;2[$،

7/ احسب: $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 1} S(\lambda)$ ،

8/ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*-\{1\}$ بـ: $g(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$،

و ليكن (γ) تمثيلها البياني،

أ/ بين كيف يمكن إنشاء (γ) انطلاقا من (C_f)،

ب/ أنشئ المنحنى (γ) في المعلم السابق بلون مغاير.

حل:

1/ دراسة تغيرات الدالة f:

* مجموعة التعريف: $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

* النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=-\infty$$

* المشتق:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*-\{1\}$:

$$f'(x)=\left(-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)'=-\frac{1}{2}+\frac{\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)'}{\left|\frac{x-1}{x}\right|}=-\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{x-x+1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-x^2+x+2}{2\times x(x-1)}$$

لندرس إشارة المشتقة:

لنحسب مميز البسط: $\Delta=1+8=9$ أي: $x_1=\frac{-1+3}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-1-3}{-2}=2$

و بالتالي الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$		$-$	

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ -\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(-1)=\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-2}{-1}\right|=\frac{1}{2}+\ln(2)$ و $f(-1)=-1+\ln\left|\frac{2-1}{2}\right|=-1-\ln(2)$

/2 من أجل x من $\mathbb{R}^*-\{1\}$ يكون $1-x$ من $\mathbb{R}^*-\{1\}$ لدينا

$$f(1-x)+f(x)=-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=-\frac{1}{2}=2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

أي: $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f،

/3 لدينا $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=0$ من هاته النهاية نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$ (يرمز بـ ∞ إلى $+\infty$ و $-\infty$)،

/4 دراسة الوضع النسبي:

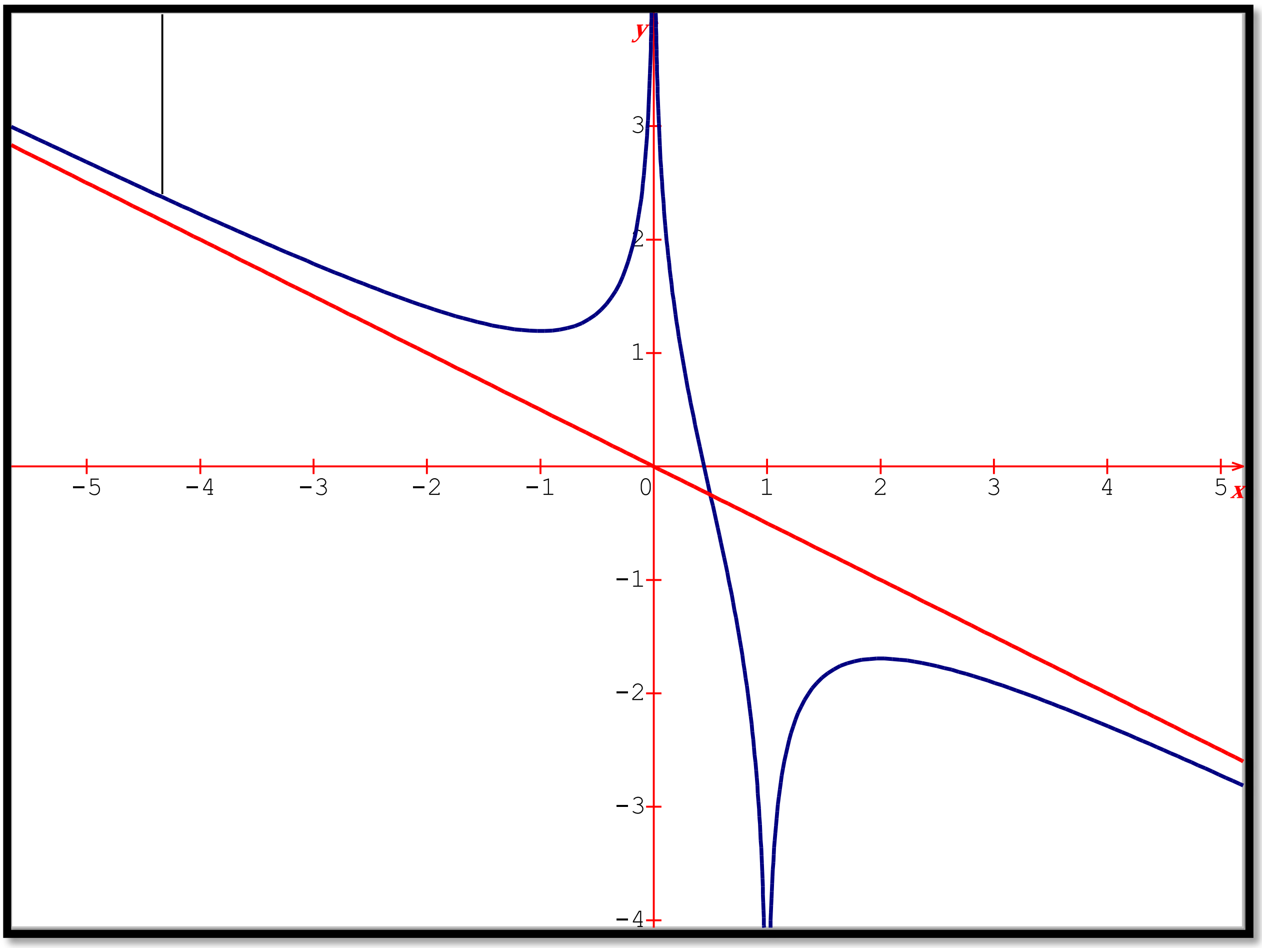
لدينا الفرق: $f(x)+\frac{1}{2}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$، لنستعمل خواص الدالة اللوغاريتمية نجد:

*$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\le 0$ أي: $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\le\ln(1)$ و منه $\left|\frac{x-1}{x}\right|\le 1$ معناه $\frac{x-1}{x}\in[-1;1]$ (نلاحظ أن $\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$) أي:

$\frac{1}{x}\in[0;2]$ و بالتالي $x\geq\frac{1}{2}$ حيث: $x\neq 1$ ، و بالتالي جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي:		(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) قاطع لـ (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

5/ إنشاء (Δ) ثم (C_f):



6/ من دراسة الوضع النسبي نستنتج أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $[\lambda;2]$ و بالتالي:

$$S(\lambda)=-\int_{\lambda}^{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)dx=-\int_{\lambda}^{2}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=-\left(\int_{\lambda}^{2}\ln(x-1)dx-\int_{\lambda}^{2}\ln(x)dx\right)$$

لنستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب التكاملين:

بالنسبة لـ $\int_{\lambda}^{2}\ln(x-1)dx$:

لدينا:

$$\begin{cases}u(x)=\ln(x-1)\\ v'(x)=1\end{cases} \qquad \begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x-1}\\ v(x)=x\end{cases}$$

و بالتالي يكون:

$$\int_{\lambda}^{2}\ln(x-1)dx=x\ln(x-1)\Big]_{\lambda}^{2}-\int_{\lambda}^{2}\frac{x}{x-1}dx$$

حساب التكامل $\int_{\lambda}^{2}\frac{x}{x-1}dx$:

لدينا:

$$\int_{\lambda}^{2}\frac{x}{x-1}dx=\int_{\lambda}^{2}\frac{x-1+1}{x-1}dx=\int_{\lambda}^{2}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=x+\ln(x-1)\Big]_{\lambda}^{2}=-\lambda-\ln(\lambda-1)$$

و بالتالي: $\int_{\lambda}^{2}\ln(x-1)dx=x\ln(x-1)\Big]_{\lambda}^{2}-\int_{\lambda}^{2}\frac{x}{x-1}dx=-\lambda\ln(\lambda-1)+\lambda+\ln(\lambda-1)=(1-\lambda)\ln(\lambda-1)+\lambda$

و بالنسبة لـ $\int_{\lambda}^{2}\ln(x)dx$:

لدينا:

$$\begin{cases}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1\end{cases} \qquad \begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$$

و بالتالي يكون:

$$\int_{\lambda}^{2}\ln(x)dx=x\ln(x)\Big]_{\lambda}^{2}-\int_{\lambda}^{2}1dx=2\ln(2)-\lambda\ln(\lambda)-2+\lambda$$
$$=\lambda(1-\ln(\lambda))-2(1-\ln(2))$$

و بالتعويض نجد:

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{2}\ln(x-1)dx-\int_{\lambda}^{2}\ln(x)dx=(1-\lambda)\ln(\lambda-1)+\lambda-\lambda(1-\ln(\lambda))+2(1-\ln(2))$$

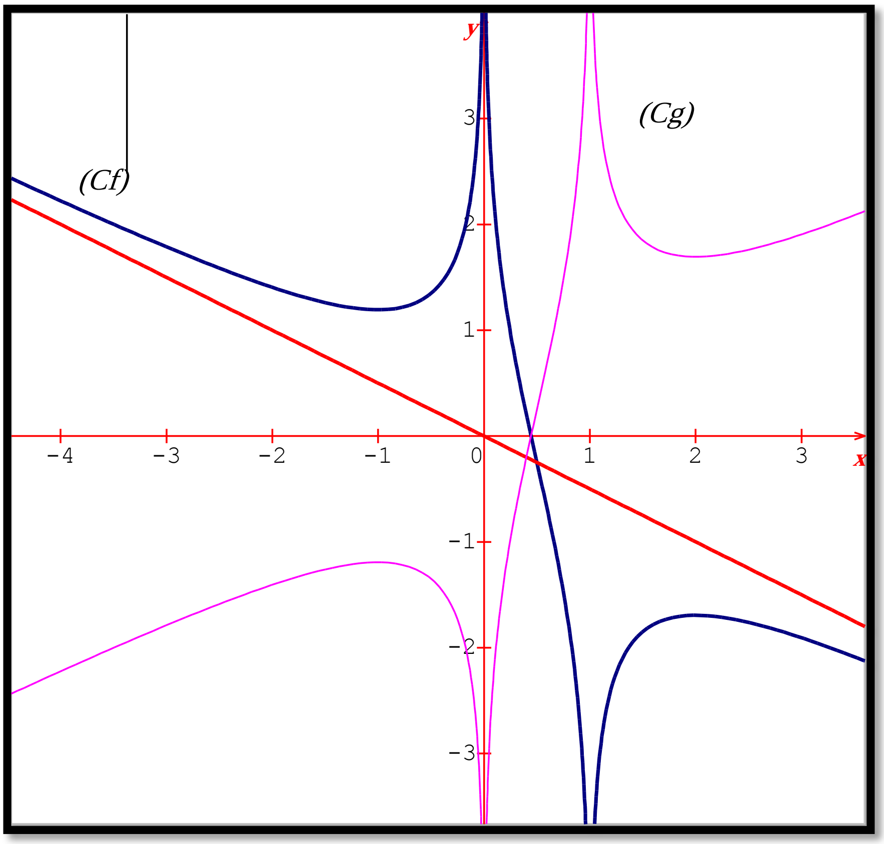
/7 $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 1} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 1}\left((1-\lambda)\ln(\lambda-1)+\lambda-\lambda(1-\ln(\lambda))+2(1-\ln(2))\right)=2(1-\ln(2))$

/8 $g(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$ المعرفة على $\mathbb{R}^*-\{1\}$

أ/ لدينا $g(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=-\left(-\frac{1}{2}x-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=-f(x)$

أي المنحنى (γ) مناظر لمنحنى الدالة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل،

ب/ إنشاء (γ) في نفس المعلم:


(Cf)
(Cg)
y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

تمرين 02:

أولا:

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،

أ/ ادرس تغيرات الدالة f،

ب/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري)،

ج/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$،

ثانيا:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\ln x$،

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق،

أ/ ادرس تغيرات الدالة g،

ب/ عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)، ثم ارسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$،

ثالثا:

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$،

أ/ احسب $h'(x)$ و استنتج دالة أصلية للدالة: $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$،

ب/ احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]dx$.

حل:

1/ لدينا $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$ و $D_f=]0;+\infty[$:

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

النهايات:

* $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}[(1+2\ln x)(-1+\ln x)]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(1+2\ln x)(-1+\ln x)]=+\infty$

المشتقة

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)(-1+\ln x)+\left(\frac{1}{x}\right)(1+2\ln x)=\frac{1}{x}(-2+2\ln x+1+2\ln x)=\frac{1}{x}(-1+4\ln x)$$

لدينا $f'(x)=0$ معناه $\ln x=\frac{1}{4}$ أي: $x=e^{\frac{1}{4}}$،

أي: $f'(x)=\frac{4}{x}\left(\ln x-\ln e^{\frac{1}{4}}\right)$ و منه جدول التغيرات:

x	0		$e^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(e^{1/4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

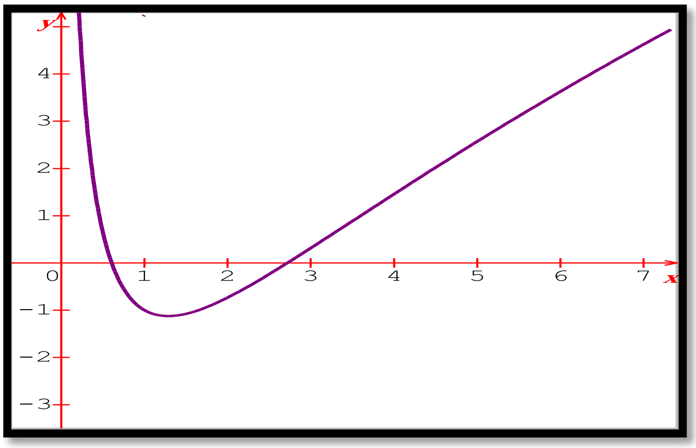
مع: $f\left(e^{1/4}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(-1+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{8}$

ب/ لدينا $(\Delta): y=f'(e)(x-e)+f(e)$ مع $f'(e)=\frac{3}{e}$ و $f(e)=0$، بالتعويض نجد المعادلة النهائية:

$$(\Delta): y=\frac{3}{e}(x-e)$$

ج/ تعيين فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محور الفواصل أي البحث عن حلول المعادلة $f(x)=0$ معناه $(1+2\ln x)(-1+\ln x)=0$ أي: $\ln x=-\frac{1}{2}$ معناه $x=e^{-1/2}$ أو $x=e$ و منه: $(C_f)\cap(xx')=\left\{(e;0),\left(e^{-1/2};0\right)\right\}$.

رسم المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$: لدينا $f\left(e^2\right)=5$ و بمراقبة جدول التغيرات نجد:



2/ لدينا $g(x)=1-\ln x$ و $D_g=\left]0;+\infty\right[$،

أ/ دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات:

* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$ و * $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(1-\ln x)=+\infty$،

المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left]0;+\infty\right[$

$$g'(x)=(1-\ln x)'=-\frac{1}{x}\prec 0$$

أي الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;+\infty\right[$،

و منه جدول التغيرات:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

ب/ تعيين الوضع النسبي بين المنحنيين:

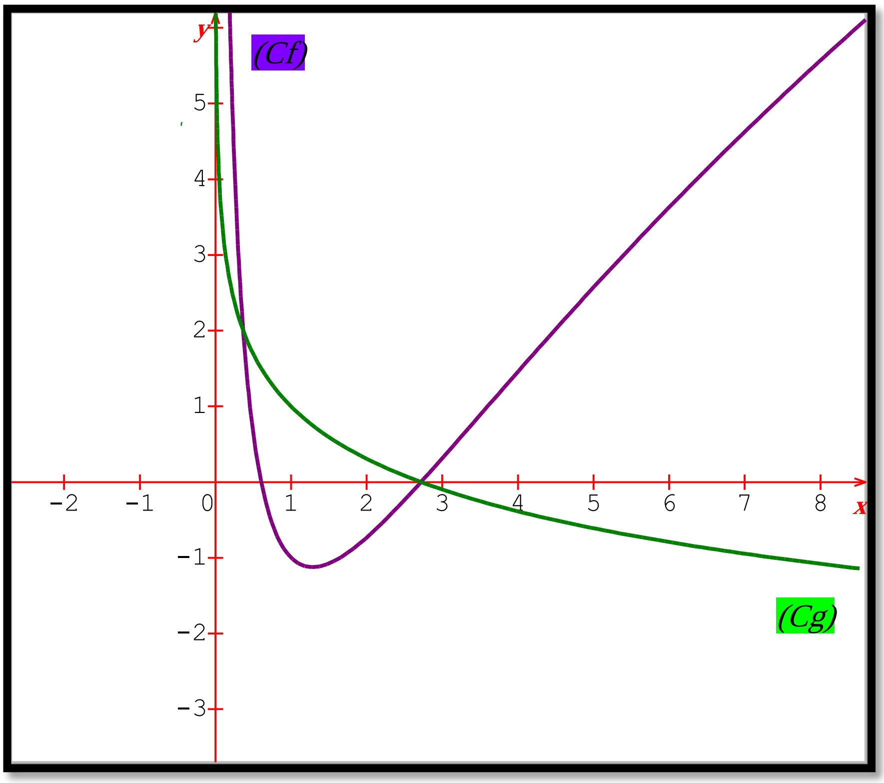
لدينا الفرق:

$$f(x)-g(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)=(1-\ln x)[-1-2\ln x-1]=2(\ln x-\ln e)(\ln x-\ln e^{-1})$$

و منه جدول الوضع النسبي:

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln x-1)(\ln x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي:		(C_f) فوق (C_g)	(C_f) قاطع لـ (C_g)	(C_f) تحت (C_g)	(C_f) قاطع لـ (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	

رسم (C_g) على المجال: بمراقبة الجدول للوضع النسبي و جدول التغيرات و الوضع النسبي نجد:



3/ لدينا $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ و $D_h=]0;+\infty[$

أ/ لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$$h'(x)=\left(x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\right)'=(\ln x)^2+2\ln x-2(\ln x+1)+2=(\ln x)^2$$

من عملية الاشتقاق هذه نستنتج أن h دالة أصلية للدالة $x\to(\ln x)^2$،

ب/ حساب التكامل:

$$\int_{e^{-1}}^{e}[f(x)-g(x)]dx=\int_{e^{-1}}^{e}\left[-1+\ln x-2\ln x+2(\ln x)^2-1+\ln x\right]dx$$

$$=2\int_{e^{-1}}^{e}\left[-1+(\ln x)^2\right]dx=2\left[\frac{1}{e}-e\right]+2\left[h(e)-h\left(\frac{1}{e}\right)\right]=2\left[\frac{1}{e}-e\right]+2\left[e-2e+2e-\frac{1}{e}-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}\right]=-\frac{8}{e}$$

تمرين 03:

الجزء الأول:

لتكن المعادلة التفاضليّة: $y'-2y=xe^x$ ... (1)

1/ حل المعادلة التفاضليّة: $y'-2y=0$ ... (2)، مع: y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

2/ ليكن a , b عددين حقيقيين و u الدالة المعـرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=(ax+b)e^x$

أ) عيّن a , b حتى يكون u حلا للمعادلة (1)،

ب) برهن أن v حـلا للمعادلة (2) إذا و فقط إذا كان $u+v$ حل للمعـادلة (1)، ثم استنتج مجموعة حلول المعـادلة (1)،

3/ عيّن حل المعادلة (1) الذي ينعدم من أجل $x=0$ ،

الجزء الثاني:

لتكن g الدالة المعرّفة على R كما يلي: $g(x)=2e^{x}-x-2$

1/ عين نهاية g عند: $+\infty$ ، $-\infty$، ثم ادرس تغيرات الدالة g ، و أنشئ جدول تغيراتها،

2/ نقبل أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل بالضبط حلين حقيقيين:

تحقق أن 0 هو أحد هذه الحلول، و نرمز للحل الآخر بالرمز α ، برهن أن: $-1.6\leq\alpha\leq-1.5$ ، ثم عيّن حسب قيم x إشارة g ،

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي بـ: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

1/ عيّن نهاية f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$، ثم برهن أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $g(x)$ ، شكل جدول التغيرات للدالة f،

2/ برهن أن $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha^{2}+2\alpha)}{4}$ حيث α العدد المعرف في الجزء الثاني، استنتــج حصـــــرا لـ $f(\alpha)$،

3 / ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f في مستوي منسـوب إلى معلم متعـــامد و متجـــانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (الوحدة: 2 cm)،

الجزء الرابع:

1/ β عدد حقيقي سالب، فسر التكامل $\int_{\beta}^{0}f(x)\,dx$ (يطلب تعليل الإجابة)،

2/ احسب $\int_{\beta}^{0}x\,e^{x}\,dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة، و استنتج $\int_{\beta}^{0}f(x)\,dx$ ، ثم احسب النهاية: $\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0}f(x)\,dx$.

حل:

الجزء الأول:

1/ حل المعادلة التفاضلية هو $y(x)=C\,e^{2x}$ ،

2/ أ) تعيين a , b: عند تعويض $u(x)=(ax+b)e^{x}$ في المعادلة و المقارنة نجد: $a=-1$ و $b=-1$ ،

ب) ليكن $u+v$ حــــــلا للمعادلة (1) معناه: $(u+v)'-2(u+v)=u'-2u+v'-2v=x\,e^{x}$ ،

يكافئ: $v'-2v=0$ أي: v حل للمعادلة (2)،

و منه نستنتج أن حلول المعادلة (1) هي: $-(x+1)e^{x}+C\,e^{2x}$ حيث C ثابتا حقيقيا،

3/ حل المعادلة (1) الذي ينعدم عند 0 هو: $-(x+1)e^{x}+e^{2x}$

الجزء الثاني:

1/ حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\,,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

دراسة التغيرات:

من أجل كل حقيقي x لدينا: $g'(x)=2\left(e^{x}-\dfrac{1}{2}\right)$

أي جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$	↗	$+\infty$

2/ عند ملاحـــظة جدول التغيرات، و تطبيـــــق مبرهنة القيم المتوسطة نتأكـــد أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حـــلا وحيدا، و منه إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
اشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثالث:

1/ النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

من أجل كل حقيقي x لدينا: $f'(x)=e^{x}g(x)$

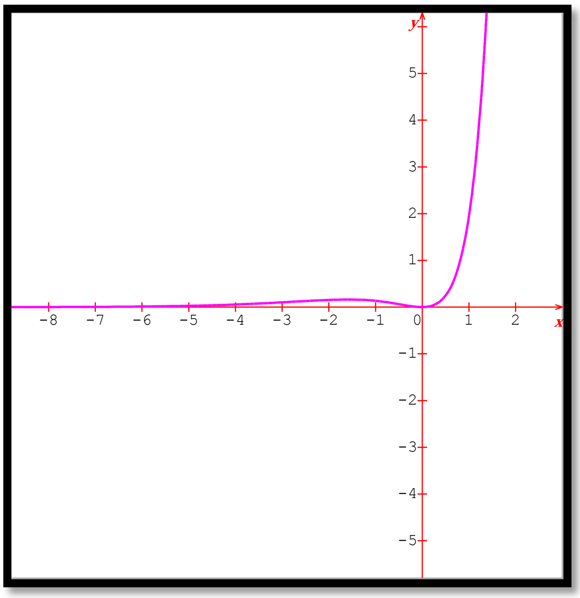
أي إشارة المشتقة من إشارة الدالة g، و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0)$	↗	

2 / عند ملاحظة أن: $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$ و منه نجد ببساطة: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha+2\alpha)}{4}$

و بالتالي نستنتج الحصر $0.11<f(\alpha)<0.2375$

3/ الرسم:



الجزء الرابع:

1/ التفسير الهندسي للتكامل:

كون إشارة الدالة موجبة تماما على المجال $]\beta;+\infty[$ ، فالتكامل يمثل المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f و محور الفواصل، و المستقيمين الذين معادلتهما: $x=0$, $x=\beta$،

2/ عند استعمال المكاملة بالتجزئة نجد: $\int_{\beta}^{0} x\, e^{x} dx = -\beta e^{\beta} - 1 + e^{\beta}$ و منه: $\int_{\beta}^{0} f(x)\, dx = \beta e^{\beta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2\beta}$

أي عند التقيّد بالوحدة نجد: $\lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{0} f(x) dx = 2$.