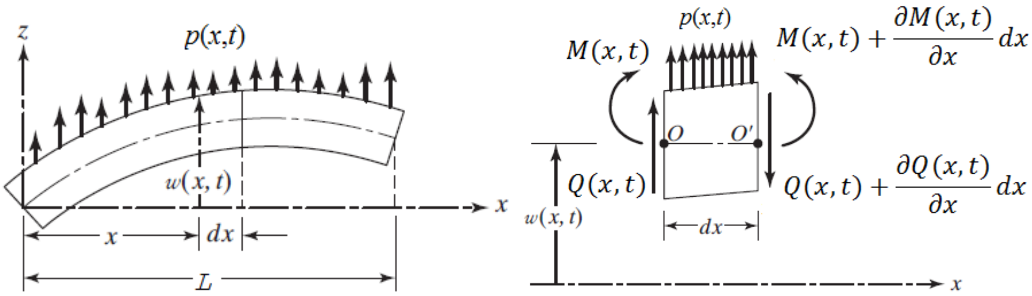
Chapitre 3

Vibrations transversales des poutres

1. Equation de mouvement

Considérons une poutre élastique de longueur L avec une section transversale variable $S(x)$. Les forces agissant sur les sections transversales d'un petit élément de la poutre de longueur dx sont représentées sur la figure



La somme des forces appliquées sur l'élément de la barre, suivant l'axe z donne :

$$\rho\, S\, dx\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = Q(x,t) - (Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx) + p(x,t)dx \qquad (1)$$

Soit :

$$\rho\, S\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + p(x,t) \qquad (2)$$

Or :

$$Q(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \qquad (3)$$

Et :

$$M(x,t) = EI\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \qquad (4)$$

A partir de (2)-(4), l'équation aux dérivées partielles du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) + \rho\, S\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \qquad (5)$$

Et dans le cas d'une section constante :

$$EI\, \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho\, S\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \qquad (6)$$

2. Fréquences et modes propres

En l'absence de forces extérieures, et dans le cas d'une section constante, on a l'équation :

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho\, S\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

Pour la résolution de l'équation (7), on utilise la méthode de séparation des variables.

On pose :

$$w(x,t) = W(x).T(t) \tag{8}$$

Qui, reporté dans (8) donne :

$$-EI\, T(t)\frac{d^4 W(x)}{dx^4} = \rho\, S\, W(x)\frac{d^2 T(t)}{dt^2} \tag{9}$$

La division des deux membres de l'équation par : $\rho\, S\, W(x)\, T(t)$ conduit à la séparation de la fonction de la variable d'espace et celle de la variable du temps :

$$-\frac{EI}{\rho S}\,\frac{1}{W(x)}\,\frac{d^4 W(x)}{dx^4} = \frac{1}{T(t)}\,\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = cste = -\omega^2 \tag{10}$$

Ce qui mène aux équations :

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \omega^2\frac{\rho S}{EI}W(x) = 0 \tag{12}$$

En posant :

$$\beta^4 = \omega^2\frac{\rho S}{EI} \tag{13}$$

L'équation (12) s'écrit :

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \tag{14}$$

La solution de (11) est :

$$T(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{15}$$

Et celle de l'équation (14) est recherchée sous la forme :

$$W(x) = Ge^{rx} \tag{16}$$

La substitution de (16) dans (14) mène à l'équation caractéristique :

$$r^4 - \beta^4 = 0 \tag{17}$$

Qui admet pour solutions :

$$r = \pm\beta\ , \qquad\qquad r = \pm i\beta \tag{18}$$

La solution générale de (14) s'écrit donc :

$$W(x) = G_1 e^{-\beta x} + G_2 e^{\beta x} + G_3 e^{-i\beta x} + G_4 e^{i\beta x} \tag{19}$$

En utilisant les formules:

$$e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x \tag{20}$$

Et

$$e^{\pm\beta x} = \cosh\beta x \pm \sinh\beta x \tag{21}$$

La solution générale de (7) s'écrit sous la forme :

$$W(x,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)(C\sin\beta x + D\cos\beta x + E\sinh\beta x + F\cosh\beta x) \tag{22}$$

Les pulsations de résonance sont déterminées par l'application des conditions aux limites (C.L).

3. Relations d'orthogonalité

En mouvement libre, en tenant compte de (15), l'équation (7) s'écrit:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W}{dx^2}\right) = \rho\, S\, \omega^2\, W \tag{23}$$

Où : $W = W(x)$

Puisque cette équation est vérifiée pour les couples ω_i, W_i et ω_j, W_j

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_i}{dx^2}\right) = \rho\, S\, {\omega_i}^2 W_i \tag{24}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_j}{dx^2}\right) = \rho\, S\, {\omega_j}^2 W_j \tag{25}$$

Si les extrémités de la barre ont pour abscisses 0 et L, à partir de (24) multipliée par W_j et de (25) multipliée par W_i et en intégrant de 0 à L :

$$\int_0^L W_j \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_i}{dx^2}\right) dx = \ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\, S\, W_i W_j\, dx \tag{26}$$

$$\int_0^L W_i \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_j}{dx^2}\right) dx = \ {\omega_j}^2 \int_0^L \rho\, S\, W_i W_j\, dx \tag{27}$$

En intégrant par parties les premiers membres de (26) et (27) et en supposant des conditions aux limites courantes :

- Libre : $Q = 0,\ \ M = 0,$
- Encastrée : $w = 0,\ \ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$
- Appuyée : $w = 0,\ \ M = 0$

Il vient :

$$\int_0^L EI\ \frac{d^2W_i}{dx^2}\ \frac{d^2W_j}{dx^2} dx = \ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\ S\ W_i W_j\ dx \tag{28}$$

$$\int_0^L EI\ \frac{d^2W_i}{dx^2}\ \frac{d^2W_j}{dx^2} dx = \ {\omega_j}^2 \int_0^L \rho\ S\ W_i W_j\ dx \tag{29}$$

En retranchant (28) et (29), on obtient :

$$\left({\omega_i}^2 - \ {\omega_j}^2\right) \int_0^L \rho\ S\ W_i W_j\ dx = 0 \tag{30}$$

D'où pour : $\omega_i \neq \omega_j$

$$\int_0^L \rho\ S\ W_i W_j\ dx = 0 \tag{31}$$

Et à partir de (28) ou (29) :

$$\int_0^L EI\ \frac{d^2W_i}{dx^2}\ \frac{d^2W_j}{dx^2} dx = 0 \tag{32}$$

Les expressions (31) et (32) sont les *relations d'orthogonalité*.

Par ailleurs, en remplaçant *j* par *i* dans (28) ou (29), il vient :

$$\int_0^L EI\ \left(\frac{d^2W_i}{dx^2}\right)^2 dx = \ {\omega_i}^2 \int_0^L \rho\ S\ W_i^2\ dx \tag{33}$$

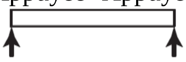
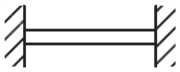
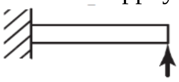
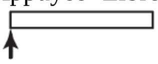
D'où :

$${\omega_i}^2 = \frac{\int_0^L EI\ \left(\frac{d^2W_i}{dx^2}\right)^2\ dx}{\int_0^L \rho\ S\ W_i^2\ dx} = \frac{k_i}{m_i} \tag{34}$$

$k_i$et m_i : raideurs et masses modales du mode *i*.

4. Conditions aux limites

Dans le tableau ci-dessous sont présentés les conditions aux limites courantes avec les pulsations et modes propres correspondants.

Conditions aux limites	Equations aux fréquences	Modes	Valeurs de $\beta_n L$
Appuyée- Appuyée 	$\sin\beta_n L = 0$	$W_n(x) = \sin\beta_n x$	$\beta_n L = n\pi$ $n = 1,2,3,\ldots$
Libre - Libre 	$\cos\beta_n L\,.\cosh\beta_n L = 1$	$W_n(x) = \sin\beta_n x + \sinh\beta_n x$ $+\alpha_n(\cos\beta_n x + \cosh\beta_n x)$ $\alpha_n = -\dfrac{\sin\beta_n L - \sinh\beta_n L}{\cos\beta_n L - \cosh\beta_n L}$	$\beta_1 L = 4.730041$ $\beta_2 L = 7.853205$ $\beta_3 L = 10.995608$ $\beta_4 L = 14.137165$ ($\beta L = 0$ pour modes rigides)
Encastrée - Encastrée 	$\cos\beta_n L\,.\cosh\beta_n L = 1$	$W_n(x) = -\sin\beta_n x + \sinh\beta_n x$ $+\alpha_n(-\cos\beta_n x + \cosh\beta_n x)$ $\alpha_n = -\dfrac{\sin\beta_n L - \sinh\beta_n L}{\cos\beta_n L - \cosh\beta_n L}$	$\beta_1 L = 4.730041$ $\beta_2 L = 7.853205$ $\beta_3 L = 10.995608$ $\beta_4 L = 14.137165$
Encastrée-Libre 	$\cos\beta_n L\,.\cosh\beta_n L = -1$	$W_n(x) = \sin\beta_n x - \sinh\beta_n x$ $-\alpha_n(\cos\beta_n x - \cosh\beta_n x)$ $\alpha_n = \dfrac{\sin\beta_n L + \sinh\beta_n L}{\cos\beta_n L + \cosh\beta_n L}$	$\beta_1 L = 1.875104$ $\beta_2 L = 4.694091$ $\beta_3 L = 7.854757$ $\beta_4 L = 10.995541$
Encastrée- Appuyée 	$\tan\beta_n L - \tanh\beta_n L = 0$	$W_n(x) = \sin\beta_n x - \sinh\beta_n x$ $+\alpha_n(-\cos\beta_n x + \cosh\beta_n x)$ $\alpha_n = \dfrac{\sin\beta_n L - \sinh\beta_n L}{\cos\beta_n L - \cosh\beta_n L}$	$\beta_1 L = 3.926602$ $\beta_2 L = 7.068583$ $\beta_3 L = 10.210176$ $\beta_4 L = 13.351768$
Appuyée- Libre 	$\tan\beta_n L - \tanh\beta_n L = 0$	$W_n(x) = \sin\beta_n x + \alpha_n \sinh\beta_n x$ $\alpha_n = \dfrac{\sin\beta_n L}{\sinh\beta_n L}$	$\beta_1 L = 3.926602$ $\beta_2 L = 7.068583$ $\beta_3 L = 10.210176$ $\beta_4 L = 13.351768$ ($\beta L = 0$ pour modes rigides)

D'autres conditions aux limites sont résumées dans les deux cas suivants :

<u>Cas 1</u> :

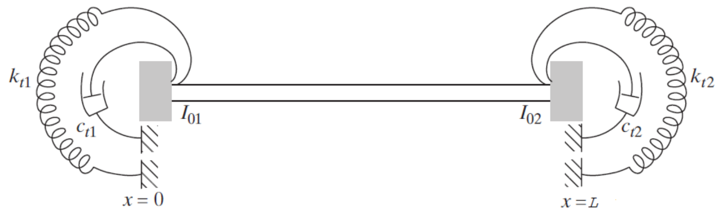
A l'extrémité gauche de la poutre :

$$Q(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)\right) = -k_1 w(0,t) - c_1\frac{\partial w}{\partial t}(0,t) - m_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)$$

Et à son extrémité droite :

$$Q(L,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)\right) = k_2 w(L,t) + c_2\frac{\partial w}{\partial t}(L,t) + m_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L,t)$$

Cas 2 :



A l'extrémité gauche de la poutre :

$$M(0,t) = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = k_{t1}\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) + c_{t1}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(0,t) + I_{01}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(0,t)$$

Et à son extrémité droite :

$$M(L,t) = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = -k_{t2}\frac{\partial w}{\partial x}(L,t) - c_{t2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(L,t) - I_{02}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(L,t)$$