Table des matières

1 Semi-groupe fortement continues à l'origine (de classe $\mathcal{C}_0$). 2

1.1 Introduction . . . 2
1.2 Semi-groupe fortement continues à l'origine . . . 3
1.3 L'unicité de l'engendrement . . . 6
1.4 Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe . . . 6
1.5 Type d'un semi-groupe . . . 8
1.6 La transformée de Laplace d'un C_0-semi-groupe . . . 8
1.7 Étude de la croissance de la Résolvante . . . 10
1.8 L'approximation généralise de Yosida . . . 11
1.9 Théorème de Hille-Yosida . . . 12

Chapitre 1

Semi-groupe fortement continues à l'origine (de classe $\mathcal{C}_0$).

1.1 Introduction

Nous avons Considéré des Problèmes de Cauchy du type : Trouver u tel que $(1)\ldots\frac{du}{dt}=au; u(0)=u_0$ donnée dans un espace fonctionnel E; a donné constante . La solution de (1) est donné par : $u(t)=e^{at}.u_0$ telle que $e^{at}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}$.
Soit le problème suivant $(2)\ldots\frac{du}{dt}=Au; u(0)=u_0$.Si l'espace E est de dimension finie n, A est une matrice $n\times n$ (bien sûr ; opérateur borné). La solution de (2) est donnée par $u(t)=\exp(At)u_0$.(noté $\mathcal{S}_1(t)u_0$).
Pour tout $t\in\mathbb{R}$ nous avons constaté que L'ensemble des $\mathcal{S}_1(t)$: $t\in\mathbb{R}$, a les propriétés d'un Groupe.
Nous avons considéré des exemples avec A opérateur linéaire non bornée ; par exemple dans espace de Banach $(E=L^2(\mathbb{R}^n))$ et constaté que la solution du problème (2) est donnée par la formule $u(t)=\mathcal{S}_2(t)u_0(t\geq 0$ ou parfois $t\in\mathbb{R})$. Où $\mathcal{S}_2(t)$ est un opérateur borné dans E, vérifiant certaines des propriétés de l'exponentielle $\exp(-At)$ ci-dessus, et plus précisément :

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{S}_2(t+s)=\mathcal{S}_2(t).\mathcal{S}_2(s)\\ \mathcal{S}_2(0)=I\\ \lim\limits_{t\to 0}\mathcal{S}_2(t)u_0=u_0\ \text{ dans } E\end{array}\right.$$

1.2 Semi-groupe fortement continues à l'origine

Définition 1.1 *Soit E un espace de Banach, une famille d'opérateurs linéaires bornés. $\mathcal{S}(t) : E \rightarrow E$ dépendantes du paramètre $t \geq 0$ forment un semi groupe si*

$$\begin{cases} 1) \ \mathcal{S}(0) = I \\ 2) \ \mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s); \forall t, s \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 1.2 *Semi groupe $\mathcal{S}(t)$ est dit fortement continues à l'origine (ou bien semi groupe de classe C_0) si*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathcal{S}(t)x - x\| = 0; \forall x \in E \tag{2.2}$$

Définition 1.3 *Soit $\mathcal{S}(t)$ un semi groupe sur E, le générateur infinitésimal de $\mathcal{S}(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A défini par*

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E$$

$$D(A) = \left\{ x \in E \ \textit{ telle que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(t) - I}{t} x \ \textit{ existe} \right\}$$

Où :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \ \textit{pour } x \in D(A) \tag{2.3}$$

$D(A)$ est le domaine de A.

Proposition 1.1 *Soient $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $\mathcal{S}(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :*
$\mathcal{S}(t)Ax = A\mathcal{S}(t)x; (\forall)\, t \geq 0.$

Preuve. *Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :*

$$\mathcal{S}(t)Ax = \mathcal{S}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(h)\mathcal{S}(t)x - \mathcal{S}(t)x}{h}.$$

Donc $\mathcal{S}(t)x \in D(A)$ et on a $\mathcal{S}(t)Ax = A\mathcal{S}(t)x; (\forall)\, t \geq 0.$ ■

Lemme 1.1 *Soit $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe alors :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{S}(\sigma)x d\sigma = \mathcal{S}(t)x$$

Quels que soient $x \in E$ et $t \geq 0$.

Preuve. *On pose $\mathcal{S}(\sigma) = M'(\sigma)$. ■*

Proposition 1.2 *Soient* $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D\left(A\right)$*, alors* $\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)$ *et on a l'égalité :*
$A\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma = \mathcal{S}(t)x - x; (\forall)\, t \geq 0.$

Théorème 1.1 *Soient* $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. alors* $x \in D\left(A\right)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si*
$\mathcal{S}(t)x - x = \int_0^t \mathcal{S}(\sigma)yd\sigma; (\forall)\, t \geq 0.$

Proposition 1.3 $\forall x \in D\left(A\right); \mathcal{S}\left(t\right)x \in D\left(A\right)$ *et* $\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)x = A\mathcal{S}\left(t\right)x = \mathcal{S}(t)Ax$

Preuve. Remarquons que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t+h)x - \mathcal{S}(t)x}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t)\mathcal{S}(h) - \mathcal{S}(t)}{h}x \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t)\left(\mathcal{S}(h) - I\right)}{h}x \\ &= \mathcal{S}(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(h) - I}{h}x = \mathcal{S}(t)Ax\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(h) - I}{h}\mathcal{S}(t)x = A\mathcal{S}(t)x; \forall t \geq 0.$$

D'autre parte

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t-h)x - \mathcal{S}(t)x}{-h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t-h)x - \mathcal{S}(t-h+h)x}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t-h)x - \mathcal{S}(t-h)\mathcal{S}(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\mathcal{S}(t-h)\frac{I - \mathcal{S}(h)}{-h}x = \mathcal{S}(t)Ax\end{aligned}$$

Donc : $\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}\mathcal{S}(t-h)x = A\mathcal{S}(t)x.$ ■

Proposition 1.4 *$D\left(A\right)$ est un sous espace vectorielle dense dans E* $\left(\overline{D\left(A\right)} = E\right)$.
Preuve. *$D\left(A\right)$ sous espace vectorielle vérifie facilement.*
$\overline{D\left(A\right)} = E$ *?*
Comme

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma = x\,; \forall x \in E$$

Donc il suffit de démontrer que

$$\forall x \in E \;\; et \;\; \forall t > 0; \int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)?$$

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma &= \frac{1}{h}\int_0^t \{\mathcal{S}(h+\sigma)x-\mathcal{S}(\sigma)x\}\,d\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{S}(h+\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{h+t} \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{0} \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma + \frac{1}{h}\int_0^{t+h} \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^h \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma = \mathcal{S}(t)x-x
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma = \mathcal{S}(t)x-x$$

D'où

$$\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)$$

On a donc aussi $\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \in D\left(A\right)$
Et comme $x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma$. *On en déduit que* $\overline{D\left(A\right)}=E$.
Et $A\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)xd\sigma = \mathcal{S}(t)x-x$.
Et en plus $\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)Axd\sigma = \mathcal{S}(t)x-x$. ■

Proposition 1.5 *L'opérateur A est fermé.*

Preuve. $\forall x_n\in D(A)$ *telle que* $x_n\to x$ *et* $Ax_n\to y$
Est-ce que $x\in D\left(A\right)$ *et* $Ax=y$ *?*
En effet, supposons que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\left(x_n\right)_n\in D\left(A\right)\ \text{ et }\ x_n\to x\ \text{ et }\ Ax_n\to y\ \text{ dans } E$$

D'après la démonstration précédente

$$\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)yd\sigma = \mathcal{S}(t)x-x$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathcal{S}(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)yd\sigma$$

On en déduit que $x\in D\left(A\right)$ *et* $Ax=y$. *Ainsi l'opérateur* A *qui fermé.* ■

1.3 L'unicité de l'engendrement

Théorème 1.2 *Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors :*
$T(t) = \mathcal{S}(t); (\forall)\, t \geq 0.$
Preuve. *Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Définissons l'application :*

$$[0,t) \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)\mathcal{S}(s)x \in D(A).$$

Alors :

$$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)\mathcal{S}(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}\mathcal{S}(s)x = -AT(t-s)\mathcal{S}(s)x + T(t-s)A\mathcal{S}(s)x = 0.$$

Quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = \mathcal{S}(t)x; (\forall)\, x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$ et $T(t), \mathcal{S}(t) \in \mathcal{F}(E)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = \mathcal{S}(t)x; (\forall)\, t \geq 0 \text{ et } x \in E$$

Ou bien $T(t) = \mathcal{S}(t); (\forall)\, t \geq 0.$ ■

1.4 Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe

Lemme 1.2 *Soit $\mathcal{S}(t)$ un semi groupe fortement continu alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0 \tag{2.4}$$

Preuve. Considérons le compact $[0,1]$
Comme $\mathcal{S}(t)$ est fortement continue alors $\forall x \in E; t \to \mathcal{S}(t)x$ est continue. Alors du compact $[0,1]$ par cette application est borné.
Alors

$$\exists\, M_x \text{ telle que } \|\mathcal{S}(t)x\| \leq M_x \,; \forall t \in [0,1]$$

D'après Banach-Steinhauss

$$\exists\, M \text{ telle que } \|\mathcal{S}(t)\| \leq M \,; \forall t \in [0,1]$$

Comme $\mathcal{S}(0) = I \Rightarrow M \geq 1$.

Si $t \notin [0,1]$; on peut écrire t sous la forme

$t = n + \sigma$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= \mathcal{S}(n+\sigma) = \mathcal{S}(n)\mathcal{S}(\sigma) = \mathcal{S}(\underbrace{1 + ... + 1}_{n \text{ foix}})\mathcal{S}(\sigma) \\ &= \{\mathcal{S}(1)\}^n \mathcal{S}(\sigma) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t)\| &= \|\{\mathcal{S}(1)\}^n\| \, \|\mathcal{S}(\sigma)\| \leq \|\mathcal{S}(1)\|^n \, \|\mathcal{S}(\sigma)\| \\ \|\mathcal{S}(t)\| &\leq M^n M = Me^{n \log M} = Me^{n\omega} \end{aligned}$$

Donc $\|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{t\omega}$ telle que $\omega = \log M$. ■

Proposition 1.6 *Si $\mathcal{S}(t)$ est un semi groupe fortement continue à l'origine est la majoration*

$$\|\mathcal{S}\,(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Alors $\mathcal{S}\,(t)$ est fortement continue en un point $s > 0$.

Preuve. Soit $\mathcal{S}\,(t)$ un semi groupe fortement continue à l'origine pour tout

$$x \in E; \|\mathcal{S}(t)x - x\| \underset{t \longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Montrons la continuité forte en un point $s > 0$?

Montrons que

$$\forall x \in E; \|\mathcal{S}(t+s)x - \mathcal{S}(s)x\| \underset{t \longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Considérons sont d'abord le cas $t > 0$

$$\|\mathcal{S}(t+s)x - \mathcal{S}(s)x\| = \|\mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)x - \mathcal{S}(s)x\| = \|\mathcal{S}(t)y - y\| \underset{t \longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Grâce à la continuité forte à l'origine. La continuité à droite -1-

Le cas $t < 0$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t+s)x - \mathcal{S}(s)x\| &= \|\mathcal{S}(t+s)x - \mathcal{S}(t-t+s)x\| \\ &= \|-\mathcal{S}(t+s)\left(\mathcal{S}(-t)x - x\right)\| \\ &\leq \|\mathcal{S}(t+s)\| \, \|(\mathcal{S}(\,-\,t)x - x)\| \\ &\leq Me^{\omega(t+s)} \, \|(\mathcal{S}(-t)x - x)\| \end{aligned}$$

On a

$$\|\mathcal{S}(-t)x - x\| \underset{t \longmapsto 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } t < 0 \text{ alors } -t > 0)$$

Donc la continuité à gauche -2-

D'après 1 et 2 alors $\mathcal{S}(t)$ fortement continue. ■

1.5 Type d'un semi-groupe

Définition 1.4 *On appelle type d'un semi groupe $\mathcal{S}(t)$ le nombre w_0 définie par*

$$\omega_0 = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R}; \exists M \in \mathbb{R}^+ \textit{ telle que } \|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{\omega t} \textit{ pour } t \geq 0 \right\}$$

$$\omega_0 = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log \|\mathcal{S}(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|\mathcal{S}(t)\|}{t} \tag{2.5}$$

On a semi groupe important.
Si $\forall t \geq 0$ on a $\|\mathcal{S}(t)\| \leq M$ le semi groupe $\mathcal{S}(t)$ est dit borné.
Si $\forall t \geq 0$ on a $\|\mathcal{S}(t)\| \leq 1$ le semi groupe $\mathcal{S}(t)$ est dit contraction.

1.6 La transformée de Laplace d'un C_0-semi-groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par A_ω l'ensemble

$$A_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda > \omega > \omega_0\}$$

Soit $\lambda \in A_\omega$ et $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ nous avons

$$\|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\left\| e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)x \right\| \leq e^{-\lambda . t} \|\mathcal{S}(t)\| \|x\| \leq Me^{-(\lambda-\omega)t} \|x\| ; \forall x \in E$$

Définissons l'application $R_\lambda : E \to E$ Par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)x \right\| dt \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|x\| ; \forall x \in E$$

D'ou il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 1.5 *L'opérateur $R : A_\omega \to \mathcal{F}(E)$*

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dt \tag{2.6}$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.3 *Si λ est telle que*

$$\lambda > \omega_0 = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log \|\mathcal{S}(t)\|}{t}$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dt$ existe. Et :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt = R(\lambda, A)x$$

Preuve. Si $\omega_0 < \omega < \lambda$ on a $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dt \right\| &\leq \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t) \right\| dt = \int_0^\infty \left| e^{-\lambda t} \right| \|\mathcal{S}(t)\| \, dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-\lambda . t} e^{\omega t} dt = M \int_0^\infty e^{(\omega - \lambda)t} dt \end{aligned}$$

Ainsi si $\omega_0 < \lambda$ alors l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dt$ existe.
Notons par $R(\lambda)$ l'opérateur définit pour chaque $x \in E$ par

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt$$

Tout d'abord on va montrer que

$$\forall x \in E; R(\lambda)x \in D(A)?$$

En effet $\forall x \in E$ on a

$$\frac{\mathcal{S}(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\mathcal{S}(t+h)x - \mathcal{S}(t)x\right]dt$$

On pose $t + h = \sigma$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(\sigma - h)}\mathcal{S}(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma}\mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\sigma}\mathcal{S}(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda(\sigma - h)}\mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}R(\lambda)x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda\sigma}\mathcal{S}(\sigma)xd\sigma \end{aligned}$$

Si $h \longrightarrow 0$; on obtient

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Rightarrow (\lambda - A)R(\lambda)x = x; \forall x \in E$$

Alors $R(\lambda)$ est l'inverse à gauche de l'opérateur $(\lambda I - A)$.

L'inverse à droite ?

Pour montrer que c'est un inverse à droite de $(\lambda I - A)$ il suffit de montrer que $AR(\lambda) = R(\lambda)A$

On a en effet. Si $x \in D(A)$; on a

$$\begin{aligned} AR(\lambda)x &= A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}\mathcal{S}(t)xdt = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}xdt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\mathcal{S}(h)-I}{h}xdt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)Axdt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dtAx = R(\lambda)Ax. \end{aligned}$$

Ainsi on a déduire que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$

D'où $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. C'est-à-dire $R(\lambda) = R(\lambda, A)$. ■

1.7 Étude de la croissance de la Résolvante

On a que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda > \omega > \omega_0$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt$ est convergente.

$$e^{-\lambda . t}\|\mathcal{S}(t)x\| \leq \|x\| M_\varepsilon e^{(-\lambda+\omega_0+\varepsilon)t} \text{ où } \varepsilon > 0$$

De cette manière on peut définit l'opérateur borné

$R(\lambda) : E \longrightarrow E; R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)xdt$ telle que $\lambda > \omega_0 + \varepsilon$.

Et que

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\lambda - \omega_0 - \varepsilon}$$

D'autre part on a $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \leq \omega_0\}$.

Et en générale $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega_0\}$.

Et on a

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathcal{S}(t)dt \text{ et } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_0}{\lambda - \omega_0}.$$

Proposition 1.7

$$(R(\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^{n-1}\mathcal{S}(t)dt \tag{2.7}$$

Preuve. *Tout d'abord on remarque que*

L'on a $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$ *identité des résolvante de Hilbert (à démontrer facile).*

$$\frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\lambda \longrightarrow \mu} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda \longrightarrow \mu} \left(-R(\lambda, A) R(\mu, A)\right)$$
$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -\left(R(\lambda, A)\right)^2$$

Pour récurrence on peut démontrer facilement que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! \left(R(\lambda, A)\right)^{n+1}$$

Alors :

$$\left(R(\lambda, A)\right)^n = \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)$$
$$\left(R(\lambda, A)\right)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t) dt \; ; \forall \lambda \in \rho(A)$$

Donc :

$$\left\| R(\lambda, A)^n \right\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)t} t^{n-1} dt$$

On obtient : $\left\| R(\lambda, A)^n \right\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$. ■

1.8 L'approximation généralise de Yosida

Lemme 1.3 *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes*

♦ A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = E$.

♦ *Il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $A_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in A_\omega$; *on a*

$$\left\| R(\lambda, A)^n \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $\lambda \in A_\omega$; *nous avons* $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A) x = x; \forall x \in E$

De plus : $\lambda A R(\lambda, A) \in \mathcal{F}(X)$

Et : $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda A R(\lambda, A) x = Ax; \forall x \in D(A)$

Remarque 1.1 *On peut dire que les opérateurs bornés* $\lambda A R(\lambda, \mathcal{A})$ *sont des approximations pour l'opérateur non borné* A. *C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivant.*

Théorème 1.4 *La famille* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A_\omega} \subset \mathcal{F}(E)$; *où*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \tag{2.8}$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.

Preuve. On a $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I \Longrightarrow (\lambda I - A) R(\lambda, A) = I$

$\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A) = I \Longrightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda A R(\lambda, A) = \lambda I$

$\Longrightarrow \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda A R(\lambda, A) = A_\lambda$. ■

1.9 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.5 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $\mathcal{S}(t)_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ si et seulement si :*
(i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.
(ii) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_\omega$; on a

$$\left\|(\lambda I - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

Preuve. *($\Longrightarrow$) Sa démontre déjà.*
($\Longleftarrow$) Dans ce but introduisant tout d'abord la notion d'approchante yosida ■

Définition 1.6 *pour $\lambda > \omega$ on définit les approchant yosida de A par :*
$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda A R(\lambda, A)$.

Lemme 1.4 *On a*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax \,; \forall x \in D(A).$$

Preuve. soit $x \in D(A)$: $\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|AR(\lambda, A)x\|$
$= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\| . \|Ax\| \leq \frac{M}{\lambda - w} \|Ax\| \underset{\lambda \to +\infty}{\to} 0$
D'aprés Banach-Steinhauss :
$\lambda R(\lambda, A)x \underset{\lambda \longmapsto +\infty}{\longrightarrow} 0 \,; \forall x \in D(A)$
Or : $\overline{D(A)} = E$: $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - w} \leq c$
Alors d'aprés Banach-Steinhauss : $\lambda R(\lambda, A)x \to x : \forall x \in E$
Ainsi : $A_\lambda x \to Ax \quad ; \forall x \in D(A)$
$\{A_\lambda x = \lambda R(\lambda, A)Ax \to Ax\}$ ■

Lemme 1.5 *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés telle que*
$A \subset B$ et $\rho(A) \cap \rho(B) = \phi$.
Alors $A = B$.

Preuve. soit $x \in D(B)$ et $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ posons : $Bx - \lambda_0 = y$ et $z = (A - \lambda_0 I)^{-1}.y$
$\Longrightarrow z \in D(A)$ et de plus $Az - \lambda_0 z = y$
$\Longrightarrow z \in D(B) : Bz - \lambda_0 z = y$
$\Longrightarrow z = (B - \lambda_0 I)^{-1} y = (B - \lambda_0 I)^{-1}.(B - \lambda_0 I)x = x$
$\Longrightarrow x \in D(A)$
Ainsi $D(A) = D(B) \Longrightarrow A = B$
Ainsi le lemme est démontré. ■

Démonstration de la Suffisance de théorème de Hille -Yosida :

Pour chaque $\lambda > w$: soit $A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \Longrightarrow A_\lambda \in L(E)$; on peut alors construire le Semi-groupe :

$$\mathcal{S}_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{\lambda^2.t.(\lambda I - A)^{-1} - \lambda t}$$

$$\mathcal{S}_t^\lambda = e^{A_\lambda .t} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^n}{n!}(\lambda I - A)^{-1}$$

On va montrer que la limite de Semi-groupe $\mathcal{S}_t^\lambda$ existe quand $\lambda \to +\infty$ et que de Semi-groupe chercher $\mathcal{S}_t$.

Notons que :

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{S}_t^\lambda\right\| &\leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^n}{n!}\frac{M}{(\lambda - w)^n} \\ &= M.\exp\left(\frac{\lambda w t}{\lambda - w}\right)\end{aligned}$$

Il facile de voir que : $A_\lambda.A_\mu = A_\mu.\ A_\lambda$ (vue que : $R(\lambda, A).R(\mu, A) = R(\mu, A).R(\lambda, A)$) est que : $A_\lambda.\mathcal{S}_t^\mu = \mathcal{S}_t^\mu.A_\lambda$

Soit $x \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t^\lambda x - \mathcal{S}_t^\mu x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(\mathcal{S}_{t-s}^\mu \mathcal{S}_s^\lambda)x ds \\ &= \int_0^t \mathcal{S}_{t-s}^\mu (A_\lambda - A_\mu)\mathcal{S}_s^\lambda x ds \\ &= \int_0^t \mathcal{S}_{t-s}^\mu \mathcal{S}_s^\lambda (A_\lambda - A_\mu) x ds\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\|\mathcal{S}_t^\lambda x - \mathcal{S}_t^\mu x\right\| \leq M^2.\exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right)\left\|(A_\lambda - A_\mu)x\right\|.\int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda - \mu)w^2 s}{(\mu - w)(\lambda - w)}\right)ds$$

Choisi : $\lambda > \mu$

$$\left\|\mathcal{S}_t^\lambda x - \mathcal{S}_t^\mu x\right\| \leq M^2 \exp\left(\frac{\mu w t}{\mu - w}\right).q.\underbrace{\left\|(A_\lambda - A_\mu)x\right\|}_{\to 0}$$

(Puisque $A_\lambda x \to Ax$ car $\lambda, \mu \longrightarrow \infty$)

Donc $\mathcal{S}_t^\lambda x$ converge fortement vers une limite qu'on note par : $\mathcal{S}_t x$.

Il reste que $\mathcal{S}_t$ est un C^0-Semi-groupe dans le générateur infinitésimal A.

♦ $\mathcal{S}_{t+s}x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{S}^{\lambda}_{t+s}x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{S}^{\lambda}_{t}.\mathcal{S}^{\lambda}_{s}x = \mathcal{S}_t.\mathcal{S}_s x\,;\forall x \in E; \forall t, s \geq 0$
♦ $\mathcal{S}_0\, x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{S}^{\lambda}_{0}x = Ix = x \Longrightarrow \mathcal{S}_0 = I$
♦ la continuité forte est une conséquence directe de la continuité uniforme sur le compacte.
A est le générateur infinitésimal de $\mathcal{S}_t$?
Soit $x \in D(A)$

$$\mathcal{S}(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{A_\lambda t}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda ds = \int_0^t \mathcal{S}(s)Axds$$

Soit B le générateur de $\mathcal{S}(t)$ et soit $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}.\int_0^t \mathcal{S}(s)Axds \\ &\Longrightarrow \quad x \in D(B); Bx = Ax \\ &\Longrightarrow \quad B \supseteq A \end{aligned}$$

Si $\lambda > w$ on' a tout d'abord $\lambda \in \rho(A)$ et $\lambda \in \rho(B)$ d'après de condition nécessaire de Hille-Yosida alors d'après le lemme précédente : $A = B$.
Ainsi le théorème est démontré.