Formules de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Notations. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n.

Théorème (Taylor-Young)**.** Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition. La somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0. Par convention, $0! = 1! = 1$.

Taylor ne s'est pas vraiment préoccupé de la forme du reste, il faut attendre ses successeurs pour voir se développer une maîtrise du reste dans certaines conditions plus précises.

Théorème (Taylor-Lagrange)**.** Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

(notons ici que θ dépend de h).

Théorème (Taylor avec reste intégral)**.** Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité

$$\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

qui découle tout simplement d'un changement de variable $t \mapsto x_0 + th$.

Si le reste est exprimé sous la seconde forme, appelée forme de Lagrange, le théorème de Taylor représente une généralisation du théorème des accroissements finis (qui peut être utilisé pour démontrer cette version), tandis que la troisième expression du reste montre que le théorème est une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (qui est utilisé dans la démonstration de cette version).

Pour certaines fonctions f, nous pouvons montrer que le reste tend vers zéro quand n tend vers l'infini ; ces fonctions peuvent être développées en *série de Taylor* dans un voisinage du point x_0 et sont appelées des *fonction analytiques*.

Démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral. Montrons le résultat par récurrence sur n. Le reste intégral sera exprimé sous sa deuxième forme (cf. remarque ci-dessus).

La propriété est vraie au rang 0. En effet, selon le théorème fondamental de l'analyse, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, x_0+h]$ alors :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons la formule vraie au rang n. Alors pour f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[x_0, x_0+h]$ on obtient, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x_0+h-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x_0+h} + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse de récurrence

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

on obtient donc

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que notre propriété est vraie au rang $n+1$. $\square$

Remarque. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors on peut déduire facilement la formule de Taylor-Young de la formule de Taylor avec reste intégral. Il suffit de montrer que la fonction

$$\varepsilon(h) := \frac{h}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 quand h tend vers 0. Or on peut vérifier que l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\,\mathrm{d}t$ est bornée pour h au voisinage de 0.

Remarque. Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x = x_0 + h$. Le théorème de Taylor-Young s'énonce alors de la façon suivante : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors pour tout $x \in I$ on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

où $\varepsilon(x-x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.