Chapitre 4 : Equations différentielles

I. Introduction aux équations différentielles

Définition : Equation différentielle

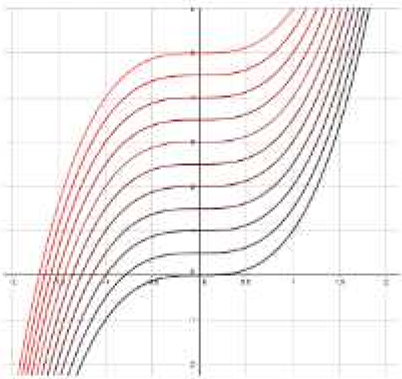
Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle x *ou* t, une fonction qui dépend de cette variable f et un certain nombre de ses dérivées successives $f', f'', f^{(3)} \dots$

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont cette relation.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'(x) = 3x^2$.

Grâce à la notion de primitive, on sait que $y(x) = x^3 + c$ où c est une constante réelle.
On remarque qu'il y a une infinité de solutions, dépendantes de la constante c.

Si on impose la contrainte du type $y(0) = 1$ (condition initiale), on obtient :
$y(0) = 0^3 + c = c$. Or $y(0) = 1$ donc par identification $c = 1$.
Dans le cas d'équation différentielle et condition initiale, il y a une unique solution $y(x) = x^3 + 1$.



Remarque : Dans la suite, on écrira la solution f plutôt que y.

II. Equation différentielle du type $y' + ay = b$

A. Solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = 0$

Propriété :

On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (appelée équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient constant) où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = ke^{-ax} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

On considère une fonction f quelconque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que f est solution de (E).
On pose la fonction g définie et dérivable par produit sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{ax}$.

$$g'(x) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} = \big(f'(x) + af(x)\big)e^{ax} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Or la fonction f est solution de (E), donc $f'(x) + af(x) = 0$, ainsi $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $g'(x) = 0$ et donc $g(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où k est une constante).
Or $g(x) = f(x)e^{ax}$, d'où $f(x)e^{ax} = k$ et donc $f(x) = ke^{-ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a montré que toutes les solutions de (E) sont nécessairement de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle : $y' - 3y = 0$
Les solutions sont de la forme $f(x) = ke^{3x}$ où k est une constante réelle.

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle : $2y' = -5y$
Cette équation différentielle s'écrie $y' + \frac{5}{2}y = 0$.

Les solutions sont de la forme $f(x) = ke^{-\frac{5}{2}x}$ où k est une constante réelle.

B. Solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = b$

Propriété :

On considère l'équation différentielle $y' + ay = b$ (appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant) où $a \neq 0$ est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 4$
Les solutions sont de la forme $f(x) = ke^{-2x} + \frac{4}{2} = ke^{-2x} + 2$ où k est une constante réelle.

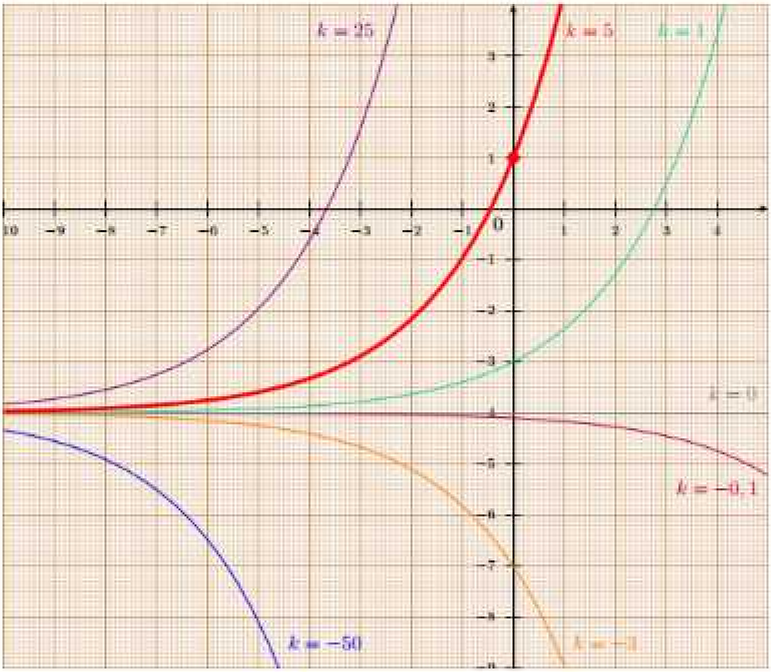
C. Unicité de la solution sous condition initiale

Propriété (Cauchy-Lipschitz) :

Soient x_0, y_0 $a \neq 0$ et b des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 2$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$.

- Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 4$ où k est une constante réel.
- On obtient une infinité de solution, en fonction de k, dont en voici quelques représentations :



- Parmi toutes ces courbes, une seule passe par la point de coordonnées $(0; 1)$ correspondant à la condition initiale $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Leftrightarrow ke^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = 1 \\ &\Leftrightarrow k - 4 = 1 \\ &\Leftrightarrow k = 5 \end{aligned}$$

D'où $f(x) = 5e^{\frac{1}{2}x} - 4$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III. Equation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

A. Solution générale

Propriété :

On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \neq 0$ est un réel et y une fonction deux fois dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \quad où \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$
L'équation peut s'écrire $y'' + 2^2 y = 0$, on a donc $\omega = 2$.
Les solutions sont de la forme $f(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$ où λ et μ sont des constantes réelles.

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle : $27y'' + 3y = 0$
L'équation peut s'écrire $y'' + \frac{3}{27} y = 0$ ou encore $y'' + \left(\frac{1}{3}\right)^2 y = 0$, on a donc $\omega = \frac{1}{3}$,
Les solutions sont de la forme $f(x) = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \mu \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ où λ et μ sont des constantes réelles.

Remarque : Il peut arriver qu'il soit nécessaire de transformer l'écriture de la solution.

$f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ en $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ ou $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$

Pour cela, on utilisera les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad et \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, on peut transformer f de manière à n'avoir que des cosinus ou des sinus :

$$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$f(x) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)$$

Ou encore

$$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$f(x) = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right)$$

A. Unicité de la solution sous condition initiale

Propriété (Cauchy-Lipschitz) :

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque : En général les conditions initiales sont de la forme

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_1) = y_1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $4y'' + \pi^2 y = 0$ dont la solution f vérifie $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$

1. Résolution de l'équation différentielle générale :

L'équation (E) peut se mettre sous la forme $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$.
Donc les solutions sont sous la forme :

$$f(x) = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

2. Utilisation de la première condition :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu)$$

Sachant que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $\lambda + \mu = 1$.

3. Utilisation de la seconde condition :

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\mu \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\mu\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}(-\lambda + \mu)$$

Sachant que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient $-\lambda + \mu = 0$

4. Résolution du système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

5. On en conclut que la solution est $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut demander ensuite de mettre f sous la forme $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}x\right)$ ou $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}x\right)$.