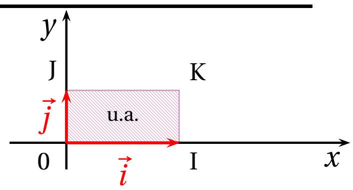
Chapitre 3

Intégrales et primitives

1. Intégrale et aire

1.1. Unité d'aire

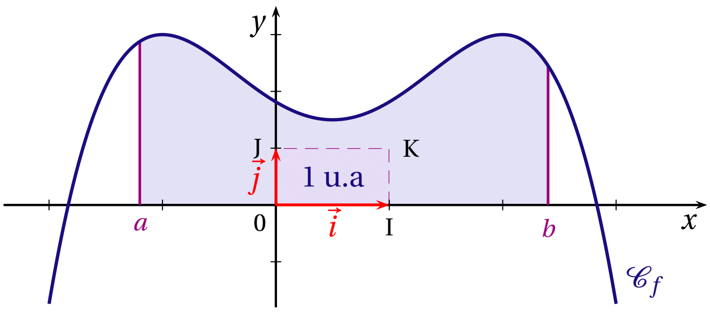
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0;1)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.



1.2. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 :

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



Remarque :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

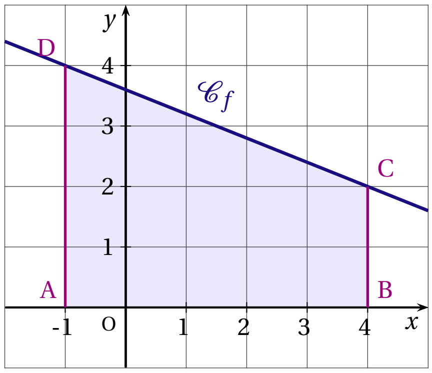
Exemple :

Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x+3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

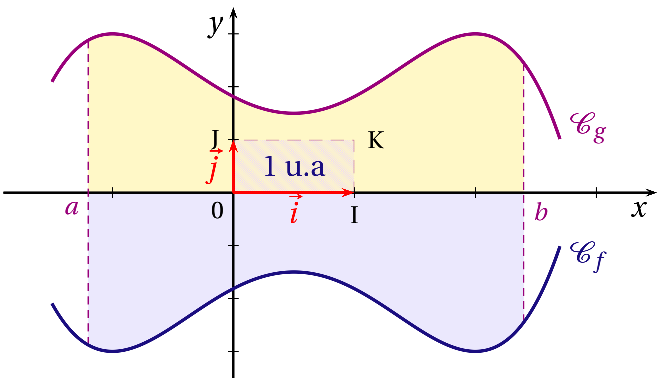
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times \mathrm{AB}}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



1.3. Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Définition 2 :

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

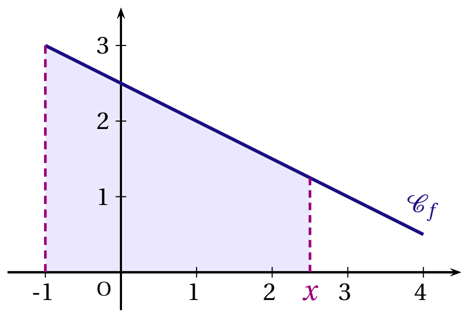
1.4. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc $\mathrm{F}(x) = \frac{(3+(-0,5x+2,5))\times(x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$. La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $\mathrm{F}'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



2. Primitives

2.1. Définition

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Exemple :

- $\mathrm{F} : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$
- $\mathrm{G} : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur$\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$
- Les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto x^2$, $\mathrm{G} : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $\mathrm{H} = x \mapsto x^2 + \mathrm{K}$, $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = \mathrm{H}'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque :

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.

- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 2 :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $\mathrm{F}+c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Si $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $\mathrm{F}_0(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $\mathrm{F}(1) = 0$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 2x = f(x)$ et $\mathrm{F}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2.2. Calculs de primitives

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitives de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors $k\mathrm{F}$ est une primitive de kf sur I.

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$\mathrm{F}(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	*prochain cours*	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$

Exemple : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^2$
   $F(x)=3\times\frac{1}{3}x^3+C=x^3+C$

2. $f(x)=x+\frac{3}{2}$
   $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+C$

3. $f(x)=(2x+1)(x-3)$
   Tout d'abord, développons $f(x)=(2x+1)(x-3)=2x^2-6x+x-3=2x^2-5x+3$. Ainsi, une primitive est donnée par $F(x)=2\times\frac{1}{3}x^3-5\times\frac{1}{2}x^2+3x+C=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
   $F(x)=-\frac{1}{x}+C$

5. $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{x^2}$
   $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}+C$

6. $f(x)=\frac{1}{x^5}$
   $F(x)=-\frac{1}{4x^4}+C$

7. $f(x)=x+2+\frac{1}{\sqrt{x}}$
   $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2\sqrt{x}+C$

8. $f(x)=\frac{6x^2-8x+2}{5}$
   $F(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x}{5}+C$

9. $f(x)=-\frac{6}{x^4}$
   $F(x)=-\frac{6}{3x^3}=-\frac{2}{x^3}+C$

2.2.2 Primitive des fonctions composées usuelles

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n>0$	$f=u'u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n>1$	$f=\frac{u'}{u^n}$	$F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$

Exemple : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=(2x+1)^2$
   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x)=2x+1$. On a $u'(x)=2$ donc
   $$u'(x)u(x)^2=2(2x+1)^2=2f(x)$$
   Donc, une primitive de f est donnée par
   $$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u^3}{3}=\frac{1}{6}(2x+1)^3$$

2. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
   f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x+1$. On a $u'(x)=1$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}=f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{3(1-3x)}$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. On a $u'(x) = 2x-1$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$. Donc,

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}$$

3. Intégrale d'une fonction continue

3.1. Définition

Définition 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Remarque :

- La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple :

- $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_1^3 = \left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right) = 33-1=32$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Proposition 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors :

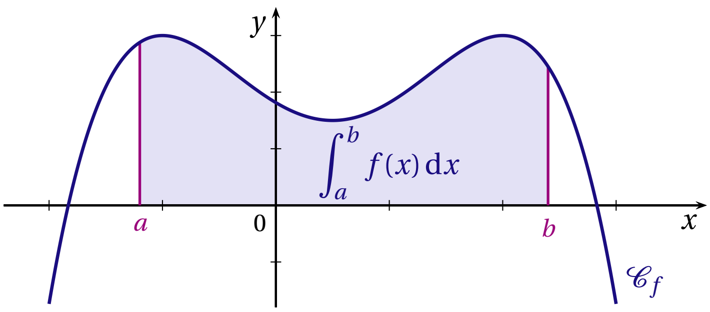
$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

3.2. Premières propriétés

Proposition 2 :

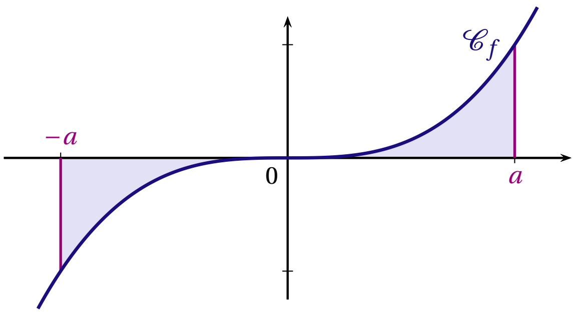
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors :

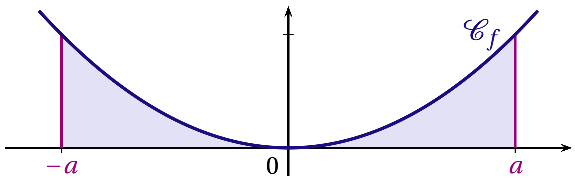
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Proposition 3 :

- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.





Exemple :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} t^2+t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

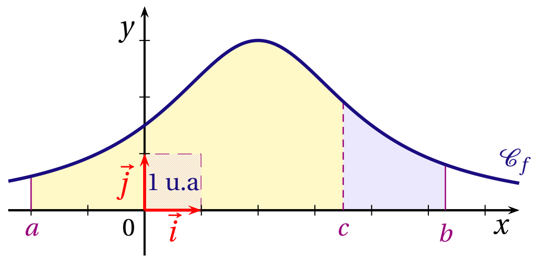
Proposition 4 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



Proposition 5 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel α, on a :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\ rmdx &= \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}\ rmdx + \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2}\ rmdx \\ &= \frac{1-a}{2}\int_{-1}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \frac{1+a}{2}\int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-a}{2}\Big[x\Big]_{-1}^{0} + \frac{1+a}{2}\Big[x\Big]_{0}^{1} \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1 \end{aligned}$$

4. Exercices

11.1 Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f_5(x) = (7x+1)^8$
5. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
6. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

11.2 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

1. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$

11.3 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

1. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

11.4 Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $\mathrm{F}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{F}(1) = 0$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ et $\mathrm{F}(1) = 2$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ et $\mathrm{F}(1) = -\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $\mathrm{F}(1) = 1$.

11.5 Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $\mathrm{G}(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$

Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

11.6 Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $G(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.

11.7 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^3}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(x^2+2x-3)^3$.
3. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.
4. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^2}$

11.8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $A=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+1\right)\mathrm{d}x$
2. $B=\displaystyle\int_{2}^{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x$

11.9 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1=\displaystyle\int_{-2}^{3}(x^3+x-2)\mathrm{d}x$
2. $I_2=\displaystyle\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$

11.10 Montrer que la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}$$

En déduire la valeur de

$$\int_2^3\frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

11.11 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=12x^2(x^3+1)^3$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x)=(x^3+1)^4$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^1(x^3+1)^4\,\mathrm{d}x$$