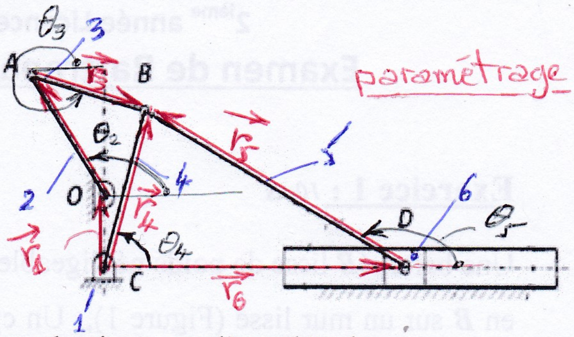
Exercice Supplémentaire



On considère le mécanisme à coulisseau de la figure ci-contre. Calculer sa mobilité et son nombre cyclomatique.

Données : $\theta_2, \omega_2 = cte, r_2, r_3, r_4, r_5$.

- Ecrire les équations de fermeture de boucle correspondantes (algébriques).
- Résoudre le problème de position.
- Ecrire les équations de fermeture de boucle pour les problèmes de vitesse et d'accélération.

• Degré de Liberté et nombre cyclomatique.

$W = 3 \times n - 2b - h = 3(6-1) - 2 \cdot 7$

$W = 1$ ddL

($\theta_2 \rightarrow$ paramètre d'entrée)

$\gamma = L - N + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$ cycles.

Cycle ① $\rightarrow$ OABCO

Cycle ② $\rightarrow$ CBDC

• Eqns de fermeture de boucle :

- Cycle ① $\rightarrow \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_4 + \vec{r}_1 = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} + r_1 e^{i\theta_1} = \vec{0}$

$\theta_1 = \pi/2\ (90°) \Rightarrow r_1 e^{i\theta_1} = i \cdot r_1$

$$\begin{cases} r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_4 \cos\theta_4 & (1) \\ r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 + r_1 = r_4 \sin\theta_4 & (2) \end{cases}$$

?? θ_3, θ_4

- Cycle ② $\rightarrow \vec{r}_4 - \vec{r}_5 - \vec{r}_6 = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow r_4 e^{i\theta_4} - r_5 e^{i\theta_5} - r_6 e^{i\theta_6} = \vec{0}$

$\theta_6 = 0 \Rightarrow r_6 e^{i\theta_6} = r_6$

$$\begin{cases} r_4 \cos\theta_4 - r_5 \cos\theta_5 = r_6 & (3) \\ r_4 \sin\theta_4 - r_5 \sin\theta_5 = 0 & (4) \end{cases}$$

?? θ_5, r_6

• Résolution.

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow$

$r_4^2 = r_2^2 \cos^2\theta_2 + r_3^2 \cos^2\theta_3 + 2 r_2 r_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3$
$+ r_2^2 \sin^2\theta_2 + r_3^2 \sin^2\theta_3 + 2 r_2 r_3 \sin\theta_2 \sin\theta_3$
$+ r_1^2 + 2 r_1 r_2 \sin\theta_2 + 2 r_1 r_3 \sin\theta_3$

On trouve une éqn de la forme :

$a \cdot \cos\theta_3 + b \cdot \sin\theta_3 = c \quad (*)$

avec

$a = 2 r_2 r_3 \cos\theta_2$

$b = 2 r_2 r_3 \sin\theta_2 + 2 r_1 r_3$

$c = r_4^2 - r_2^2 - r_3^2 - r_1^2 - 2 r_1 r_2 \sin\theta_2$

Une éqn de la forme (*) admet comme solution :

$$\theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}\right)$$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow tg\theta_4 = \frac{r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 + r_1}{r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3}$

$$\Rightarrow \theta_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 + r_1}{r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3}\right)$$

(3) et $(4) \rightarrow \begin{cases} r_4 \cos\theta_4 - r_6 = r_5 \cos\theta_5 & (3') \\ r_4 \sin\theta_4 = r_5 \sin\theta_5 & (4') \end{cases}$

$(3')^2 + (4')^2 \Rightarrow A \cdot r_6^2 + B r_6 + C = 0$.

avec $A = 1$; $B = -2 r_4 \cos\theta_4$

$C = r_4^2 - r_5^2$

$$\Rightarrow r_{6_{1,2}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

On choisi la valeur $r_6 > 0$

$\frac{(4')}{(3')} \Rightarrow tg\theta_5 = \frac{r_4 \sin\theta_4}{r_4 \cos\theta_4 - r_6}$

$$\Rightarrow \theta_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_4 \sin\theta_4}{r_4 \cos\theta_4 - r_6}\right)$$

Exercice Supplémentaire

Vitesse : Dérivées 1ères par rapport au temps des équs 1, 2, 3 et 4 ($\omega_2 = cte$, donnée).

$$\begin{cases} r_2\omega_2\sin\theta_2 + r_3\omega_3\sin\theta_3 = r_4\omega_4\sin\theta_4 & (5)\\ r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 = r_4\omega_4\cos\theta_4 & (6)\end{cases}$$

inconnues : ω_3, ω_4 ($\dot\theta_3$ et $\dot\theta_4$)

(5) et (6) $\rightarrow$
$$\begin{cases} r_3\omega_3\sin\theta_3 - r_4\omega_4\sin\theta_4 = -r_2\omega_2\sin\theta_2\\ r_3\omega_3\cos\theta_3 - r_4\omega_4\cos\theta_4 = -r_2\omega_2\cos\theta_2\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} -r_2\omega_2\sin\theta_2 & -r_4\sin\theta_4\\ -r_2\omega_2\cos\theta_2 & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & -r_4\sin\theta_4\\ r_3\cos\theta_3 & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}} = \frac{r_2\sin(\theta_2-\theta_4)}{r_3\sin(\theta_3+\theta_4)}\,\omega_2$$

$$\rightarrow \quad \omega_4 = \frac{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & -r_2\omega_2\sin\theta_2\\ r_3\cos\theta_3 & -r_2\omega_2\cos\theta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & -r_4\sin\theta_4\\ r_3\cos\theta_3 & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}} = \frac{r_2\sin(\theta_2-\theta_3)}{r_4\sin(\theta_3+\theta_4)}\,\omega_2$$

$$\begin{cases} -r_4\omega_4\sin\theta_4 + r_5\omega_5\sin\theta_5 = \dot r_6 & (7)\\ r_4\omega_4\cos\theta_4 - r_5\omega_5\cos\theta_5 = 0 & (8)\end{cases}$$

inconnues ω_5 et $\dot r_6$ ($\dot\theta_5$)

(8) $\rightarrow$ $\omega_5 = \dfrac{r_4\omega_4\cos\theta_4}{r_5\cos\theta_5}$; $\dot r_6 = r_5\omega_5 S\theta_5 - r_4\omega_4 S\theta_4$

Accélérations : Dérivées seconde des équs 1, 2, 3 et 4

$$\begin{cases} r_3\alpha_3\sin\theta_3 - r_4\alpha_4\sin\theta_4 = \underbrace{-r_2\omega_2^2\cos\theta_2 - r_3\omega_3^2\cos\theta_3 + r_4\omega_4^2\cos\theta_4}_{f} & (9)\\ r_3\alpha_3\cos\theta_3 - r_4\alpha_4\cos\theta_4 = \underbrace{+r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3 - r_4\omega_4^2\sin\theta_4}_{g} & (10)\end{cases}$$

inconnues α_3 et α_4 ($\ddot\theta_3$ et $\ddot\theta_4$)

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} f & -r_4\sin\theta_4\\ g & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & -r_4\sin\theta_4\\ r_3\cos\theta_3 & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}} = \dots \; ; \quad \alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & f\\ r_3\cos\theta_3 & g\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3\sin\theta_3 & -r_4\sin\theta_4\\ r_3\cos\theta_3 & -r_4\cos\theta_4\end{vmatrix}} = \dots$$

$$\begin{cases} -r_4\alpha_4\sin\theta_4 - r_4\omega_4^2\cos\theta_4 + r_5\alpha_5\sin\theta_5 + r_5\omega_5^2\cos\theta_5 = \ddot r_6 & (11)\\ r_4\alpha_4\cos\theta_4 - r_4\omega_4^2\sin\theta_4 - r_5\alpha_5\cos\theta_5 + r_5\omega_5^2\sin\theta_5 = 0 & (12)\end{cases}$$

?? $\alpha_5, \ddot r_6$

(12) $\Rightarrow$ $\alpha_5 = \dfrac{r_4\alpha_4\cos\theta_4 - r_4\omega_4^2\sin\theta_4 + r_5\omega_5^2\sin\theta_5}{r_5\cos\theta_5}$

(11) $\Rightarrow$ $\ddot r_6 = r_5\alpha_5\sin\theta_5 + r_5\omega_5^2\cos\theta_5 - r_4\alpha_4\sin\theta_4 - r_4\omega_4^2\cos\theta_4$