Université Larbi Ben M'hidi
2ème année Mathématiques
2020-2021

Probabilités

1 Analyse combinatoire

1.1 Principe fondamental de dénombrement

Théorème 1.1 Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe mn résultats possibles pour les deux expériences prises ensemble…..

Démonstration :

On explore l'arbre des possibles. On peut énumérer les résultats possibles ainsi :

$$(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ \ldots,\ (1,n)$$
$$(2,\ 1)\ ,\ (2,2)\ ,\ \ldots,\ (2,\ n)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(m,\ 1)\ ,\ (m\ ,\ 2)\ ,\ \ldots\ ,\ (m\ ,\ n)$$

Théorème 1.2 Supposons que r expériences doivent être réalisées. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de n_1 résultats et si pour chacun d'entre eux, il y a n_2 résultats possibles pour l'expérience 2, et ainsi de suite, alors il y aura $n_1 n_2 \ldots n_r$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemples

1. Le comité de planification d'un collège est composé de 3 étudiants de première année, 4 étudiants de deuxième année, 5 étudiants de première année, 2 étudiants de quatrième année. Un sous-comité composé de 4 étudiants, comportant un représentant de chaque année doit être choisi. Combien peut-on former de tels sous-comités ?

Réponse : $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$.

2. Combien de plaques minéralogiques de 7 caractères peut-on former si les 3 premiers sont des lettres et les 4 derniers des chiffres ?

   Réponse : $26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$.
3. Même question en supposant que les lettres ou les chiffres ne se répètent pas ?

   Réponse : $26 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78\,624\,000$
4. Soit E un ensemble à n éléments. Combien y-a-t'il d'applications de E dans $\{0, 1\}$?

   Réponse : 2^n.

1.2 Permutations

De combien de façons peut-on ranger les trois lettres a, b, c ?
Par énumération directe, on en trouve 6 : abc, acb, bac, bca, cab et cba.
On aurait pu obtenir le même résultat avec le principe fondamental.

Définition 1.3 *Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E une suite ordonnée de n éléments distincts de E*

Théorème 1.4 *Le nombre de permutations de n objets est*

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$$

Permutations d'objets partiellement indiscernables.
Exemple Combien de mots peut-on écrire avec les six lettres : $PEPPER$?
Si les 3 P et les 2 E sont distincts les uns des autres, on peut écrire 6! permutations.
Quelle est la différence entre $P_1P_2E_1P_3E_2R$ et $P_1P_3E_2P_2E_1R$?
Si les 3 P sont indiscernables et les 2 E sont indiscernables il y a $\dfrac{6!}{3!2!} = 60$ possibles.

1.3 Arrangements

Définition 1.5 *Soit E un ensemble à n éléments. Soit p tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle p-arrangement de E une suite de p éléments distincts de E.*

Théorème 1.6 *Le nombre de p-arrangements de E est :*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration : Utiliser le principe de dénombrement. $\square$

1.4 Combinaisons

Définition 1.7 *Soit n et p entiers avec $0 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle p-combinaison un sous-ensemble de E contenant p éléments.*

Théorème 1.8 *Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble E à n éléments est :*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration
- Si $p > 0$, les p-arrangements de E peuvent être obtenus en permutant les p éléments qui constituent chacune de p-combinaisons de E. Ceci peut se faire de p ! façons, donc $A_n^p = C_n^p \times p!$.
- Si $p = 0$, il y a une seule partie de E à 0 éléments : l'ensemble vide $\emptyset$. Donc $A_n^0 = C_n^0$. $\square$

Proposition 1.9 *On retrouve la formule du binôme de Newton :*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n b^n$$

Démonstration
En effet, on a : $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Un terme du développement s'obtient en choisissant a dans p facteurs et b dans les $n-p$ autres. $\square$

Proposition 1.10 *Divers résultats :*

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
3. $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \cdots + C_{p-1}^{p-1}$
4. $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$
5. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n$

Démonstration
Pour 1), 2) et 4) on utilise **??**.
3) se déduit de 2) par applications répétées
5) est la formule du binôme pour $(1+1)^n$. $\square$
Remarque : 2) sert à construire le triangle de Pascal.
Exercices

1. Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères
   (a) si les 2 premiers sont des lettres et les 5 autres des chiffres ?
   (b) si, en outre, aucun chiffre ni aucune lettre n'est répété ?

2. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres de PINTE ? avec les lettres de PROPOSE ?
3. De combien de manières peut-on placer 3 romans, 2 livres de maths et 1 de chimie si :
   (a) aucune restriction n'est mise
   (b) les livres de maths doivent être rangés ensemble et les romans aussi
   (c) seuls les romans doivent être rangés ensemble

2 Notion de probabilité

2.1 Définitions et premières propriétés

Étant donné une épreuve E ou expérience aléatoire, les divers résultats possibles sont les événements élémentaires. Leur ensemble constitue l'univers ou ensemble fondamental associé à E.
Si l'expérience consiste à jeter un dé, l'ensemble fondamental est : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Si l'expérience consiste à prédire le sexe d'un enfant, l'univers est $\{g, f\}$.
Si l'expérience est l'ordre d'arrivée de 7 chevaux dans une course, alors l'univers est formé des 7! ordres d'arrivée possibles.
En probabilité, l'ensemble fondamental s'appelle en général Ω.
Soit Ω un ensemble.

Définition 2.1 *Étant donné un ensemble Ω, on appelle algèbre d'événements (ou tribu) toute famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω telle que :*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow C_\Omega A \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}, i \in I\!N \Rightarrow \cup_{i \in I\!N} A_i \in \mathcal{A}$

Remarques

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i` \in \mathcal{A}$ car $\cap A_i = C_\Omega(\cup(C_\Omega A_i))$.

Définitions 2.2 *Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des événements.*
Ω est l'événement certain. $\emptyset$ est l'événement impossible.
$\overline{A} = C_\Omega A$ est l'événement contraire de A.
A et B sont des événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Un événement réduit à un élément est un événement élémentaire ou éventualité ou cas possible.
$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable d'univers Ω.

Exemples

1. Algèbre d'événements grossière d'univers Ω : $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$
2. Algèbre de Bernouilli (ou alternative) $\mathcal{A} = \{\Omega, A, \overline{A}, \emptyset\}$.
3. Algèbre d'événements la plus fine : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
4. Algèbre d'événements engendrée par une partition de Ω (ou alternative généralisée). Une partition n'est pas une algèbre : on n'a pas le troisième axiome. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les réunions d'éléments de la partition et $\emptyset$.

Définition 2.3 *On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. *Si* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I\!N$, *2 à 2 distincts, alors* $P\big(\cup_{i \in I\!N} A_i\big) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} P(A_i)$.

Théorème 2.4 *La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.*

Démonstration : $A \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
$A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. $\square$

Théorème 2.5 *La probabilité de l'événement impossible est nulle.*

Démonstration : $C_\Omega \emptyset = \Omega \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. $\square$

Théorème 2.6 *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration : On a $B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \emptyset$.
D'après l'axiome 2 $P(B) = P(A) + P(B-A)$ d'où $P(B-A) = P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Théorème 2.7 *Étant donnés un nombre fini d'événements incompatibles 2 à 2, la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.*

Démonstration : Soient $A_1, \cdots, A_n$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Pour $n = 2$, c'est l'axiome 2. Pour $n > 2$, raisonnement par récurrence. $\square$

Corollaire 2.8 *Si* $\{A_1, \cdots, A_n\}$ *est une partition de* Ω*, on a :* $\sum P(A_i) = 1$

Démonstration : On a $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$. $\square$

Théorème 2.9 (Probabilités totales) *Soient* A *et* B *dans* $\mathcal{A}$*. On a :* $P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration : $A \cup B = A \cup \big(\overline{A} \cap B\big)$ et $B = (A \cap B) \cup \big(\overline{A} \cap B\big)$.
A et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints : $P(A \cup B) = P(A) + P\big(\overline{A} \cap B\big)$
$(A \cap B)$ et $\big(\overline{A} \cap B\big)$ sont disjoints : $P(B) = P(A \cap B) + P\big(\overline{A} \cap B\big)$
D'où le résultat. $\square$

Définition 2.10 *Soit* $\Omega = \{e_1, \cdots, e_n\}$*. Si* $P(e_1) = \cdots = P(e_n)$ *on dit que les événements élémentaires* $e_1, \cdots, e_n$ *sont équiprobables ou que la loi est uniforme.*

Proposition 2.11 *Soit $\Omega = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Si A est la réunion de m événements élémentaires équiprobables , appelés cas favorables, on a :*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

On dit que $P(A)$ est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Démonstration :
$P(\Omega) = P(e_1 \cup \cdots \cup e_n) = P(e_1) + \cdots + P(e_n) = p + \cdots + p = 1$ donc $p = \frac{1}{n}$.
De même $P(A) = mp$ et $P(A) = \frac{m}{n}$. $\square$

2.2 Exemples

1. Cas fini

   (a) Trois boules sont tirées au hasard d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 boules noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et les deux autres noires ?
   Cas possibles : $C_{11}^3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$.
   Cas favorables : $C_6^1 C_5^2 = 6 \times \frac{5 \times 4}{2}$
   Probabilité : $\frac{C_6^1 C_5^2}{C_{11}^3} = \frac{4}{13}$

   (b) Une urne contient n boules dont une spéciale. Si on tire k boules ($k \leq n$) l'une après l'autre (tirage sans remise) quelle est la probabilité que la boule spéciale soit tirée ?
   Raisonnement combinatoire :

   $$\frac{C_1^1 C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$$

   Raisonnement probabiliste :
   Soit A_i l'événement : la boule spéciale est tirée en $i$ème position. Comme chaque boule a la même probabilité d'être tirée en $i$ème position, on a $P(A_i) = \frac{1}{n}$.
   Les événements A_i sont deux à deux incompatibles, donc la probabilité que la boule spéciale soit tirée est

   $$\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}$$

2. Probabilité discrète.
   Soit $\Omega = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs de somme s. On pose $p_n = \dfrac{a_n}{s}$. On a donc $\sum p_n = 1$.
   On pose $P(e_n) = p_n$.
   Si $A = \{e_{n_1}, \cdots, e_{n_k}, \cdots\} \subset \Omega$, la série $\displaystyle\sum_k p_{n_k}$ converge. On définit : $P(A) = \displaystyle\sum_k p_{n_k}$.
   On vérifie que P est une probabilité :
   (a) $P(\Omega) = \sum p_n = 1$.
   (b) Si $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = \displaystyle\sum_{e_n \in A \cup B} P(e_n) = \sum_{e_n \in A} P(e_n) + \sum_{e_n \in B} P(e_n) = P(A) + P(B)$
   (c) On note $A_i = \{e_{i,n_k}\}$ et $p_{i,n_k} = P(\{e_{i,n_k}\})$. On a : $P(A_i) = \sum_k p_{i,n_k}$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = P(\cup_{i=1}^{k})$.
   Lorsque $k \to \infty$ on a deux suites croissantes majorées par 1 qui ont la même limite.
3. Probabilité continue
   Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, positive ou nulle telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
   On pose $P(]a, b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On le note aussi $P(a < x \leq b)$.
   On vérifie que P est une probabilité.

2.3 Probabilités conditionnelles. Formule de Bayes

Théorème 2.12 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle. L'application P_A définie par :*

$$P_A : \mathcal{A} \to [0,1] : B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Démonstration
On a $A \cap B) \subset A$ donc d'après **??** : $P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P_A(B) \in [0,1]$.
On vérifie les axiomes :

1. $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

2. Soient B et C avec $B \cap C = \emptyset$. Alors :
$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C)))}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)}$$

3. $P_A(\cup_{i=0}^{\infty} B_i)) = \dfrac{P(A \cap (\cup_{i=0}^{\infty} B_i))}{P(A)} = \dfrac{P(\cup_{i=0}^{\infty}(A \cap B_i))}{P(A)}$
Or $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = \emptyset$ d'où :
$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P(A \cap B_i}{P(A)} = \sum_{i=0}^{\infty} P_A(B_i) \ \square$$

Définition 2.13 *$P_A(B)$ est la probabilité conditionnelle de B quand A. On la note aussi $P(B/A)$, probabilité de B sachant A.*

Théorème 2.14 *Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, on a :*
$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Démonstration cf le théorème précédent. $\square$

Définition 2.15 *Deux événements d'un espace probabilisé sont indépendants si on a :*
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque : Si A et B sont indépendants, on a : $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$.

Théorème 2.16 (Formule de Bayes)
$$P(B/A) = \frac{P(B).P(A/B)}{P(B).P(A/B) + P(\overline{B}).P(A/\overline{B})}$$

Démonstration
On a $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
D'autre part : $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset$
D'après la définition d'une probabilité : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
Donc : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B}{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$
Il ne reste plus qu'à appliquer la formule des probabilités composées pour obtenir la formule de Bayes. $\square$
Nous avons considéré une partition $\{B, \overline{B}\}$ de Ω. On peut généraliser :

Théorème 2.17 (Formule de Bayes) *Soit $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ une partition de Ω. On a :*
$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + \cdots + P(B_n).P(A/B_n)}$$

Démonstration Comme la précédente.
Cette formule s'appelle aussi formule de probabilité des causes. On dit que les événements $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont des causes incompatibles pouvant provoquer l'événement A.
Exemples :

1. Un étudiant répond à une question à choix multiple. Soit p la probabilité qu'il connaisse la réponse. Il y a m réponses possibles et on admet qu'une réponse au hasard est correcte avec une probabilité $1/m$. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaissait la réponse s'il a répondu correctement ?

   Réponse Soit A l'événement " l'étudiant répond correctement à la question" et B l'événement "il connaît la réponse". Alors :

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B}P(\overline{B})} \\ &= \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m-1)p} \end{aligned}$$

   Si $p = 1/2$ et $m = 5$, la probabilité cherchée est : $5/6$.

2. La probabilité d'obtenir "face" pour la pièce A est $1/4$ et pour la pièce B, la probabilité est $3/4$. On choisit une des deux pièces et on la jette deux fois. Si on obtient deux "face", quelle est la probabilité que la pièce B ait été utilisée ?

   Réponse Soit B l'événement "on a choisit la pièce B". Soit F l'événement "on a tiré deux fois face".
   On a $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(F/B) = \frac{9}{16}$ et $P(F/\overline{B} = \frac{1}{16}$.

$$P(B/F) = \frac{P(B)P(F/B}{P(B)P(F/B + P(\overline{B})P(F/\overline{B}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{9}{16}}{\frac{1}{2}\frac{9}{16} + \frac{1}{2}\frac{1}{16}} = \frac{9}{10}$$

3. Une boite contient des lampes de 3 types distincts. Ces lampes donnent plus de 100 heures de fonctionnement avec la probabilité pour le type 1 de $0,7$, pour le type 2 de $0,4$ et pour le type 3 de de $0,3$.

   On suppose la répartition suivante :
   - 20 % des lampes sont de type 1
   - 30 % des lampes sont de type 2
   - 50 % des lampes sont de type 3

Quelle est la probabilité qu'une lampe choisie au hasard fonctionne plus de 100 heures ?
Si la lampe fonctionne plus de 100 heures quelle est la probabilité qu'elle soit de type j pour $j = 1, 2, 3$?
Réponse Soit A l'événement "la lampe choisie fonctionne plus de 100 heures" et soit F_j l'événement "elle est de type j".

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/F_1)P(F_1) + P(A/F_2)P(F_2) + P(A/F_3)P(F_3) \\ &= 0,7 \times 0,2 + 0,4 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5 \\ &= 0,41 \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle :

$$P(F_j/A) = \frac{P(A \cap F_j)}{P(A)} = \frac{P(A/F_j)P(F_j)}{P(A)}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(F_1/A) &= \frac{0,7 \times 0,2}{0,41} = \frac{14}{41} \\ P(F_2/A) &= \frac{0,4 \times 0,3}{0,41} = \frac{12}{41} \\ P(F_3/A) &= \frac{0,3 \times 0,5}{0,41} = \frac{15}{41} \end{aligned}$$

3 Variables aléatoires. Lois usuelles

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire sur cet espace une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on a $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.*

Remarque : $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$ est l'image réciproque de I par X.

Définition 3.2 *Une v.a. X est discrète finie si $X(\Omega)$ est fini. Elle est discrète infinie si $X(\Omega)$ est infini dénombrable et admet un plus petit élément. Elle est continue si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.*

Notation :
- $X^{-1}(]a, b]) = (a < X \leq b)$
- $X^{-1}(-\infty, a]) = (X \leq a)$
- $X^{-1}(a, +\infty]) = (X > a)$
- $X^{-1}(\{a\}) = (X = a)$

Exemples :

1. Variable aléatoire constante (ou certaine) si $X(\Omega) = \{a\}$. On la note $X = a$.
2. On jette trois pièces équilibrées. Soit Y le nombre de piles obtenues.

   Univers : Ω est l'ensemble des triplets $(P, P, P), (P, P, F), \cdots, (F, F, F)$. Ω a $2^3 = 8$ éléments.

   L'algèbre est l'ensemble des parties de Ω, la plus fine.

   $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire. $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

   $P(Y = 0) = \frac{1}{8}$, $P(Y = 1) = \frac{3}{8}$, $P(Y = 2) = \frac{3}{8}$, $P(Y = 3) = \frac{1}{8}$.
3. Un urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire trois boules sans remise. Quelle est la probabilité qu'au moins une des boules tirées porte un numéro ≥ 17 ?

   Ω est l'ensemble des tirages de trois boules parmi 20. Ω a $N = C_{20}^3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{2 \times 3} = 1140$ éléments.

   Soit X le plus grand numéro tiré. X est une variable aléatoire. X peut prendre les valeurs $3, 4, \cdots, 19, 20$

   $P(X = 20) = \frac{C_{19}^2}{N} = \frac{3}{20}$

   $P(X = 19) = \frac{C_{18}^2}{N} = \frac{51}{380}$

   $P(X = 18) = \frac{C_{17}^2}{N} = \frac{34}{285}$

$P(X = 17) = \dfrac{C_{16}^2}{N} = \dfrac{2}{19}$
$P(X \geq 17) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \dfrac{29}{57} = 0,508$

Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application $\Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. C'est le cas le plus répandu.

Définition 3.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$. La distribution de X est l'ensemble $\{P(X) = x)\}$, appelé aussi loi de probabilité.*

Théorème 3.4 *Soit F la fonction de répartition d'une v.a. X.*

1. *La fonction F est croissante.*
2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ *et* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. *F est continue à droite en tout point. '*

Démonstration :

1. $x \leq y \Rightarrow (X \leq x) \subset (X \leq y) \Rightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
2. F est croissante majorée par 1 et minorée par 0. Donc $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ existent. On admettra que ces limites sont 1 et 0.
3. F est croissante : $F(x+0)$ et $F(x-0)$ existent pour tout x. On admettra que $F(x+0) = F(x)$. $\square$

Exemple :
On lance un dé équilibré i.e. chaque face a une probabilité 1/6 de sortir. . L'univers est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On suppose que l'on gagne 1 Euro si le résultat est pair, 2 Euros si le résultat est 3 ou 5 et on perd 3 Euros si le résultat est 1. On définit ainsi une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui prend les valeurs $-3, 1, 2$. Elle est discrète finie.
Loi de probabilité de X :

x	$p = P(X = x)$
-3	$1/6$
1	$1/2$
2	$1/3$

Fonction de répartition de X :

x	$F(x) = P(X \leq x)$
$]-\infty, -3[$	0
$[-3, 1[$	$1/6$
$[1, 2[$	$2/3$
$[2, +\infty[$	1

Proposition 3.5

1. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
2. $P(X = x) = F(x) - F(x-0)$ *et si* F *est continue en* x, $P(X = x) = 0$.

Démonstration :

1. On applique l'additivité (probabilités totales) à la réunion d'événements disjoints $]-\infty, a] \cup]a, b] =]-\infty, b]$ et on obtient : $F(a) + P(a < X \leq b) = F(b)$
2. C'est une conséquence du 3) du théorème **??** . $\square$

Définition 3.6 *Deux v.a.* X *et* Y *sont dites indépendantes si pour tous* x *et* y *réels on a*

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

c'est à dire si $(Y \leq y)$ *et* $(X \leq x)$ *sont des événements indépendants.*

3.2 Variables aléatoires discrètes

Les valeurs prises par la variable aléatoire X constitue un ensemble fini ou dénombrable. On les note x_j pour $j \in J \subset \mathbb{N}$. Pour $j \in J$, on pose $P(X = x_j) = p_j$.
Comme les événements $(X = x_j)$ sont disjoints, on a $\sum_{j \in J} p_j = 1$

Proposition 3.7 *La fonction de répartition est une fonction constante par morceaux. Les discontinuités sont situées aux points* x_j, $j \in J$ *avec un saut croissant de* p_j

Démonstration Évident.

Définition 3.8 *On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de* X*la valeur :*

$$E(X) = m = \sum_{j \in J} x_j p_j$$

si cette quantité existe (convergence).
Si $E(X) = 0$, X *est dite centrée.*

Définition 3.9 *La variance de* X *est*

$$v(X) = E((X - E(X))^2)$$

(si la somme existe).
L' écart-type de X *est* $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{(v(X)}$.

Définition 3.10 *Pour $k \in I\!N$, le moment d'ordre k de X est :*

$$M_k(X) = \sum_{j \in J} x_j^k p_j$$

quand cette quantité existe. Le moment centré d'ordre k est : $M_k(X - E(x))$.

Remarque : $M_0(X) = 1$, $M_1(X) = m = E(x)$ et $M_2(X) = m^2 + \sigma^2$.

Définition 3.11 *Si J est fini, à N éléments, la variable aléatoire X suit la loi uniforme si*

$$\forall j \in J,\ P(x_j) = \frac{1}{n}$$

Proposition 3.12 *Si X suit la loi uniforme on a :*

$$E(X) = m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \quad \text{et } \sigma^2 = \frac{(x_1 - m)^2 + \cdots + (x_N - m)^2}{N}$$

Démonstration On utilise la définition de l'espérance et de l'écart-type et aussi $p_j = P(X = x_j) = \dfrac{1}{N}$. □

3.3 Exemples de lois discrètes

Définition 3.13 (Loi de Bernouilli) *Une v.a. X est dite de Bernouilli s'il elle est à valeur dans $\{0,1\}$ et s'il existe $p \in [0,1]$ tel que :*

$$\begin{array}{rcl} p(0) = & P(X=0) & = & 1-p \\ p(1) = & P(X=1) & = & p \end{array}$$

La loi de Bernouilli revient à un jeu de Pile ou Face.

Définition 3.14 (Loi binomiale) *On exécute n épreuves indépendantes, chacune ayant une probabilité p de succès. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire binomiale de paramètres (n,p).*

Proposition 3.15 *La loi de probabilité d'une v.a. binomiale de paramètres (n,p) est donnée par :*

$$P(X = i) = p(i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

Démonstration On peut considérer chaque résultat comme un n-uplet de succès et échecs (ou de 1 et 0).
L'événement $(X = k)$ est la réunion disjointe des événements élémentaires : les n-uplets où apparaît k fois le 1 et $n-k$ fois le 0. Le nombre de ces n-uplets est C_n^k. La probabilité de chacun d'entre eux est $p^k(1-p)^{n-k}$. D'où le résultat. □
Exemples :

1. On jette 5 pièces équilibrées. Les résultats sont supposés indépendants. Soit X la v.a. qui compte le nombre de piles obtenus.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 &= \frac{1}{32}\\
P(X=1) &= C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= \frac{5}{32}\\
P(X=2) &= C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{10}{32}\\
P(X=3) &= C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{10}{32}\\
P(X=4) &= C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 &= \frac{5}{32}\\
P(X=5) &= C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 &= \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

2. "Roue de la fortune ." Un joueur mise sur un numéro entre 1 et 6. On jette 3 dés (ou on fait tourner la roue). Si le nombre apparaît i fois, le joueur gagne i unités. Si le nombre n'apparaît pas, le joueur perd une unité. Calculer l'espérance de gain.
Réponse : Soit X le gain du joueur lors d'une partie.

$$\begin{aligned}
P(X=-1) &= C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{125}{216}\\
P(X=1) &= C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{75}{216}\\
P(X=2) &= C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 &= \frac{15}{216}\\
P(X=3) &= C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 &= \frac{1}{216}
\end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{-125+75+15\times 2+1\times 3}{216} = \frac{-17}{216}$$

Ainsi sur un nombre infini de parties, le joueur perd 17 unités par groupe de 216 parties.

Proposition 3.16 *Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p). L'espérance de X est :*

$$E(X) = np$$

L'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

On remarque : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
On obtient :

$$E(X) = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np$$

□

Proposition 3.17 *Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres (n,p) avec $0 < p < 1$. Lorsque k croit de 0 à n, $P(X=k)$ croit puis décroit, le pic étant atteint lorsque k est égal à la partie entière de $(n+1)p$.*

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{P(X=k)}{P(X=k-1} &= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p^{n-k}}{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p^{n-k}} \\ &= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} \end{aligned}$$

On en tire :

$$P(X=k) \geq P(X=k-1) \Leftrightarrow p(n-k+1) \geq k(1-p \Leftrightarrow k \leq (n+1)p$$

□

Proposition 3.18 *Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres (n,p). La fonction de répartition est :*

$$P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration On utilise la formule établie dans la démonstration précédente :

$$P(X=k+1) = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P(X=k)$$

□

Définition 3.19 (Loi de Poisson) *Si la v.a. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si*

$$P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Proposition 3.20 *Soit X une variable aléatoire poissonnienne de paramètre λ. L'espérance de X est :*

$$E(X) = \lambda$$

L'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
E(X) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} i \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Pour la variance :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{i\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(j+1)\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda\left(e^{-\lambda} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{j\lambda^j}{j!} + e^{-\lambda} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^j}{j!}\right) \\
&= \lambda(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Puis la variance :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Box

Proposition 3.21 (Approximation poissonnienne d'une loi binomiale) *Soit X une v.a. binomiale de paramètres n, p. Si n est grand et p petit, la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ est une bonne approximation de X.*

Démonstration approximative

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \frac{n!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^i}
\end{aligned}$$

Pour n grand et p petit :

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \approx 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

Donc pour n grand et p petit :

$$P(X=i) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

□

Exemples :

1. On suppose que le nombre d'erreurs par page dans un livre suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1/2$. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur la page 41 ?
   Réponse : Soit X le nombre d'erreurs sur la page 41.
   $$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{1/2} \approx 0,393$$
2. On admet que la probabilité de défaut pour un objet fabriqué à la machine est $0,1$. Trouver la probabilité qu'un lot de 10 objets comprenne au plus un élément défectueux.
   Réponse : Soit X le nombre d'objet défectueux dans un lot.
   Si on modélise par la loi binomiale :
   $$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = C_{10}^0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^9 \approx 0,7361$$
   Si on modélise par la loi de Poisson : $p = \dfrac{1}{10}$ et $n = 10$. Donc $\lambda = 1$.
   $$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} \approx 0,7359$$
3. Le nombre de particules α émises par un gramme de matière radioactive en une seconde est en moyenne $3,2$. Donner une bonne approximation pour la probabilité qu'au plus deux particules α soient enregistrées.
   Réponse : Le gramme de matière radioactive est composé de n atomes (n grand). chacun peut se décomposer avec une probabilité $p = \dfrac{3,2}{n}$ pendant une seconde.
   La v.a. de Poisson de paramètre $\lambda = n.p = 3,2$ donne une bonne approximation :
   $$P(X \leq 2) = \left(\lambda^0 + \lambda^1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right)e^{-3,2} \approx 0,3799$$

Définition 3.22 (Loi géométrique) *Si X est à valeur dans $I\!N^*$, on dit que X suit la loi géométrique de paramètre $a \in]0,1[$ si*

$$P(X = n) = a^{n-1}(1-a)$$

Proposition 3.23 *Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $a \in]0,1[$. L'espérance de X est :*

$$E(X) = \frac{1}{1-a}$$

L'écart-type est :

$$\sigma = \frac{\sqrt{a}}{1-a}$$

4 Variables aléatoires continues

On suppose que la fonction de répartition F de X est la primitive d'une fonction f appelée densité de probabilité.

Définitions 4.1

- *L'espérance (ou moyenne) de X est :*

$$E(X) = m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

  quand cette quantité existe. Si $m = 0$, on dit que X est centrée.
- *La variance de X est :*

$$V(X) = \sigma^2 = E\big((X - E(X))^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x) dx$$

- *L'écart-type est*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- *Pour $k \in I\!N$, le moment d'ordre k de X est*

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

Remarques : $M_0(X) = 1$, $M_1(X) = E(X) = m$, $M_2(X) = m^2 + \sigma^2$

Définition 4.2 (Loi uniforme) *On dit que X suit la loi uniforme sur $]a, b[$ si la densité de probabilité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 4.3 *Pour la loi uniforme, la moyenne est* $E(X) = m = \dfrac{a+b}{2}$*, la variance est* $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ *et l'écart-type est* $\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Définition 4.4 (Loi normale ou loi de Gauss) *On dit que* X *suit la loi normale (ou de Gauss) de paramètres* m *et* $\sigma > 0$ *si la densité de probabilité est :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Si $m = 0$ *et* $\sigma = 1$*, on dit que la loi normale est réduite.*

Proposition 4.5 *Pour la loi de Gauss, la moyenne est* m*, et l'écart-type est* σ.

Définition 4.6 (Loi exponentielle) *On dit que* X *suit la loi exponentielle de paramètre* λ *si la densité de probabilité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 4.7 *Pour la loi exponentielle, la moyenne est* $m = \dfrac{1}{\lambda}$*, la variance est* $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ *et l'écart-type est :* $\dfrac{1}{\lambda}$.

5 Deux théorèmes de convergence

Définition 5.1 *Soit une suite de variables aléatoires* (X_n) *de fonctions de répartition* F_n *et une variable aléatoire* X *de fonction de répartition* F*. On dit que* (X_n) *converge en loi vers* X *si en tout point* x *où* F *est continue, la suite* $(F_n(x)$ *converge vers* $F(x)$.

Définition 5.2 *La suite* (X_n) *de v.a. converge en probabilité vers* X *si*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Proposition 5.3 *La convergence en probabilité implique la convergence en loi.*

Théorème 5.4 (Théorème central limite) *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi, admettant* m *comme moyenne et* σ *comme écart-type. Alors la variable aléatoire* $S_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)$ *converge en loi vers une loi normale centrée réduite.*

Remarque : En posant $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, on obtient $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - m)$

Théorème 5.5 (Loi faible des grands nombres) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, telles que leurs variances $V(X_n) = \sigma_n^2$ vérifient $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 = 0$.*
Alors la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.