Solution des exercices de la série N0. 4

Solution de l'exercice N0. 1

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0,1, ..., 8., on obtient

$$P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}2^{8-k}}{3^8},\ k=0,\ldots,8,$$

et

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{2^8}{3^8} & \frac{\binom{8}{1}2^7}{3^8} & \frac{\binom{8}{2}2^6}{3^8} & \frac{\binom{8}{3}2^5}{3^8} & \frac{\binom{8}{4}2^4}{3^8} & \frac{\binom{8}{5}2^3}{3^8} & \frac{\binom{8}{6}2^2}{3^8} & \frac{\binom{8}{7}2}{3^8} & \frac{1}{3^8} \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice N0. 2

i) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 selon que la première barrière fermée rencontrée par la voiture sur son parcours soit la première, la deuxième ou la troisième, et elle prend la valeur 3 si toutes les trois barrières rencontrées par la voiture sont ouvertes. De plus,

$$P(X=0)=q=0,2;\ P(X=1)=pq=0,8\times 0,2=0,16;$$

$$P(X=2)=p^2q=(0,8)^2\times 0,2=0,128;$$

$$P(X=3)=(0,8)^3=0,512,$$

donc

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,16 & 0,128 & 0,512 \end{pmatrix}.$$

ii) Que la voiture rencontre toutes les trois barrières ouvertes représente la valeur la plus probable.

iii) On trouve

$$f(x)=\begin{cases} 0,200 & \text{si } x=0 \\ 0,160 & \text{si } x=1 \\ 0,128 & \text{si } x=2 \\ 0,512 & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

iv) On trouve

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0,200 & \text{si } 0\le x<1 \\ 0,360 & \text{si } 1\le x<2 \\ 0,488 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } 3\le x \end{cases}$$

Solution de l'exercice N0. 3

Solution. i)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1/6 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 2/6 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 3/6 & \text{si } 6 \leq x < 8 \\ 4/6 & \text{si } 8 \leq x < 10 \\ 5/6 & \text{si } 10 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

ii) $F(9) = \frac{4}{6}$.

iii) $F(13) = 1$.

10. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) $F(3)$.

ii) $P(X < 3 \mid X \leq 4)$.

Solution. i) $F(3) = P(X \leq 3) = P((X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i) = \frac{3}{5}$.

ii) $P(X < 3 \mid X \leq 4) = \frac{P((X<3)\cap(X\leq4))}{P(X\leq4)} = \frac{P(X<3)}{P(X\leq4)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice N0. 4

Solution. i) $p = 1 - (\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}) = \frac{2}{12}$.

ii) $P(2 \leq X \leq 4) = P((X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4)) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

iii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/12 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2/12 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 5/12 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 9/12 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 10/12 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

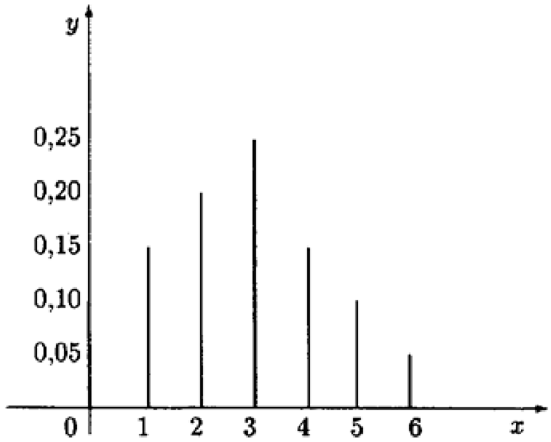
Notons que $P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2-) = \frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

Solution de l’exercice N0. 5

i) D'abord la densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0,10 & \text{si } x = 0 \\ 0,15 & \text{si } x = 1 \\ 0,20 & \text{si } x = 2 \\ 0,25 & \text{si } x = 3 \\ 0,15 & \text{si } x = 4 \\ 0,10 & \text{si } x = 5 \\ 0,05 & \text{si } x = 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et son graphique est représenté par la figure suivante



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,25 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,45 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,70 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,85 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,95 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

iii) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,85 = 0,15$.

iv) $P(X < 2) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = F(2-) = 0,25$.

v) $P(X \leq x) = 0,85$, donc $F(x) = 0,85$, d'où $x \in [4,\ 5)$.

vi) $P(X > x) = 0,55$ d'où $P(X \leq x) = 0,45$, donc $F(x) = 0,45$ et $x \in [2,\ 3)$.

Solution de l’exercice N0. 6

i) $k + 2k + 3k = 1$, donc $k = 1/6$. Par suite, densit de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x = 0 \\ 1/3 & \text{si } x = 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) La fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et son graphique est donné par la figure 3.8.

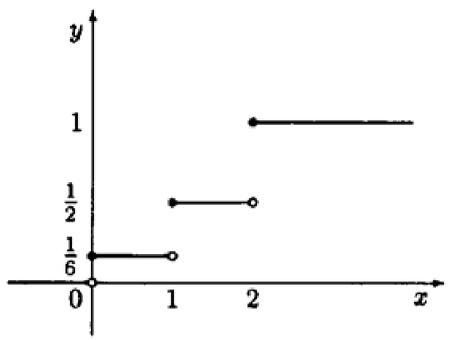


Figure 3.8.

iii) $P(X < 2) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

iv) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}) = 0$.

v) $P(X > 1 \mid X \geq 1) = \frac{P((X>1)\cap(X\geq 1))}{P(X\geq 1)} = \frac{P(X>1)}{P(X\geq 1)} = \frac{P(X=2)}{P((X=1)\cup(X=2))} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$.

Solution de l’exercice N0.7

Posons F_i et P_i, la Face et respectivement la Pile pour le i-ième lancer. Alors l'espace échantillonnal est

$$\Omega = \{(F_1, F_2, F_3), (F_1, F_2, P_3), (F_1, P_2, F_3), (P_1, F_2, F_3), (F_1, P_2, P_3),$$

$$(P_1, F_2, P_3), (P_1, P_2, F_3), (P_1, P_2, P_3)\},$$

et l'espace probabilisable est (Ω , $P(\Omega)$). Pour trouver l'espace probabilisé (Ω , $P(\Omega)$, P) il reste à trouver les probabilités des événements élémentaires, dans chaque cas.

i) De l'indépendance des lancers, et parce que la monnaie est bonne, il s'ensuit que tous les événements élémentaires sont équiprobables, et la probabilité de tout événement élémentaire est 1 / 8 .
La variable aléatoire X, prend les valeurs 0, 1, 2, 3, et les probabilités correspondantes sont :

$$P(X=0)=P((F_1,F_2,F_3))=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1)=P(\{(F_1,F_2,P_3),(F_1,P_2,F_3),(P_1,F_2,F_3)\})=\frac{3}{8},$$

$$P(X=2)=P(\{(F_1,P_2,P_3),(P_1,F_2,P_3),(P_1,P_2,F_3)\})=\frac{3}{8},$$

$$P(X=3)=P((P_1,P_2,P_3))=\frac{1}{8}.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } \ x = 0,\ 3 \\ 3/8 & \text{si } \ x = 1,\ 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Enfin la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ x < 0 \\ 1/8 & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & \text{si } \ 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{si } \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$$

ii) D'abord $P(\text{Pile}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{Face}) = \frac{1}{3}$. Les probabilités des événements élémentaires sont:

$$P((F_1, F_2, F_3)) = \frac{1}{27},$$

$$P((F_1, F_2, P_3)) = P((F_1, P_2, F_3)) = P((P_1, F_2, F_3)) = \frac{2}{27},$$

$$P((F_1, P_2, P_3)) = P((P_1, F_2, P_3)) = P((P_1, P_2, F_3)) = \frac{4}{27},$$

$$P((P_1, P_2, P_3)) = \frac{8}{27}.$$

La variable aléatoire X, prend les valeurs 0, 1, 2, 3, et les probabilités correspondantes sont

$$P(X = 0) = P((F_1, F_2, F_3)) = \frac{1}{27},$$

$$P(X = 1) = P(\{(F_1, F_2, P_3), (F_1, P_2, F_3), (P_1, F_2, F_3)\}) = \frac{6}{27},$$

$$P(X=2) = P(\{(F_1,P_2,P_3),(P_1,F_2,P_3),(P_1,P_2,F_3)\}) = \frac{12}{27},$$

$$P(X=3) = P((P_1,P_2,P_3)) = \frac{8}{27}.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/27 & \text{si } x=0 \\ 6/27 & \text{si } x=1 \\ 12/27 & \text{si } x=2 \\ 8/27 & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Enfin la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/27 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 7/27 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 19/27 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solution de l'exercice N0.8

i). Les valeurs de la variables aléatoire $X+Y$ sont : 2 + 1 ; 2 + 4 ; 2 + 6 ; 3 + 1 ; 3 + 4 ; 3 + 6 ; 5 + 1 ; 5 + 4 ; 5 + 6, c'est-à-dire 3; 6; 8; 4; 7; 9; 6; 9; 11. Calculons maintenant une à une les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs. En tenant compte du fait que les variables aléatoires sont indépendantes, on obtient

$$\begin{aligned} &P(X+Y=3) \\ &= P(X=2,\ Y=1) = P(X=2)P(Y=1) \\ &= 0,2 \times 0,6 = 0,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X+Y=6) \\ &= P(X=2,\ Y=4) + P(X=5,\ Y=1) \\ &= P(X=2)P(Y=4) + P(X=5)P(Y=1) \\ &= 0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 = 0,22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X+Y=8) \\ &= P(X=2,\ Y=6) = P(X=2)P(Y=6) \\ &= 0,2 \times 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

$P(X+Y=4) = P(X=3, Y=1) = P(X=3)P(Y=1) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}30$
$P(X+Y=7) = P(X=3, Y=4) = P(X=3)P(Y=4) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}10$
$P(X+Y=9) = P(X=3, Y=6) + P(X=5, Y=4) = P(X=3)P(Y=6) + P(X=5)P(Y=4) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}16$
$P(X+Y=11) = = P(X=5, Y=6)) = P(X=5)P(Y=6) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06.$
La loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$ est donnée par le tableau

$$X+Y\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 0,12 & 0,30 & 0,22 & 0,10 & 0,04 & 0,16 & 0,06 \end{pmatrix}.$$

ii) Les valeurs de la variables aléatoire XY sont : 2 x 1; 2 x 4; 2 x 6; 3 x 1; 3 x 4; 3 x 6; 5 x 1; 5 x 4; 5 x 6, c'est-à-dire 2; 8; 12; 3; 12; 18; 5; 20; 30.

Or

$$\begin{aligned}
P(XY=2) &= P(X=2,\ Y=1) = 0,12 \\
P(XY=8) &= P(X=2,\ Y=4) = 0,04 \\
P(XY=12) &= P(X=2,\ Y=6) + P(X=3,\ Y=4) = 0,14 \\
P(XY=3) &= P(X=3, Y=1) = 0,30 \\
P(XY=18) &= P(X=3,\ Y=6) = 0,10 \\
P(XY=5) &= P(X=5,\ Y=1) = 0,18 \\
P(XY=20) &= P(X=5,\ Y=4) = 0,06 \\
P(XY=30) &= P(X=5,\ Y=6) = 0,06.
\end{aligned}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire XY est donnée par le tableau

$$XY\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 12 & 18 & 20 & 30 \\ 0,12 & 0,30 & 0,18 & 0,04 & 0,14 & 0,10 & 0,06 & 0,06 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice N0.9

i). Tenant compte que les variables aléatoires sont indépendantes, on trouve

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=X_3) &= \sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k,\ X_3=k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k)P(X_3=k).
\end{aligned}$$

Mais $P(X_3=k) = \frac{1}{6},\ k=1,\ldots,6$ et

$$\sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k) = P(X_1+X_2 \le 6) = \frac{15}{36},$$

étant la probabilité que la somme des points obtenus en lançant deux dés soit plus petite que 6, donc $P(X_1 + X_2 = X_3) = 5 / 72$
ii). Ce cas peut être réduit au cas précédent, considérant que

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 + X_3 = 7) \\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X_3 = k) P(X_1 + X_2 = 7 - k) \\
&= \frac{1}{6} P(X_1 + X_2 \le 6) \\
&= \frac{5}{72}.
\end{aligned}
$$

iii) On peut écrire

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 = 2X_3) \\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X_3 = k) P(X_1 + X_2 = 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} \sum_{j=max(1,2k-6)}^{min(6,2k-1)} P(X_3 = k) P(X_1 = j) P(X_2 = 2k - j) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{(2k-1)}{216} + \sum_{k=4}^{6} \frac{(13-2k)}{216} \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

Ici, dans la double somme, les indices *k* et *j* ne prennent pas indépendamment les valeurs de 1 à 6, mais seulement les paires de valeurs *(k, j)* telles que $1 < 2k - j < 6$, dans les autres cas, les probabilités étant zéro, on ne les prend pas en considération..