د. سليم العمراوي كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير جامعة أم البواقي

# الفصل الثالث

# المتغيرات العشوائية والمميزات العددية

## أولا – مفهوم المتغير العشوائي

المتغير العشوائي X هو دالة ذات قيم عديدة، معرفة علة فضاء العينة $\Omega$، أي أن المتغير العشوائي هو تطبيق مجاله فضاء العينة $\Omega$، وقيمه أو مجاله المقابل $\Omega_X$ هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. وبعبير آخر المتغيرة العشوائية هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة.

يرمز للمتغيرة العشوائية بحرف لاتيني كبير (X ,Y , Z .....)، ونكتب: $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$

**أمثلة عن المتغيرات العشوائية:**

- عند رمي زهرة النرد مرة واحدة، ولنعرف مثلا X متغيرا عشوائيا يمثل ظهور الأعداد الفردية، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = xi = \{0, 1\}$.
- عند رمي زهرة النرد مرتين، ولنعرف مثلا X متغيرا عشوائيا يمثل مجموع الرميتين، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = x_i = \{2, 3, 4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.
- عند رمي قطعة نقدية مرتين، ولنعرف مثلا X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأوجه (صورة) التي تظهر، ومنه $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $\Omega_X = x_i = \{0, 1, 2\}$.

**ملاحظة 1:** يعتمد الحرف الكبير X (أو أي رمز آخر: ...Y,Z في حالة عدة متغيرات) للدلالة على المتغير العشوائي، ونقابل الحرف الكبير بحرف صغير x من نفس الصنف للدلالة على القيمة العددية التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير.

تختلف المتغيرات العشوائية بحسب فضاء العينة المعرفة عليها، فإذا كان فضاء العينة قابل للعد ومنته أو غير منته فتكون المتغيرة العشوائية هنا منفصلة أو متقطعة، أما إذا كان فضاء العينة غير قابل للعد أي يأخذ عدد غير منتهي من القيم داخل مجال معلوم فإن المتغيرة العشوائية تكون مستمرة أو متصلة.

## ثانيا– المتغيرة العشوائية المتقطعة ومميزاتها العددية

**1. تعريفها:** المتغيرة العشوائية المتقطعة أو المنفصلة هي المتغيرة التي تأخذ عددا قابلا للعد من القيم سواء كان فراغ إمكانات التجربة منته أو غير منته.

**أ. حالة الفراغ المنته:** المتغير العشوائي المتقطع في حالة الفراغ المنتهي هو ذلك المتغير الذي يستطيع أن يأخذ عددا منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره، وهذا يعني أن $\Omega_X$ مجموعة منتهية، أي:

$$X\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

**مثل:**

- قيمة الرقم الذي يظهر عند رمي حجرة النرد؛

- عدد السيارات المتواجدة بمرآب معين.

**ب. حالة الفراغ غير المنته:** المتغير العشوائي المتقطع في حالة الفراغ الغير منته هو ذلك المتغير المعرف على المجموعة $\Omega_X$ القابلة للعد ولها عدد أصغر، أي:

$$\Omega_{\text{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$$

مثل:

- المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب من كيس يحتوي على كرات بيضاء بنسبة p وكرات حمراء بنسبة q حيث أن: $p + q = 1$، بغرض سحب كرية بيضاء (السحب مع الإعادة).

**2. قانون التوزيع الاحتمالي:** إذا كان X متغير عشوائي متقطع، يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega_{\text{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

كما أن احتمال ظهور أي قيمة من xi هو pi، وبالتالي فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يكتب في الجدول التالي:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_n$ |

حيث يكون قانون توزيع احتمالي لابد من تحقق الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

يعكس الجدول السابق قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة لها P(X=xi)، ويفضل دائما أن لا يبقى قانون التوزيع الاحتمالي على شكل جدول، وأن يصاغ على شكل دالة رياضية f(x)، من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} P_1 & , x = x_1 \\ P_2 & , x = x_2 \\ P_3 & , x = x_3 \\ \vdots & , \vdots \quad \vdots \\ P_n & , x = x_n \\ 0 & , \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \end{cases}$$

**مثال 1:**

نقوم برمي زهرة نرد مرتين، ونعرف X متغير عشوائي يمثل حاصل الفرق بين القيمة التي تظهر في الرمية الأولى والرمية الثانية.

**المطلوب:**

- أوجد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

**<u>الحل:</u>**

سيتم الاعتماد على الجدول الآتي لتحديد الحالات الممكنة:

| نتائج الرمية الألى / نتائج الرمية الثانية | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 02 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 03 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 04 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| 05 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 |
| 06 | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 |

من خلال الجدول، فإن القيم $x_i$ الممكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي 36 قيمة (منها قيم متساوية)، وعليه فإن:

$$x_i = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

يمكن وضع قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي المتقطع في الجدول التالي:

| المجموع | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 | $p_i$ |

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد، وكل قيمة متعلقة بالاحتمال محصورة بين الصفر والواحد، أي أن الشرطين محققين:

$$p_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ويفضل أن يصاغ قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X، على شكل دالة كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , x = -5, x = 5 \\ \frac{2}{36} & , x = -4, x = 4 \\ \frac{3}{36} & , x = -3 \, , x = 3 \\ \frac{4}{36} & , x = -2 \, , x = 2 \\ \frac{5}{36} & , x = -1 \, , x = 1 \\ \frac{6}{36} & , x = 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \, , \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \end{cases}$$

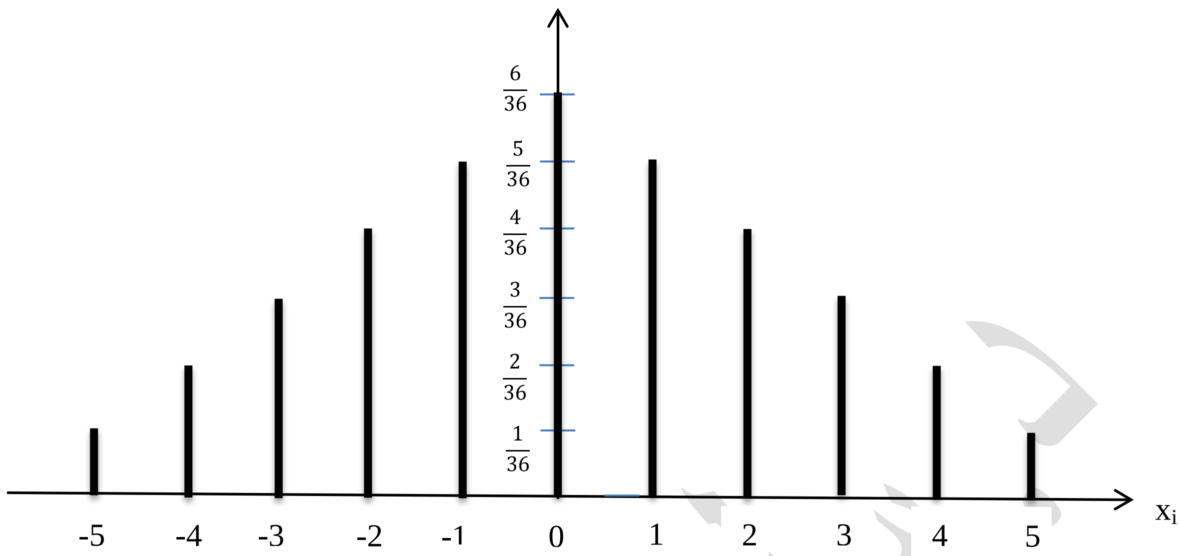
**3. التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:** إن التمثيل البياني للمتغير العشوائي المتقطع هو عبارة مجموعة من الأعمدة عددها بعدد قيم المتغير وارتفاعاتها تتم وفق (بدلالة) الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير.

**مثال 2:**

بالعودة للمثال رقم (1)، المتعلق برمي زهرة نرد مرتين والمتغير عشوائي X الذي يمثل حاصل الفرق بين القيمة التي تظهر في الرمية الأولى والرمية الثانية.

يكون التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير وفق الشكل الآتي:

$p_i$




**4. دالة تابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع F(x):** يسمى أيضا تابع الاحتمالات، تابع التوزيع التراكمي، تابع التوزيع التجميعي ويرمز له عادة بـ F(x).

إن تابع التوزيع هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة $x_i$. ويعبر عن ذلك بصورة مختصرة كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} P_i$$

بطبيعة الحال يمكن النظر إلى المتمم من خلال الاهتمام بأن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أكبر من القيمة $x_i$ هو:

$$P(X > x_i) = 1 - F(x_i)$$

كما بإمكاننا الاهتمام بأخذ المتغير العشوائي X لقيمة أكبر أو تساوي $x_i$ هو:

$$P(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$$

**مثال 3:**

في تجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض، فضاء إمكانيات التجربة منته، كالآتي:

Ω ={(PPP), (PFP), (PPF), (FPP), (FFP), (FPF), (PFF), (FFF) }.

حيث: P= تمثل ظهور القيمة.

F= تمثل ظهور الشعار (الصورة).

إذا كان X يمثل متغيرا عشوائيا لعدد الصور الظاهرة فإنه يأخذ القيم التالية: $x_i = \{0, 1, 2, 3\}$، وكل قيمة ترتبط باحتمال معين وفق ما يظهره الجدول الآتي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد، وكل قيمة متعلقة بالاحتمال محصورة بين الصفر والواحد، أي أن الشرطين محققين:

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

**المطلوب:**

- أوجد تابع التوزيع F(x).

**الحل:**

يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي X من خلال الجدول التالي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |
| F(x) | 0,125 | 0,5 | 0,875 | 1 | / |

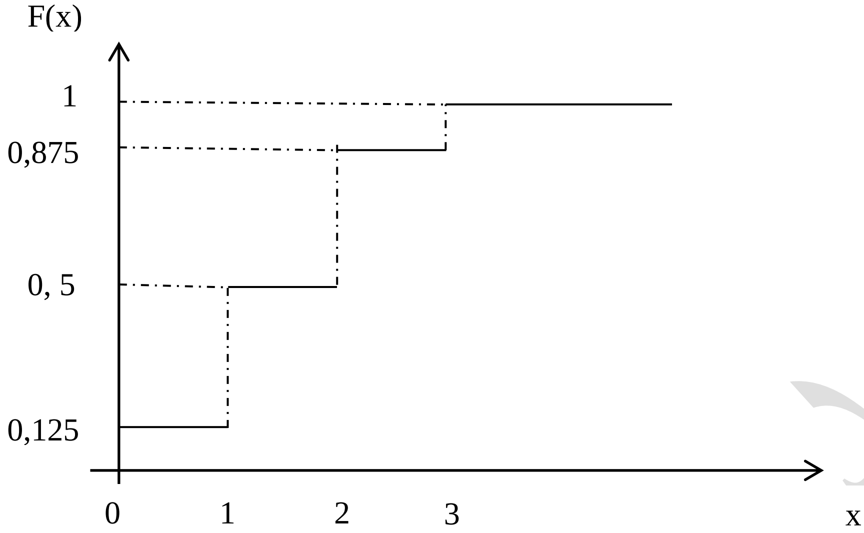
قيم المتغير F(x) لا يتم تحديدها إلا عندما تكون القيم $x_i$ مرتبة ترتيبا تصاعديا، بحيث يكون:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P_0 = 0{,}125$$
$$F(1) = P(X \leq 1) = P_0 + P_1 = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$$
$$F(2) = P(X \leq 2) = P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$$
$$F(3) = P(X \leq 3) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

ويمكن التعبير عنه أيضا كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}125 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}875 & 2 \leq x < 3 \\ 01 & x \geq 3 \end{cases}$$

**5. التمثيل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع:** على العموم يأخذ الشكل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع صورة السلم الذي يكون ارتفاع درجاته مرتبطا بالاحتمالات المقابلة للقيم التي يأخذها المتغير، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي والمتعلق بالمثال السابق رقم (3).




**6. المميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع:** رأينا سابقا كيف يتم إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع مع كيفية تمثيلهما بيانيا، لكن هذا لا يكفي لدراسة المتغير العشوائي المتقطع، بل لابد من دراسة خصائصه الاحصائية، ونخص بالذكر المتوسط الذي يعرف بالتوقع الرياضي، وكذا التباين والانحراف المعياري.

**أ. التوقع الرياضي E(X):** تتمركز معظم قيم المتغيرات العشوائية حول قيمة معينة أو قيمة متوقعة (هي القيمة المتوسطة أو المتوقعة) لمتغير عشوائي X ويرمز لها بالرمز E(x)، فإذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا يأخذ القيم التالية: $\mathrm{x}_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باحتمالات تقابلها $\mathrm{P}_i = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ فإن القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي له يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = P_1.\mathrm{x}_1 + P_2.\mathrm{x}_2 + \cdots + P_n.\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i$$

من أهم خصائص التوقع الرياضي نذكر الآتي:

- **الخاصية الأولى:** إذا كان: X=c، حيث c ثابت فإن P(X=c)=1، فهو يمثل احتمال حدوث حادث أكيد، ومنه فإن:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i = 1.c = c$$

- **الخاصية الثانية:** إذا كان c عددا ثابتا فإن:

$$E(c.X) = \sum_{i=1}^{n} c.P_{ni}.\mathrm{x}_i = c.\sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i = c.E(X)$$

- **الخاصية الثالثة:** من الخاصيتين الأوليتين، فإذا كان: a وb مقدرين ثابتين، يمكننا أن نستخلص الخاصية الثالثة الآتية:

$$E(aX+b)=a.E(X)+b$$

- **الخاصية الرابعة:** توقع التوقع الراضي يساوي التوقع الرياضي نفسه:

$$E[E(X)]=E(X)$$

- **الخاصية الخامسة:** إذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ قيمه فقط في المجال [a,b]، أي أن:

$$a\leq x_i\leq b$$

وعليه يكون التوقع الرياضي للمتغير X أيضا محصورا ضمن المجال [a,b]، أي أن:

$$a\leq E(X)\leq b$$

- **الخاصية السادسة:** إذا كان X وy متغيرين عشوائيين فإن توقع المجموع يساوي إلى مجموع التوقعات، أي أن:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

وتنطبق نفس الخاصية أيضا بالنسبة لتوقع الفرق، أي أن:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

- **الخاصية السابعة:** إذا كان X وY متغيرين عشوائيين **مستقلين** فإن توقع الجداء يساوي إلى جداء التوقعات، أي أن:

$$E(X.Y)=E(X).E(Y)$$

- **الخاصية الثامنة:** إذا كان:

$$x_i\geq 0$$

فإن:

$$E(X)\geq 0$$

إن الخصائص السالفة الذكر تكتسي أهمية بالغة في الحسابات العددية، وهي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**.

**مثال 4:**

نستعين بالمثال المتعلق بتجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض السابق. أين كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وفق ما يظهره الجدول الآتي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |

**المطلوب:**

- حساب التوقع الرياضي E(x).

**الحل:**

$$E(X) = P_1.\mathrm{x}_1 + P_2.\mathrm{x}_2 + \cdots + P_n.\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.\mathrm{x}_i$$

$$E(X) = (0{,}125 \times 0) + (0{,}375 \times 1) + (0{,}375 \times 2) + (0{,}125 \times 3) = 1{,}5$$

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن الاستعانة بجدول التوزيع الاحتمالي كما يلي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |
| $x_i.\ p_i$ | 0 | 0,375 | 0,75 | 0,375 | E(X)=1,5 |

**ب. التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع:** قد يتساوى التوقع الرياضي لتوزيعين احتماليين رغم اختلافهما، وهذا الاختلاف قد يكون مرجعه تشتت القيم عن القيمة المركزية، لذا يجب دراسة مقاييس تقيس هذا التشتت، وأنسبها من حيث الاعتماد والمدلول هو الانحراف المعياري من خلال دراسة التباين.

- **التباين V(X):** تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز V(X) ويعطى بالعلاقة:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i\left[x_i - [E(X)]\right]^2$$

يمكن جعل العلاقة السابقة أكثر سهولة في الحساب، فبعد النشر نحصل على الصيغة المختصرة الآتية:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}\ .\ P_i\ \ - [E(X)]^2$$

أو

$$V(X) = \ E(X^2)\ \ - [E(X)]^2$$

للتباين عدة خواص نذكر منها:

- **الخاصية الأولى:** تباين المقدار الثابت (وليكن c) يساوي للصفر، أي أن:

$$V(c) = 0$$

- **الخاصية الثانية:** فإذا كان: a وb مقدرين ثابتين، فإن:

$$V(aX \mp b) = a^2.V(X)$$

- **الخاصية الثالثة:** إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين **مستقلين** فإن:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

إن الخصائص السالفة الذكر تكتسي أهمية بالغة في الحسابات العددية، وهي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**.

- **الانحراف المعياري (X) δ:** الانحراف المعياري يشتق من التباين عن طريق أخذ الجذر التربيعي له، ويعرف رياضيا بالعلاقة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

**مثال 5:**

نستعين أيضا بالمثال المتعلق بتجربة رمي 3 قطع نقدية على الأرض السابق. أين كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X والتوقع الرياضي E(X) وفق ما يظهره الجدول الآتي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |
| $x_i.\ p_i$ | 0 | 0,375 | 0,75 | 0,375 | E(X)=1,5 |

**المطلوب:**

- أحسب التباين V(X) والانحراف المعياري (X) δ.

**<u>الحل:</u>**

- **حساب التباين:**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحتاج إلى حساب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = P_1.x_1{}^2 + P_2.x_2{}^2 + \cdots + P_n.x_n{}^2 = \sum_{i=1}^{n} P_{ni}.x_i{}^2$$

$$E(X^2) = (0{,}125 \times 0^2) + (0{,}375 \times 1^2) + (0{,}375 \times 2^2) + (0{,}125 \times 3^2) = 3$$

بالتطبيق العددي على صيغة حساب التباين نجد:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

- **حساب الانحراف المعياري:**

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}86$$

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن الاستعانة بالجدول الآتي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | |
| $p_i$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 1 |
| $x_i.\ p_i$ | 0 | 0,375 | 0,75 | 0,375 | E(X)=1,5 |
| $x_i^2.\ p_i$ | 0 | 0,375 | 1,5 | 1,125 | $E(X^2)$ =3 |

**مثال 6:**

نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، ولتكن المتغيرة Y = 2X.

نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عليها، ولتكن المتغيرة W حيث:

W = Z – Y

**المطلوب:**

- أحسب V(X) .
- أحسب V(Y).
- أحسب V(W).

<u>**الحل:**</u>

- **حساب التباين V(X):**

$$V(X) = E(X^2) \ - [E(X)]^2$$

بالتطبيق العددي على صيغة حساب التباين نجد:

$$V(X) = E(X^2) \ - [E(X)]^2 = 1{,}5 - 1^2 = 0{,}5$$

العمليات الحسابية المستخدمة في حساب V(X) مفصلة في الجدول الآتي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 1 |
| $x_i.\ p_i$ | 0 | 1/2 | 1/2 | E(X) =1 |
| $x_i^2$ | 0 | 1 | 4 | المجموع |
| $x_i^2.\ p_i$ | 0 | 1/2 | 1 | $E(X^2)$ = 3/2 = 1,5 |

- **حساب التباين V(Y):**

من خلال الخاصية الثانية للتباين:

$$V(aX \mp b) = a^2.V(X)$$

فإن:

$V(Y) = V(2X) = 2^2\, V(X) = 4\,(0{,}5) = 2$

- **حساب التباين V(W):**

من خلال الخاصية الثانية:

$$V(aX \mp b) = a^2.V(X)$$

والخاصية الثالثة للتباين:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

وبما أن المتغيرين العشوائيين X وZ مستقلين: فإن:

$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) + V(2X) = V(Z) + 2^2\, V(X).$

**نحتاج إلى حساب V(Z) :**

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z) = P_1.z_1 + P_2.z_2 + \cdots + P_n.z_n$$
$$= \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 6 = \frac{21}{6}$$

$$E(Z^2) = P_1.{z_1}^2 + P_2.{z_2}^2 + \cdots + P_n.{z_n}^2$$
$$= \frac{1}{6}\times 1^2 + \frac{1}{6}\times 2^2 + \frac{1}{6}\times 3^2 + \frac{1}{6}\times 4^2 + \frac{1}{6}\times 5^2 + \frac{1}{6}\times 6^2$$

$$E(Z^2) = \frac{91}{6}$$

بالتعويض العددي نجد أن:

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{21}{6} = \frac{70}{6} = 11{,}67$$

بالتطبيق العددي اعتمادا على النتائج السابقة يمكن حساب V(W) وفق الآتي:

$V(W) = (11{,}67) + 2^2\,(0{,}5) = 13{,}67$

العمليات الحسابية المستخدمة في حساب V(Z) مفصلة في الجدول الآتي:

| $z_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |
| $z_i.\ p_i$ | 1/6 | 2/6 | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 6/6 | E(X) =21/6 |
| $z_i^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | المجموع |
| $z_i^2.\ p_i$ | 1/6 | 4/6 | 9/6 | 16/6 | 25/6 | 36/6 | $E(X^2)$ = 91/6 |

**ثالثا– المتغيرات العشوائية المستمرة ومميزاتها العددية**

كثير من التجارب العشوائية لا يمكن التعبير عن نتائجها بمجموعات قابلة للعد كما هو الحال في وزن الأشخاص أو أطوالهم، درجة الحرارة في خلال فترة ما في مدينة معينة، ففي هذه الحالة فإن قيم المتغير العشوائي تأخذ جميع القيم في مجال ما.

**1. تعريف المتغير العشوائي المستمر:** إذا احتوى فراغ إمكانيات تجربة ما على عدد غير معدود وغير محدود من القيم قلنا عنه أنه فراغ إمكانات مستمر ونسمي المتغير المعرف على هذا الفراغ بالمتغير العشوائي المستمر.

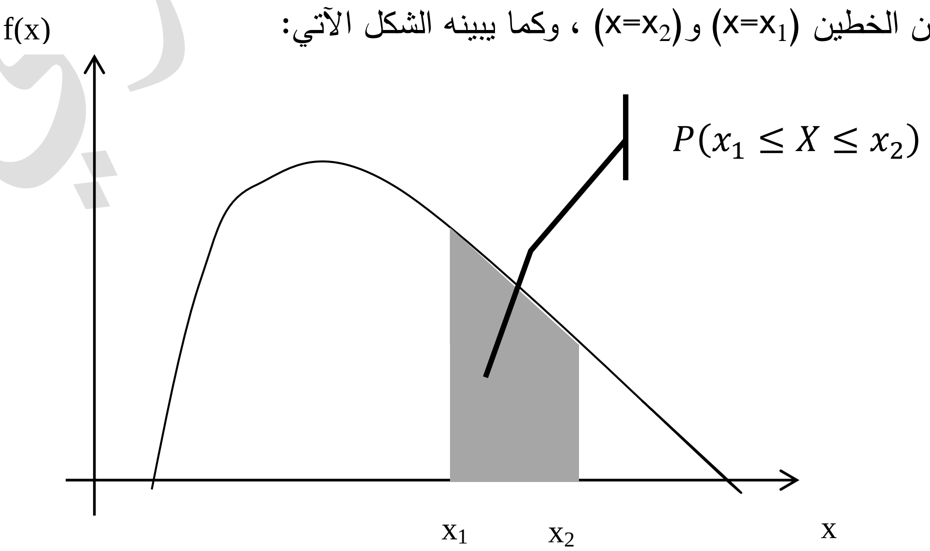
**2. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر "تابع الكثافة الاحتمالية:** بما أن X يأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر $P(X=x_i) \rightarrow 0$. لذلك فإنه لكل متغير عشوائي مستمر تابع يسمى تابع الكثافة الاحتمالية يستعمل لحساب احتمال مجال معين. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال، أي أن تابع الكثافة الاحتمالية إذا تكاملت من a إلى b ‏(a≤b) فإنها تعطي احتمالا أن المتغير العشوائي سيأخذ أي قيمة في المجال من aإلى b ودونه لن يكون معروفا، أي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

ويمكن حساب القيمة الاحتمالية لأي مجال $[x_1, x_2]$ ينتمي إلى مجال تعريف التابع f(x)، وفق المعادلة الرياضية التالية:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

أي أن القيمة الاحتمالية $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ تعكس المساحة المحصورة بين تحت المنحنى f(x) بين الخطين $(x=x_1)$ و$(x=x_2)$ ، وكما يبينه الشكل الآتي:



تعبر المساحة المضللة عن القيمة الاحتمالية في المجال $[x_1, x_2]$، والمساحة تحت كامل المنحنى تساوي الواحد.

من خلال ما سبق فإن تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر يحقق الخاصيتين أو الشرطين الآتيين:

- **الشرط الأول:** يعكس هذا الشرط إيجابية الاحتمال المقابل لأي جزء مما كان صغيرا في مجال تعريف التابع f(x)، أي أن:

$$f(x) \geq 0$$

- **الشرط الثاني:** يعكس هذا الشرط كون التكامل من أول المدى إلى آخره يساوي الواحد الصحيح، وهذا ما تمثله المساحة تحت منحنى تابع التوزيع، وبتعبير رياضي فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

**ملاحظة:** إن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر X القيمة المحددة ($x_i$=a) يساوي للصفر.

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ينتج عن هذه الملاحظة أن الإشارتين > و≥ متكافئتين في التوزيعات المستمرة.

**مثال 7:**

إذا كانت المدة الزمنية التي يستغرقها الطالب في إتمام الامتحان (المدة القانونية ساعة واحدة) عبارة عن متغير عشوائي مستمر (X)، تابع كثافته الاحتمالية معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

**المطلوب:**

- تحقق أن f(x) تابع كثافة احتمالية.
- إذا اخترنا طالبا عشوائيا، ما احتمال أن يكمل حل الامتحان في أقل من نصف ساعة؟

**<u>الحل:</u>**

- **التحقق من أن f(x) تابع كثافة احتمالية:**

الشرط الأول محقق؛ هو أن تكون دالة تابع التوزيع f(x) موجبة في مجال تعريفه، وهو $[0,1]$، أي أن:

$$f(x) \geq 0; \quad si\ 0 \leq x \leq 1$$

التحقق من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وبما أن الشرط الثاني أيضا محقق فإن f(x) تابع كثافة احتمالية.

- **حساب احتمال أن يكمل الطالب حل التمرين في أقل من نصف ساعة:**

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx$$
$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{3}{48} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

أي أن إحتمال أن تكون المدة الزمنية التي يستغرقها طالب تم اختياره عشوائيا في إكمال الامتحان أقل من نصف ساعة هي: $0{,}1875$ أو بالتعبير عنه كنسبة مئوية هو: $18{,}75\%$.

**3. التمثيل البياني لتابع الكثافة للمتغير العشوائي المستمر:** يتم تمثيل تابع الكثافة الاحتمالية بمنحنى سلس إن لم يكن خطيا، أما إذا كان التابع خطيا فيتم تمثيله بمستقيم، بحيث يكون مجموع المساحة (الاحتمال) تحت المنحنى يساوي الواحد.

**مثال 8:**

لنعتمد على معطيات المثال السابق رقم (7)، حيث:

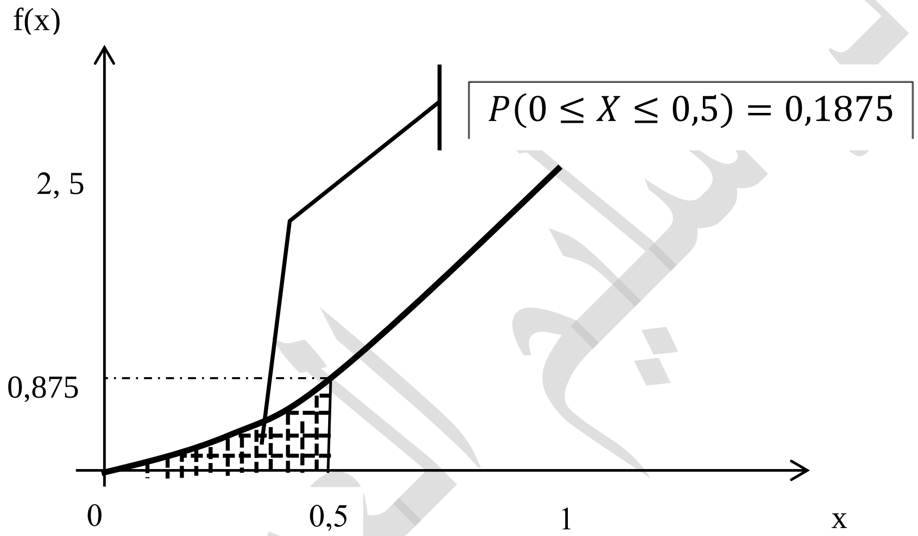
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

**المطلوب:**

- تمثيل تابع الكثافة بيانيا.
- تحديد احتمال أن يكمل الطالب حل التمرين في أقل من نصف ساعة على التمثيل البياني (تضليل المساحة المقابلة).

**الحل:**

- **التمثيل البياني لتابع الكثافة الاحتمالية:**




- المساحة المضللة تمثل احتمال أن تكون المدة الزمنية التي يستغرقها طالب تم اختياره عشوائيا في إكمال الامتحان أقل من نصف ساعة، وهي: 0,1875 %.

4. **تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر F(x):** لا يتغير مفهوم تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر عن مفهوم تابع التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع ويرمز له أيضا بـ F(x).

لذا فتابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة $x_i$،

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا معرف على $R$ أي ينتمي إلى المجال: ]∞+ , ∞−[ فإن تابع التوزيع F(x) يعبر عنه بالصيغة الآتية:

$$F(x) = P(X \le x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \;;\;\; x \in R$$

ومنه فإن:

$$P(a \le X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

أي أن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

وهذه الأخيرة خاصية مهمة جدا، وهي تنص على أنه إذا كانت الثوابت a وb تحقق (a≤b) فإن احتمال أن تكون قيمة X محصورة بين a وb يساوي قيمة تابع التوزيع عند النقطة b مطروحا منها قيمة تابع التوزيع عند النقطة a.

بطبيعة الحال يمكن النظر إلى المتمم من خلال الاهتمام بأن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أكبر $x_i$ هو:

$$P(X > x_i) = 1 - F(x_i)$$

كما بإمكاننا الاهتمام بأخذ المتغير العشوائي X لقيمة أكبر أو تساوي $x_i$ هو:

$$P(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$$

**مثال 9:**

لنعتمد على معطيات المثال السابق رقم (7)، حيث أعطي تابع الكثافة الاحتمالية كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

**المطلوب:**

- إيجاد تابع التوزيع F(X).
- أحسب F(1/2)، F(0).
- استنتج قيمة الاحتمال: $P(0 \leq X \leq 3/4)$.

**الحل:**

- **إيجاد تابع التوزيع F(X):**

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{2}x^2\, dx + \int_{-\infty}^{x} x\, dx = \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{x} x^2\, dx + \int_{-\infty}^{x} x\, dx$$

$$F(x) = \frac{3}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{3x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$$

حيث أن: $x \in [0,1]$، وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{3x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2} & 0\ \leq\ x\leq 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

- **حساب $F(1/2)$:**

$$F(x)=P(X\leq x_i)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=0{,}1875$$

بما أن: $0{,}5\in[0{,}1]$ نقوم بالتعويض قيمة x مباشرة بـ $0{,}5$ في الدالة: $\left(\frac{3x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)$.

- **حساب $F(0)$:**

من خلال تابع التوزيع نستنتج مباشرة أن:

$$F(0)=P(X\leq 0)=0$$

- **استنتاج قيمة الاحتمال: $P\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)$.**

بما أن:

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)dx\ =F(b)-F(a)$$

فإن:

$$P\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=0{,}1875-0=0{,}1875$$

وهي نفس القيمة التي تحصلنا عليها من خلال المثال رقم (7).

أ. **خواص تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر:** خواص تابع التوزيع واحدة بغض النظر عن نوع المتغير العشوائي مستمرا كان أو متقطعا (باستثناء المدلول)، ومن هنا يمكن الإشارة إلى:

- أن تابع التوزيع F(x) تابع متزايد؛
- تنحصر قيمة تابع التوزيع F (x) بين الصفر والواحد؛
- $F(+\infty)=1$؛
- $F(-\infty)=0$؛
- تابع الكثافة ما هو إلا تفاضل (مشتق) تابع التوزيع أي أن:

$$f(x)=F^{/}(x)=\frac{d\,F(x)}{dx}$$

**ب. التمثيل البياني لتابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر:** يمكن توضيح كيفية التمثيل البياني لتابع التوزيع من خلال المثال التالي:

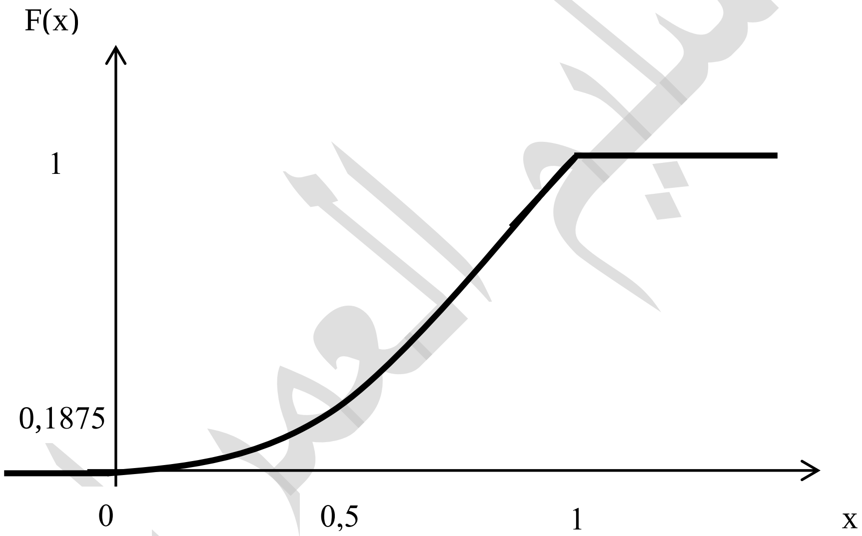
**مثال 10:**

رسم تابع التوزيع في المثال رقم (9) يعكسه الشكل أدناه:

- **تابع التوزيع في المثال رقم (9) هو:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

- **التمثيل البياني لتابع التوزيع:**




**5. المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر:** إن إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع للمتغير العشوائي لا يكفي لدراسة المتغير العشوائي المستمر، بل لابد أيضا من دراسة خصائصه الاحصائية، من توقع رياضي، وكذا من تباين وانحراف معياري.

**أ. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر E(X):** إذا كان X متغير عشوائي مستمر له كثافة احتمالية f(x)، فإنه يمكن حساب توقعه الرياضي من خلال الصيغة التالية:

$$E(X) = \int_D x \, . f(x) \; dx$$

حيث أن الدالة f(x) معرفة على المجال D.

**ملاحظة 1:** يجب الانتباه إلى أنه ليس من الضروري أن يوجد للمتغير العشوائي المستمر X توقع رياضي، فإذا كان التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,.\,f(x)\;dx$$

غير معرف (غير متقارب) فإنه ليس لـ X في هذه الأحوال توقع رياضي.

**ملاحظة 2:** خصائص التوقع الرياضي هي واحدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**. أنظر خصائص التوقع الرياض للمتغير العشوائي المتقطع (ص-ص 8-9).

**مثال 11:**

إذا كان تابع الكثافة الاحتمالية f(x) للمتغير العشوائي المستمر X معطى كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

**المطلوب:**

- حساب التوقع الرياضي E(x) للمتغير العشوائي X.

**الحل:**

لدينا:

$$E(X) = \int_D x\,.\,f(x)\;dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\,.\frac{1}{2}x\;dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\;dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{1}{2}.\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}.\frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{6} - 0$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$E(X) = 1{,}33$$

**ب- التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المستمر:** يعتبر التباين والانحراف المعياري أنسب المقاييس المستخدمة في قياس تشتت القيم عن القيمة المركزية للمتغير العشوائي المنفصل.

- **التباين V(X):** تباين المتغير العشوائي المستمر X يرمز له بالرمز V(X) ويعطى بالعلاقة:

$$V(X) = \int_D [x - [E(X)]]^2\,.\,f(x)\;dx$$

بفرض أن: D=[a,b] فإن التعريف السابق يكتب كما يلي:

$$V(X) = \int_a^b [x - [E(X)]]^2 . f(x)\ dx$$

يمكن جعل العلاقة السابقة أكثر سهولة في الحساب، فبعد النشر نحصل على الصيغة المختصرة الآتية:

$$V(X) = \int_a^b x^2 . f(x)\ dx\ - [E(X)]^2$$

أو

$$V(X) = E(X^2)\ - [E(X)]^2$$

**ملاحظة:** خصائص التباين هي احدة بغض النظر عن كون المتغير العشوائي **متقطعا** أو **مستمرا**. أنظر خصائص التباين للمتغير العشوائي المتقطع (ص-ص 10-11).

- **الانحراف المعياري (X) δ:** كما سبق وأشرنا فإن الانحراف المعياري يشتق من التباين عن طريق أخذ الجذر التربيعي له، ويعرف رياضيا بالعلاقة:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

**مثال 12:**

نفرض أن X متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى:

$$f(x) = \begin{cases} cx^4 & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

**المطلوب:**

- أحسب قيمة الثابت c.
- أحسب الاحتمال $p(X<1,5)$.
- إيجاد تابع التوزيع F(X).
- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

**الحل:**

- **حساب قيمة الثابتC:**

بما أن التابع المعطى تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} cx^4\, dx = 1$$
$$= c\int_{0}^{2} x^4\, dx = 1$$
$$= C\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = C\frac{32}{5} = 1$$

ومنه فإن:

$$C = \frac{5}{32}$$

- **حساب الاحتمال p(X<1,5):**

$$P(X < 1{,}5) = \int_{0}^{1{,}5} \frac{5}{32}x^4\, dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1{,}5} = 0{,}2373$$

- **إيجاد تابع التوزيع F(X):**

$$\boldsymbol{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{5}{32}x^4\, dx = \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

حيث أن $1 \leq x \leq 2$، وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

- **حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:**

**التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \int_{D} x\,.\,f(x)\; dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{2} x\,.\frac{5}{32}x^4\; dx = \int_{0}^{2} \frac{5}{32}x^5\; dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3} - 0 = \frac{5}{3}$$
$$E(X) = 1{,}66$$

**التباين:**

$$V(X) = \int_a^b x^2 . f(x)\ dx\ - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2\ .\frac{5}{32}x^4\ dx\ - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6\ dx\ - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2{,}85 - 2{,}77 = 0{,}07$$

$$V(X) = 0{,}07$$

**الانحراف المعياري:**

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}07} = 0{,}2645$$

**قائمة المراجع المعتمدة:**

1. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات –التحليل التوافقي والمبادئ الاحتمالية، ج 3، دار البعث، دون سنة نشر.
2. إدريس عبدلي، مطبوعة بعنوان: دروس مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء 2، جامعة البليدة، الجزائر، 2019/2018.
3. بوبلوطة بلال، مطبوعة بعنوان: نظريات وتمارين محلولة في الاحتمالات، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
4. بوعبد الله صالح، مطبوعة بعنوان: محاضرات في الإحصاء الرياضي، جامعة المسيلة، الجزائر، 2008.
5. دلال القاضي وآخرون، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2003.
6. سيمون ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر 2003.
7. محمد بوحجلة، مطبوعة بعنوان: محاضرات في الإحصاء 2، جامعة البليدة، الجزائر، 2020/2019.
8. موساوي عبد النور، يوسف بركان، الإحصاء 2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010.