Université Larbi Ben M'hidi — 2ième Année Licence Maths

Faculté des Sciences Exactes — 2020/2021

Département de Mathématiques — Unité : Probabilités (II)

Séries d'exercices No. 3

Exercice No.1

On introduit au hasard 8 boules dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de boules placées dans la première boîte.

Exercice No.2

Le long d'une autoroute, il y a trois barrières automatiques à des passages à niveau. La probabilité qu'une voiture qui circule sur cette autoroute trouve n'importe laquelle de ces barrières ouverte est $p = 0,8$.

i) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de passages à niveau consécutifs franchis sans rencontrer une barrière fermée.
ii) Quel est le nombre le plus probable de barrières consécutives ouvertes ?
iii) Donner la fonction de masse de la variable aléatoire X.
iv) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Exercice No.3

Un sac contient 6 jetons numérotés 2, 4, 6, 8, 10, 12. Au tirage d'un jeton on associe la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre inscrit sur le jeton.
i) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X
ii) Calculer $F(9)$,F(13).

Exercice No.4

Soit X le nombre de points donnés par un dé mal équilibré dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & p \end{pmatrix}$$

Quelle est la valeur de p ?
i) Calculer la probabilité $P(2 < X < 4)$.
ii) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X donnant le nombre de points.

Exercice No.5

Un article en stock fait l'objet d'une demande journalière X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,10 & 0,15 & 0,20 & 0,25 & 0,15 & 0,10 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

i) Déterminer la fonction de masse et représenter graphiquement cette fonction.
ii) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
iii) Trouver la probabilité qu'une demande dépasse 4.
iv) Trouver la probabilité qu'une demande soit inférieure à 2.
v) Pour quelles valeurs de x peut-on écrire $P(X < x) = 0, 85$?
vi) Pour quelles valeurs de x peut-on écrire $P(X > x) = 0, 55$?

Exercice No.6

La variable aléatoire X possède la fonction de masse

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 0 \\ 2k & \text{si } x = 1 \\ 3k & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) k. ii) l a fonction de répartition et représenter graphiquement cette fonction. *Iii) $P(X < 2)$. Iv)$P(X > 2)$.,* v),$P(X > 1 \setminus X > 1)$.

Exercice No.7

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Trouver l'espace probabilisé associé, ainsi que la loi de probabilité, la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire X, qui prend comme valeurs le nombre de Pile obtenus, dans les cas suivants

i) la pièce de monnaie est bonne, donc bien équilibrée.
ii) la pièce de monnaie est telle que Pile est deux fois plus probable que Face.

Exercice No.8

Deux variables aléatoires indépendantes ont les lois de probabilité données respectivement, par les table

$$X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} Y\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

On demande *i)*. la loi de probabilité de la somme $X + Y$. ii). la loi de probabilité du produit XY

Exercice No.9

On lance un dé trois fois et soit $X1$, $X2$, $X3$ les variables aléatoires qui prennent comme valeurs le nombre de points obtenus lors du premier, deuxième et troisième lancer respectivement. Calculer
i). $P(X1 + X2 = X3)$. ii). $P(X1 + X2 + X3 = 7)$. iii). $P(X1 + X2 = 2X3)$.

Exercice No.10

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant X= $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{matrix}$

Déterminer la loi des variables aléatoires
$X^2, 3X, X^{-1}, X^{-2}, (2X)^{-2}, (2X)^{-2}\ (2X)^{-2}, (4X)^{-2}$

Exercice No.11

Les chiffres a et b du nombre l0a + b sont obtenus indépendamment du modèle probabiliste suivant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \dots & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Établir le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire C = $A + B$ *où* A et B représentent le résultat du premier et des seconds nombres obtenus du modèle.
i).Quelle est la probabilité que le nombre $10a + b$, ainsi obtenu soit divisible par 3 ?
ii).Quelle est la probabilité que le nombre $10a + b$, ainsi obtenu soit divisible par 5 ?

Exercice No.12

On considère les variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilité sont données respectivement par les tableaux

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

et

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Calculer
i) $E(2X + 4Y)$.
ii) $Var(2X + 4Y)$.
iii) L'écart type de la variable aléatoire $2X + 4Y$.

Exercice No.13

La variable aléatoire X possède la fonction de masse suivante

$$f(x) = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = -2 \\ (1/2) - k & \text{si } x = -1 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Trouver la valeur de k et donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

ii) Calculer $E(X + 2)$.

iii) Calculer $Var(X + 1)$.

iv) Calculer $E(X^3)$.

Exercice No.14

La variable aléatoire X possède la densité

$$f(x) = \begin{cases} 9/(25x) & \text{si } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ 1/8 & \text{si } x = 5,\ 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculer E(X),E(X^2) et Var(X)

Exercice No.15

Soit X une variable aléatoires telle que E(X)=50 et Var(X)=4. Trouver : i) E(X^2), ii) Var(2X+4), iii) L'écart-type de 2X+4, iv)Var(-X), v) L'ecart-type de –X.

Exercice No.16

Considérons l'expérience qui consiste à lancer deux dés. Notons $X1$ la variable aléatoire qui prend les valeurs i, i = 1, ... , 6 selon le nombre de points donnés par le premier dé et $X2$ la variable aléatoire qui prend les valeurs j, j = 1, ... ,6 selon le nombre de points donnés par le deuxième dé. Soit $Y = X1 + X2$.
i) Donner la densité $fy(x) = P(Y = x)$ et la fonction de répartition $Fy(x) = P(Y < x)$ de la variable aléatoire Y.
i). Calculer E(Y).ii). Calculer *Var(Y).*

Exercice No.17

Une urne contient *a* boules blanches et *b* boules noires. On extrait de l'urne une boule à la fois et par la suite, on introduit dans l'urne, après chaque extraction, la boule extraite ainsi que c boules de sa couleur. Soit Xn, n = 1, 2, 3, ... la variable aléatoire associée à la sélection de rang *n où Xn* prend la valeur 0 si la boule pigée est blanche et la valeur 1 si la boule pigée est noire.
i) Montrer que toutes les variables aléatoires Xn, n = 1, 2, 3, ... ont la même loi de probabilité.
ii) Posons $Yn = X1 + X2 + \cdots + Xn$., Calculer $E(Yn)$ et $Var(Y\boldsymbol{n})$. Que représente la variable aléatoire Yn ?

Exercice No.18

Soit *(X, Y)* un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant

X/Y	-1	0	1
0	1/18	0	1/18
1	1/18	8/18	1/18
2	1/18	4/18	1/18

i) les lois marginales de probabilité des variables aléatoires X et Y.
ii) la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y).*