

Solution de l'exercice No 8

Représentons par A l'événement "la boule extraite de l'urne U_2 est blanche". Cet événement peut être réalisé par deux événements incompatibles A_1 et A_2 , où :

- A_1 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est blanche et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2 ",
- A_2 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est noire et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2 ".

On a $A = A_1 \cup A_2$ et donc $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, car $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Or

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1},$$

car l'événement A_1 consiste en la réalisation de deux événements à savoir: B_1 le choix d'une boule blanche de l'urne U_1 (avec probabilité $P(B_1) = \frac{a}{a+b}$) que l'on introduit dans l'urne A_2 et B_2 la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2 (probabilité $P(B_2 | B_1) = \frac{c+1}{c+d+1}$), $P(A_1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1)$.

De façon analogue,

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{a(c+1)}{(a+b)(c+d+1)} + \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)} \\ &= \frac{ac + bc + a}{(a+b)(c+d+1)}. \end{aligned}$$