

Exercice (1).

Un étudiant répond à une question à choix multiple. Soit p la probabilité qu'il connaisse la réponse. Il y a m réponses possibles et on admet qu'une réponse au hasard est correcte avec une probabilité $1/m$. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaissait la réponse s'il a répondu correctement ?

Solution

Soit A l'événement "l'étudiant répond correctement à la question" et B l'événement "il connaît la réponse".

Alors :

$$\begin{aligned} P(B/A) &= P(A \cap B)/P(A) \\ &= P(A/B)P(B)/(P(A/B)P(B) + P(A/B)P(B)) \\ &= p/(p+(1-p)/m) \\ &= mp/(1 + (m-1)p) \end{aligned}$$

Si $p = 1/2$ et $m = 5$, la probabilité cherchée est : $5/6$.

Exercice (2).

La probabilité d'obtenir "face" pour la pièce A est $1/4$ et pour la pièce B , la probabilité est $3/4$. On choisit une des deux pièces et on la jette deux fois. Si on obtient deux "face", quelle est la probabilité que la pièce B ait été utilisée ?

Solution

Soit B l'événement "on a choisi la pièce B ". Soit F l'événement "on a tiré deux fois face".

On a $P(B) = 1/2$, $P(F/B) = 9/16$ et $P(F/A) = 1/16$.

$$P(B/F) = P(B)P(F/B)/(P(B)P(F/B) + P(A)P(F/A)) = 9/10$$

Exercice (3)

Une boîte contient des lampes de 3 types distincts. Ces lampes donnent plus de 100 heures de fonctionnement avec la probabilité pour le type 1 de 0.7, pour le type 2 de 0.4 et pour le type 3 de 0.3. On suppose la répartition suivante :

-20 % des lampes sont de type 1

-30 % des lampes sont de type 2

-50 % des lampes sont de type 3

Quelle est la probabilité qu'une lampe choisie au hasard fonctionne plus de 100 heures ?

Si la lampe fonctionne plus de 100 heures quelle est la probabilité qu'elle soit de type j pour

$j = 1, 2, 3$?

Solution

Soit A l'événement "la lampe choisie fonctionne plus de 100 heures" et soit F_j l'événement "elle est de type j ".

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/F_1)P(F_1) + P(A/F_2)P(F_2) + P(A/F_3)P(F_3) \\ &= 0.7 \times 0.2 + 0.4 \times 0.3 + 0.3 \times 0.5 \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle :

$$P(F_j/A) = P(A \cap F_j)/P(A) = P(A/F_j)P(F_j)/P(A)$$

d'où :

$$P(F_1/A) = 0.7 \times 0.2 / 0.41 = 14/41,$$

$$P(F_2/A) = 0.4 \times 0.3 / 0.41 = 12/41,$$

$$P(F_3/A) = 0.3 \times 0.5 / 0.41 = 15/41$$