Exercice (1). Soit E l'ensemble à 12 éléments$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. Dénombrer les parties de E à5 éléments qui contiennent:

1.1 a et b,

1.2 a mais pas b,

1.3 b mais pas a,

1.4 ni a, ni b.

2. En déduire la relation $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq p \leq n$, on a $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Solution

1.1. Puisque deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10. Le nombre recherché est C_{10}^3.

1.2. Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque b est exclu et qu'on ne peut bien sûr par reprendre a). Il y a donc C_{10}^4 telles parties.

1.3. Même chose que précédent.

1.4. On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a C_{10}^5 parties ne comprenant ni a ni b.

2. Il y a C_{12}^5 parties à 5 éléments de E. Mais on a réalisé une partition de ces parties, celles qui contiennent a et b, celles qui contiennent seulement un des deux éléments, celles qui ne contiennent aucun des deux. D'où la formule demandée.

3. On part cette fois d'un ensemble à n éléments dont on fixe deux éléments a et b. Le nombre de parties à p éléments de cet ensemble est C_n^p . On réalise une partition de ces parties en les parties:

- contenant a et b : il y a en a C_{n-2}^{p-2} (il reste $p-2$ éléments à choisir parmi $n-2$),
- contenant a mais pas b : il y a en a C_{n-2}^{p-1}
- contenant b mais pas a : il y a en a C_{n-2}^{p-1}
- ne contenant ni a ni b : il y a en a C_{n-2}^{p}

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4. On applique trois fois la relation du triangle de Pascal: une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième

$$\begin{aligned} C_n^p &= C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \\ &= C_{n-2}^{p-2} - C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p \end{aligned}$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

Exercice (2). Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
3. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
4. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement le chiffre 4?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
3. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Solution

1. Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.
2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.
3. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

Pour la dexième partie de l'exercice on a:

1. On cherche cette fois un arrangement sans répétition de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.
2. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.

3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$