

MECA-FLU III : DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS ET INCOMPRESSIBLES

Dans ce chapitre, les fluides étudiés ont une viscosité nulle, et une masse volumique « ρ » constante (ce qui **peut** être le cas des gaz lorsque leur vitesse d'écoulement est inférieure à 0,3 fois la vitesse du son).

Il va ressortir de ce chapitre, deux relations particulièrement importantes pour le régleur :

- la relation de continuité
- l'équation de Bernoulli

QUELQUES RAPPELS :

La description d'un écoulement de fluide se fait dans le cadre de la description « eulérienne ». Rappelons les principaux points de cette description :

- les grandeurs cinématiques et dynamiques (ρ , $\vec{v}$, ...) sont associées aux points de l'espace.
C'est à dire qu'elles sont fonctions du point de l'espace considéré, et non de la cellule de fluide envisagée
- une cellule de fluide arrivant en un certain point de l'espace possède les caractéristiques cinématiques et dynamiques de ce point
- les **lignes de courant** (L.C.) sont les courbes partout tangentes aux vecteurs vitesses des points de cette ligne
- on définit un **tube de courant** (T.C.) par l'ensemble des L.C. s'appuyant sur un contour fermé

Un écoulement très utilisé dans la pratique est celui pour lequel les grandeurs masse volumique (ρ), pression (p), et vitesse ($\vec{v}$) sont INDEPENDANTES DU TEMPS, on parle alors d'**ÉCOULEMENT STATIONNAIRE** ou **PERMANENT**.

ATTENTION : encore une fois, répétons bien que cela ne signifie pas que le fluide a une vitesse constante partout, mais seulement que la vitesse du fluide en un point donné est la même à chaque instant. Le fluide peut subir une accélération entre deux points.....

Nous distinguerons dans le prochain chapitre, les régimes laminaires et les régimes turbulents. Mais la distinction ne s'impose pas ici, puisque les fluides traités sont supposés parfaits, c'est à dire que les cellules de fluides glissent sans frottement les unes sur les autres. Par conséquent, les L.C. ne peuvent pas se couper.

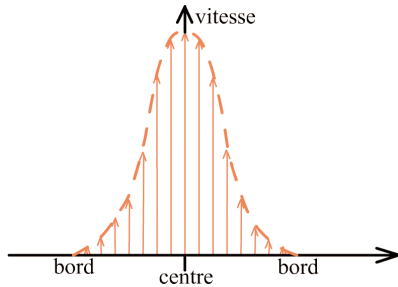
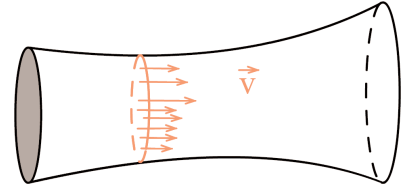
Les différents principes de conservation de la Physique vont nous donner des équations très importantes. Le principe de conservation :

- de la **MASSE** débouche sur l'**ÉQUATION DE CONTINUITÉ**
- de la **QUANTITÉ DE MOUVEMENT** débouche sur le **THÉOREME D'EULER**
- de l'**ÉNERGIE** débouche sur le **THÉOREME DE BERNOULLI**

I L'EQUATION DE CONTINUITE

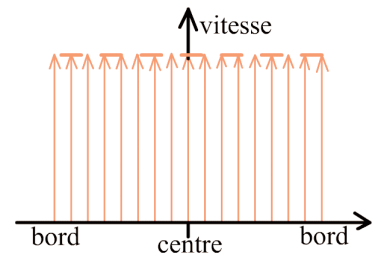
1) Profil de vitesse

Le profil de vitesses donne la norme de la vitesse en fonction de l'éloignement de la paroi, ou à l'intérieur d'un T.C. :



Pour des **fluides réels**, la vitesse est quasi-nulle sur la paroi et maximale au centre.

Pour des fluides parfaits, la vitesse est constante sur toute la section.



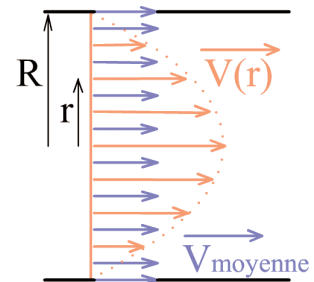
Dans la plupart des cas, on peut définir une vitesse moyenne sur la section, et considérer que cette vitesse moyenne est celle en tout point de la section. Cette façon de raisonner, quand elle est réalisable, est bien pratique : en effet, l'écoulement est alors UNIDIMENSIONNEL, c'est à dire, qu'il n'y a pas de variation transversale (ou dit autrement l'écoulement a même propriété après une rotation autour de l'axe de la canalisation).

Les écoulements unidimensionnels seront les seuls abordés dans ce cours.

EXEMPLE : calculons la vitesse moyenne pour un profil de vitesses parabolique. La vitesse pour un point éloigné de l'axe d'une distance « r » s'exprime par :

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

La vitesse moyenne est donnée par la somme de toutes les vitesses pour un « r » allant de 0 à « R » rayon de la canalisation divisée par la section (le nombre de valeurs prises en compte...)

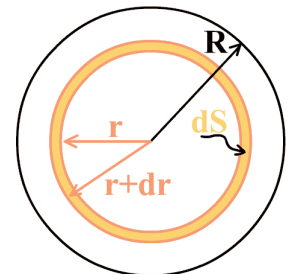


On décompose la section de la canalisation en surfaces élémentaires « dS » suffisamment petites pour considérer que sur ces surfaces dS la vitesse est la même partout.

- la surface dS a une aire : $dS = 2\pi.r.dr$
- la somme des vitesses sur dS vaut donc : $2\pi.r.dr.v(r)$
- il ne reste plus qu'à sommer sur toutes les dS :

$$v_{TOTALE} = \int_0^R 2\pi.r.v(r).dr$$

ce qui donne pour la moyenne :



$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi.R^2} \cdot \int_0^R 2.\pi.v(r).r.dr = \frac{2.v_0}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4.R^2} \right]_0^R = \frac{v_0}{2}$$

2) Débits

En appelant « dV » et « dm » respectivement le volume élémentaire et la masse élémentaire traversant une section donnée S pendant le temps élémentaire « dt », on définit :

- **le débit volumique :**

$$Q_v \frac{dV}{dt} = \frac{S.dl}{dt} = S \cdot \frac{dl}{dt} \text{ expression dans laquelle on reconnaît la vitesse, d'où :}$$

$$Q_v = S.v_{\text{moy}}$$

- **le débit massique :**

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho.dV}{dt} \text{ qui permet d'écrire :}$$

$$Q_m = \rho.Q_v = \rho.S.v_{\text{moy}}$$

Reprenons l'exemple de notre profil parabolique afin de montrer l'intérêt de la vitesse moyenne :

→ calculons directement le débit à travers une section de rayon « R » :

on décompose comme précédemment la section en petites section dS pour lesquelles le débit est, par définition $dQ_v = dS.v(r) = 2\pi.r.dr.v(r)$ le débit total est la somme de tous ces débits élémentaires, soit :

$$Q_v = \int dq_v = \int_0^R 2\pi.r.v(r).dr = \pi R^2 \cdot \frac{v_0}{2}$$

→ en utilisant la vitesse moyenne :

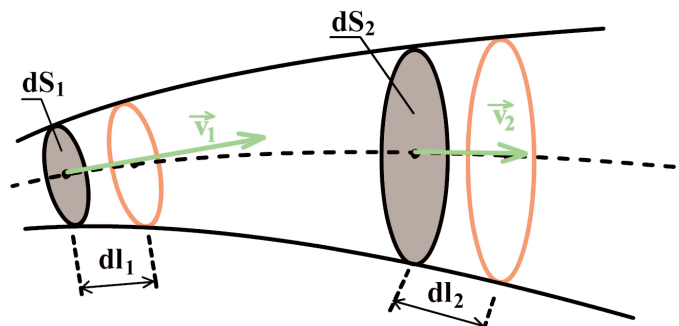
$$Q_v = S.v_{\text{moy}} = \pi.R^2 \cdot \frac{v_0}{2} \text{ ce qui donne bien le même résultat.....}$$

3) Conservation de la masse

Raisonnons sur un T.C. élémentaire limité par sa section d'entrée dS_1 , sa section de sortie dS_2 et sa section latérale dS_L :

si entre dS_1 et dS_2 il n'y a ni accumulation de matière (pas de condensation, évaporation...) ni apparition de matière (pas de tuyau raccordé...), alors :

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_{dS_1} = \left(\frac{dm}{dt} \right)_{dS_2}$$



La question ne se pose pas pour la surface latérale, puisqu'elle est formée des lignes de courant.

Ainsi :

$$\rho_1 \cdot dS_1 \cdot \frac{dl_1}{dt} = \rho_2 \cdot dS_2 \cdot \frac{dl_2}{dt}$$

soit encore :

$$\rho_1 \cdot dS_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot dS_2 \cdot v_2$$

et en introduisant le débit massique :

$$dQ_{m,1} = dQ_{m,2}$$

qui donne après intégration pour tous les tubes de courant traversant la section S_1 et aboutissant sur la section S_2 :

$$Q_{m,1} = Q_{m,2}$$

soit :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

DANS LE CAS PARTICULIER DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES :

La masse volumique en (1) est la même que celle en (2), alors $\rho_1 = \rho_2$ et dans ce cas, le débit volumique est aussi conservé :

$$Q_{v,1} = Q_{v,2}$$

soit :

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

ATTENTION :

Le débit massique est conservé, mais le débit volumique ne l'est que si le fluide est INCOMPRESSIBLE.....

II EQUATION D'EULER ET THEOREME DE BERNOULLI

1) Démonstration

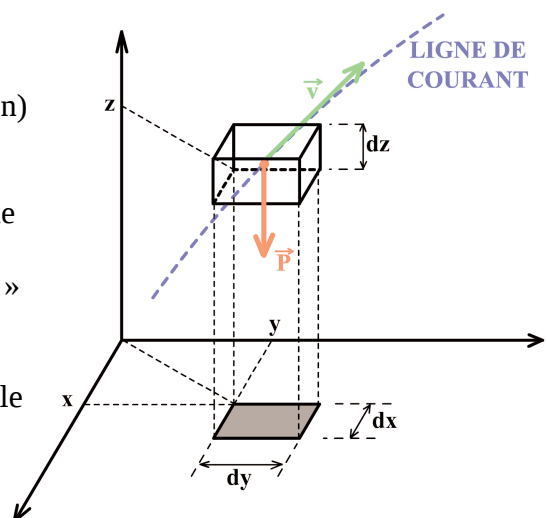
Cette démonstration repose sur la relation fondamentale de la dynamique (ou 2^{ème} loi de Newton)

$$\sum \vec{F}_{ext.} = m \cdot \vec{a}_G$$

Nous allons appliquer cette relation à une particule de fluide, de dimensions très petite « dx », « dy », et « dz » et situé en un point de coordonnées « x », « y » et « z ».

Le volume de cette particule est donc $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Le fluide contenant cette particule de fluide est dans le champ de gravitation terrestre (considéré comme uniforme $\rightarrow \vec{g}$) :



Une démonstration similaire dans le cas d'un fluide immobile nous avait permis d'obtenir la relation fondamentale de la dynamique. Rappelons le résultat obtenu alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x}.dx = 0 ; \frac{\partial p}{\partial y}.dy = 0 ; \frac{\partial p}{\partial z}.dz = -\rho.g.dz$$

Les forces à prendre en compte sont les forces de pression exercées sur les 6 faces de la cellule, ainsi que le poids. La R.F.D. étant une relation vectorielle, projetons cette relation sur chacun des 3 axes.

- **selon l'axe Ox :** faces en « x » et en « x + dx »

$$-p(x+dx, y, z).dy.dz + p(x, y, z).dy.dz = \rho.dx.dy.dz.\frac{dv_x}{dt}$$

où v_x est la vitesse de la cellule selon Ox, et bien sûr, $\rho.dx.dy.dz$ est la masse de cette cellule

La simplification de cette équation donne :

$$-p(x+dx, y, z) + p(x, y, z) = \rho.dx.\frac{dv_x}{dt}$$

ou encore :

$$-\frac{p(x+dx, y, z) - p(x, y, z)}{dx} = \rho.\frac{dv_x}{dt}$$

dans le membre de gauche, on reconnaît la définition de la dérivée de la fonction $p(x,y,z)$ par rapport à la variable « x ». Mais, comme la fonction $p(x,y,z)$ dépend aussi d'autres variables (y et z), cette dérivée est qualifiée de « partielle » et est notée en « d-rond » :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho.\frac{dv_x}{dt} \quad (E_1)$$

- **selon l'axe Oy :** faces en « y » et en « y + dy »

$$-p(x, y+dy, z).dx.dz + p(x, y, z).dx.dz = \rho.dx.dy.dz.\frac{dv_y}{dt}$$

même remarque que ci-dessus...., et on obtient cette fois l'équation (E_2) :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho.\frac{dv_y}{dt} \quad (E_2)$$

- **selon l'axe Oz :**

ici, le poids intervient et l'équation s'écrit :

$$-\rho.dx.dy.dz.g - p(x, y, z+dz).dx.dy + p(x, y, z).dx.dy = \rho.dx.dy.dz.\frac{dv_z}{dt}$$

qui donne :

$$-\rho.g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho.\frac{dv_z}{dt} \quad (E_3)$$

- **expression de la différentielle totale de la pression :**

la pression est une fonction des 3 variables « x », « y », et « z ». Parler de dérivée de la pression n'a plus de sens ici, c'est pourquoi on a introduit la notion de dérivée partielle (on dérive par rapport à une seule des variables, les autres étant considérées comme fixées...). Par contre, on peut se demander comment varie la pression lorsque chacune des variables varie légèrement, c'est à dire lorsque x varie de dx, y de dy et z de dz.

L'impact de ces petites variations sur la fonction est appelé « la différentielle » de la fonction et notée par « d ». Ainsi :

« dp » est la différentielle de la fonction pression « p »
et le lien avec les dérivées partielles est :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}.dx + \frac{\partial p}{\partial y}.dy + \frac{\partial p}{\partial z}.dz$$

commentons succinctement cette expression :

→ $\frac{\partial p}{\partial x}$ est le taux de variation de la pression dans la direction « x » (idem en « y » et « z »)

→ $\frac{\partial p}{\partial x}.dx$ est donc la valeur de la variation de la pression dans la direction « x » lorsque la

variable « x » varie d'une petite quantité « dx » (idem en « y » et « z » ...)

→ cette expression nous donne « simplement » la petite variation « dp » qui résulte des petites variations de ses 3 variables (x, y et z)

A l'aide des 3 équations (E_1) , (E_2) , et (E_3) :

$$dp = (-\rho \cdot \frac{dv_x}{dt}).dx + (-\rho \cdot \frac{dv_y}{dt}).dy + (-\rho \cdot g - \rho \cdot \frac{dv_z}{dt}).dz$$

qui peut se réécrire :

$$dp = -\rho \cdot dv_x \cdot \frac{dx}{dt} - \rho \cdot dv_y \cdot \frac{dy}{dt} - \rho \cdot g \cdot dz - \rho \cdot dv_z \cdot \frac{dz}{dt}$$

soit :

$$dp = -\rho \cdot v_x \cdot dv_x - \rho \cdot v_y \cdot dv_y - \rho \cdot v_z \cdot dv_z - \rho \cdot g \cdot dz$$

on s'approche de l'équation cherchée, et en remarquant que

$$\begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \quad \begin{matrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{matrix} \quad \vec{v} \cdot d\vec{v} = v_x \cdot dv_x + v_y \cdot dv_y + v_z \cdot dv_z = v \cdot dv$$

alors :

$$dp = -\rho \cdot v \cdot dv - \rho \cdot g \cdot dz$$

Victoire, c'est l'équation cherchée.....

$$dp + \rho \cdot v \cdot dv + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

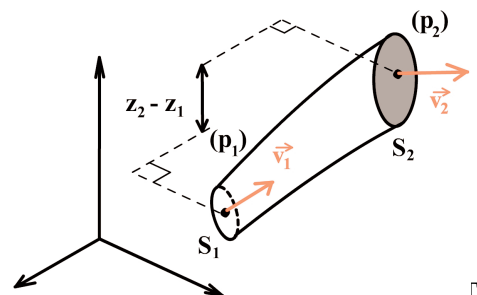
EQUATION D'EULER

Cette équation d'Euler a une application immédiate : le théorème de Bernoulli.

2) Le théorème de Bernoulli

Il suffit d'intégrer l'équation d'Euler entre 2 points de la veine de fluide :

- le point (1) où la pression vaut p_1 la vitesse v_1 et l'altitude z_1
- le point (2) où la pression vaut p_2 la vitesse v_2 et l'altitude z_2



$$\int_{(1)}^{(2)} \text{Euler} \text{ donne } \int_{(1)}^{(2)} dp + \rho.v.dv + \rho.g.dz = 0 = \int_{p_1}^{p_2} dp + \rho.\int_{v_1}^{v_2} v.dv + \rho.g.\int_{z_1}^{z_2} dz$$

soit

$$[p]_{p_1}^{p_2} + \frac{\rho}{2}.[v^2]_{v_1}^{v_2} + \rho.g.[z]_{z_1}^{z_2} = 0$$

d'où le **théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible** :

$$p_1 + \frac{\rho}{2}.v_1^2 + \rho.g.z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}.v_2^2 + \rho.g.z_2$$

C'est le résultat de base de tout étudiant de CIRA qui se respecte.....

Son obtention est immédiate depuis l'équation d'Euler, mais on peut aussi l'obtenir par un bilan en énergie.

Nous ne ferons pas cette démonstration, par contre, il est fondamental de savoir interpréter ce théorème d'un point de vue énergétique, en termes de hauteurs ou encore en termes de pressions.

Les documents constructeurs (pompes, machines, abaque, pertes de charge....) utilisent notamment les deux dernières interprétations.

III INTERPRETATIONS DU THEOREME DE BERNOULLI

1) Bilan énergétique

On peut écrire ce théorème ainsi :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}.v_1^2 + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}.v_2^2 + g.z_2$$

Les termes présents sous cette forme peuvent bien être interprétés en énergie :

- le terme $\frac{1}{2}.v^2$ est un terme d'énergie cinétique PAR kg DE FLUIDE (expression de l' E_c dans le cas où $m = 1$ kg)
- le terme $g.z$ est un terme d'énergie potentielle de pesanteur, là encore PAR kg DE FLUIDE (expression de l' E_p dans le cas où $m = 1$ kg)
- le terme p/ρ est aussi un terme d'énergie PAR kg DE FLUIDE

Le théorème de Bernoulli peut être écrit comme un bilan énergétique par kilogramme de fluide.

2) Bilan des pressions

C'est la présentation du théorème tel qu'obtenu dans la démonstration :

$$p_1 + \frac{\rho}{2}.v_1^2 + \rho.g.z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}.v_2^2 + \rho.g.z_2$$

En particulier, on appelle :

- **pression statique** : le terme $p + \rho \cdot g \cdot z$ notée p^*
- **pression dynamique** : le terme $\frac{\rho}{2} v^2$
- **relation entre pression et énergie** : $\text{pression} = \frac{\text{énergie}}{\text{volume}} = \frac{\text{Puissance}}{\text{débit}}$

REMARQUE :

Les pressions exprimées dans le théorème de Bernoulli sont des pressions absolues !!!

3) Bilan des hauteurs

La dernière écriture possible de ce théorème est :

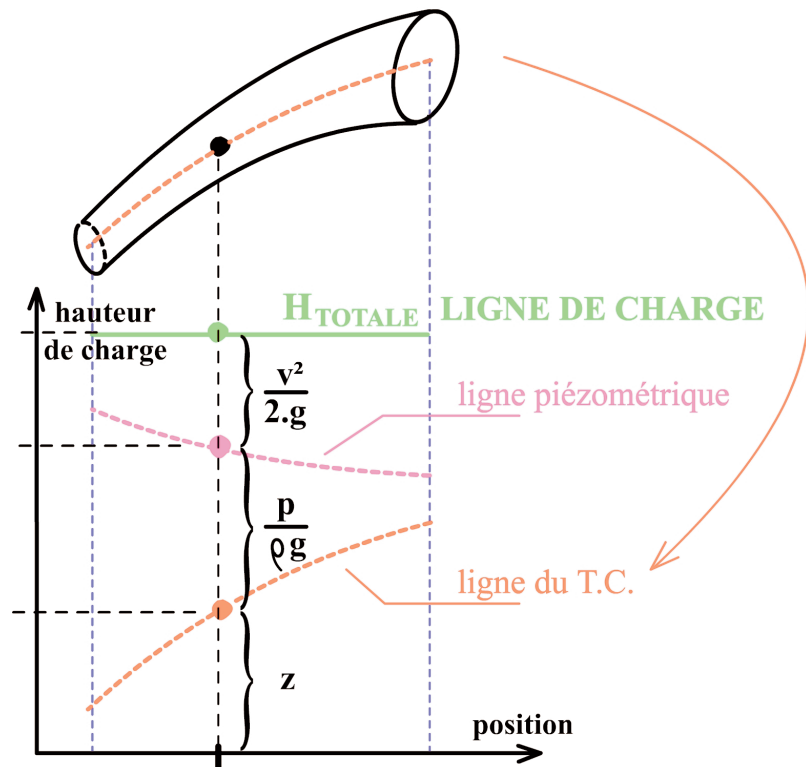
$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot v_1^2 + z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot v_2^2 + z_2$$

On nomme :

- **hauteur manométrique** : le terme $\frac{p}{\rho \cdot g}$
- **hauteur piézométrique** : le terme $\frac{p}{\rho \cdot g} + z$
- **hauteur capable** : le terme $\frac{1}{2 \cdot g} \cdot v^2$
- **altitude** : le terme « z »
- la somme des trois termes est **la charge totale**, ou encore **la hauteur manométrique équivalente**

Le bilan en hauteurs permet la construction d'un diagramme,

le diagramme piézométrique :

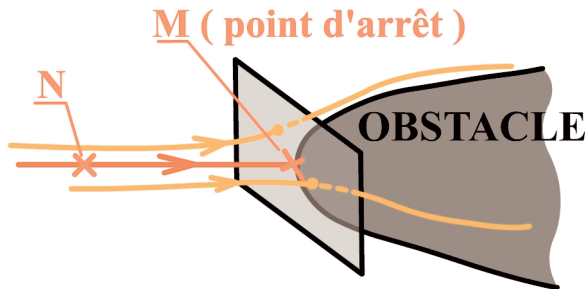


4) Première application : la sonde de Pitot

C'est un instrument de mesure très employé. Il permet d'accéder à la vitesse du fluide (aéronautique) ou encore, si l'on connaît la section de passage du fluide, au débit de fluide (procédés industriels).

Nous en reparlerons dans le cours d'instrumentation.

a- notion de pression d'arrêt :



En présence d'un obstacle, les L.C. contournent l'obstacle, mais il y en a au moins une qui s'arrête en un point de cet obstacle (point M sur le dessin).

En ce point M appelé **point d'arrêt** :

$$v_M = 0$$

la charge totale, exprimée en pression est :

$$p_{\text{totale},M} = p_M + \rho \cdot g \cdot z_M = p_M^*$$

tandis qu'en un point N, en amont de M et sur la même L.C. :

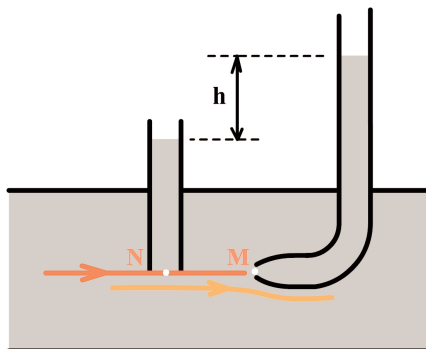
$$p_{\text{totale},N} = p_N + \rho \cdot g \cdot z_N + \frac{1}{2} \rho \cdot v_N^2 = p_N^* + \frac{1}{2} \rho \cdot v_N^2$$

par différence, on obtient (dans le cas où $z_M = z_N$) puisque le long d'une L.C. la charge totale est constante :

$$p_M = p_N + \frac{1}{2} \rho \cdot v_N^2 \quad \text{qui représente « la pression d'arrêt »}$$

Il y a donc une possibilité de mesurer une vitesse de fluide. C'est ce qui est mis en pratique dans la sonde de Pitot.

b- dispositif de Pitot :



On dispose 2 tubes de prises de pression dans la canalisation de l'écoulement. Une prise de pression donne accès à la pression statique (point N) et une prise de pression qui permet l'obtention de la pression d'arrêt (point M).

$$p_M = p_N + \frac{1}{2} \rho \cdot v_N^2 \quad \text{d'une part}$$

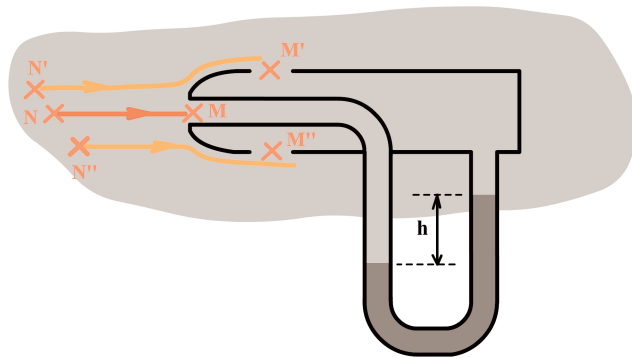
$$p_M = p_N + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{d'autre part}$$

d'où l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

c- exemple de réalisation :

On utilise donc une sonde qui a souvent la forme représentée ci-dessous :



En supposant les pressions en M' et M'' très voisines de celle en N, on a :

$$p_M = p_N + \frac{1}{2} \rho \cdot v_N^2 \approx p_{M'} + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$$

$$p_M = p_{M'} + \rho_{mano} \cdot g \cdot h$$

C'est à dire :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{mano} \cdot g \cdot h}{\rho}}$$

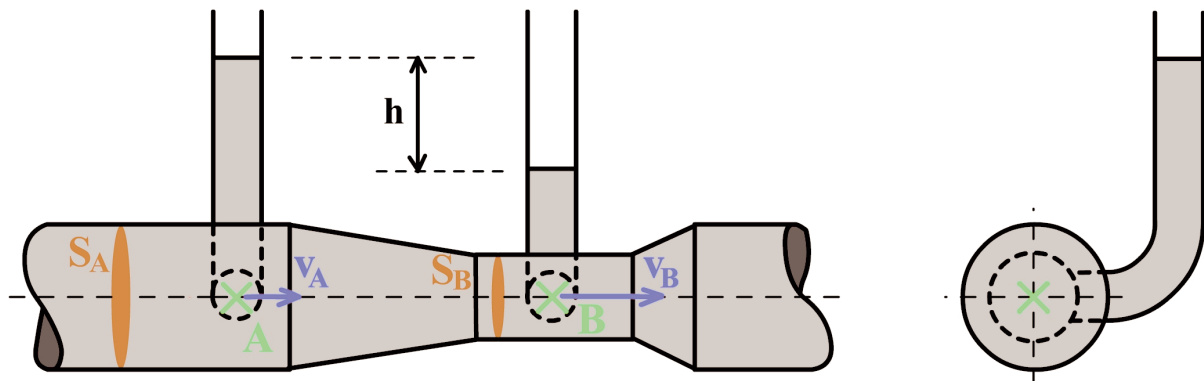
5) Deuxième application : le tube de Venturi

C'est un organe déprimogène là encore très utilisé dans les procédés.

Son principe repose sur l'effet Venturi, autrement dit sur le fait que la pression est plus basse là où la section est plus faible.

Cet effet ne doit plus nous étonner maintenant que nous avons vu le théorème de Bernoulli, puisque ce qui est « gagné » d'un côté est « repris » de l'autre, à savoir une vitesse de fluide plus élevée là où la section est plus faible.....

Le schéma type d'un débitmètre de Venturi est le suivant :



- théorème de Bernoulli : $p_A - p_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2)$
- hydrostatique : $p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot h$
- définition du débit : $Q_V = S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$

ce qui permet d'écrire :

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot Q_V^2 \left[\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right]$$

c'est à dire :

$$Q_V = \left(\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2 \cdot S_B^2} \right) \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

D'un point de vue pratique, les sections ne sont fonctions que du dispositif, si bien que la relation se retient sous la forme :

$$Q_V = k_{\text{VENTURI}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

le débit est proportionnel à la **racine carrée** de la hauteur de dénivélé

IV LE THEOREME D'EULER RELATIF A LA QUANTITE DE MOUVEMENT

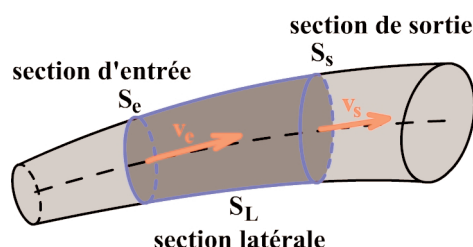
Attention, il s'agit ici du théorème d'Euler, et non pas de l'équation d'Euler, vue ci-dessus. Que ce soit l'équation d'Euler, ou le théorème de Bernoulli qui en découle, ces relations ne nous permettent pas de comprendre pourquoi un tuyau d'arrosage se met à se tortiller lorsqu'on ouvre le robinet, ou encore d'avoir une idée des forces que subissent les canalisations lors du passage d'un fluide.

Le théorème d'Euler va nous permettre de tels calculs. Il concerne les systèmes ouverts. Précisons ce qu'est un système ouvert : c'est un système pouvant échanger de l'énergie, mais aussi de la matière avec l'extérieur. Il est délimité par une surface fermée, supposée rigide ici, appelée « surface de contrôle », et est constitué par le contenu matériel de cette surface de contrôle.

Ainsi, un tuyau d'arrosage, ou plutôt un tronçon de ce tuyau est un système échangeant du fluide avec l'extérieur (même s'il contient en régime permanent la même masse de fluide à chaque instant, ce ne sont pas les mêmes particules de fluide....).

Le système ouvert est le contenu délimité par une « frontière » (par la pensée ou non).

1) Enoncé du théorème d'Euler



Nous l'énonçons uniquement dans le cas d'un **régime STATIONNAIRE** (donc $Q_{m,e} = Q_{m,s} = Q_m$).

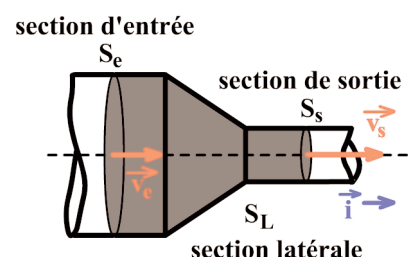
La surface de contrôle est constituée d'une surface d'entrée S_e , d'une surface de sortie S_s et d'une surface latérale S_L

$$Q_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \sum_{\text{système}} \vec{F}_{\text{ext}}$$

2) Exemple d'un changement de section

Il semble assez évident que lors d'un changement brusque de section le long d'une canalisation, le fluide transporté à l'intérieur « pousse » la canalisation. Exprimons cette poussée à l'aide du théorème d'Euler :

Le système ouvert contient l'épaulement et est délimité par une section d'entrée, un peu en amont, une section de sortie un peu en aval et la section latérale qui est la canalisation elle-même...



Nous nous plaçons donc dans le cadre d'un régime stationnaire, et nous nous proposons de déterminer la force exercée par le fluide sur la canalisation $\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}$.

Considérons le système ouvert délimité par la surface de contrôle $\{S_e + S_s + S_L\}$ et constitué par les particules de fluide présentes à l'intérieur de cette surface de contrôle.

Ce système est soumis à son poids, aux forces de pression sur les sections S_e et S_s , ainsi qu'à la force exercée par la conduite sur le fluide $\overrightarrow{F}_{\text{canalisation} \rightarrow \text{fluide}} (= -\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}})$.
Faisons l'hypothèse d'un poids négligeable devant les autres forces :

$$Q_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \vec{P} + \overrightarrow{F}_{\text{pressante},e} + \overrightarrow{F}_{\text{pressante},s} + \overrightarrow{F}_{\text{canalisation} \rightarrow \text{fluide}}$$

soit, donc :

$$Q_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) \approx \overrightarrow{F}_{\text{pressante},e} + \overrightarrow{F}_{\text{pressante},s} + \overrightarrow{F}_{\text{canalisation} \rightarrow \text{fluide}}$$

Projetons sur un axe $(O, \vec{i})$ horizontal :

$$\overrightarrow{F}_{\text{pressante},e} = p_e \cdot S_e \cdot \vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{F}_{\text{pressante},s} = -p_s \cdot S_s \cdot \vec{i} \quad ; \quad \vec{v}_e = v_e \cdot \vec{i} \quad ; \quad \vec{v}_s = v_s \cdot \vec{i}$$

ce qui donne :

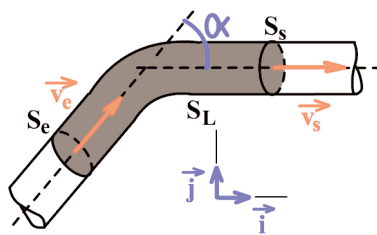
$$\overrightarrow{F}_{\text{canalisation} \rightarrow \text{fluide}} = [Q_m \cdot (v_s - v_e) + p_s \cdot S_s - p_e \cdot S_e] \cdot \vec{i}$$

et donc, d'après la 3^{ème} loi de Newton :

$$\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}} = -[Q_m \cdot (v_s - v_e) + p_s \cdot S_s - p_e \cdot S_e] \cdot \vec{i}$$

N'oublions pas que la pression et la section à l'entrée sont supérieures à la pression et la section à la sortie, ce qui fait que le terme entre crochets a de grandes chances d'être négatif, c'est à dire que la force due au fluide est selon $+\vec{i}$

3) Exemple d'une conduite coudée horizontale



On s'intéresse ici à un élément de conduite coudée horizontale. Le schéma ci-contre est une vue de dessus.

La surface de contrôle est encore :

$$\{S_e + S_s + S_L\}$$

On cherche là aussi $\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}$, et on néglige le poids de ce système ouvert.

La section d'entrée est identique à la section de sortie : $S_e = S_s = S$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{F}_{\text{pressante},e} \begin{vmatrix} p_e \cdot S \cdot \cos \alpha \\ p_e \cdot S \cdot \sin \alpha \end{vmatrix} ; \quad \overrightarrow{F}_{\text{pressante},s} \begin{vmatrix} -p_s \cdot S \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \overrightarrow{F}_{\text{canalisation} \rightarrow \text{fluide}} \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_e \\ v_e \end{matrix} \right| \begin{matrix} v \cdot \cos \alpha \\ v \cdot \sin \alpha \end{matrix} ; \quad \left. \begin{matrix} \vec{v}_s \\ v_s \end{matrix} \right| \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} ; \quad Q_m = \rho \cdot S \cdot v$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} F_x = (\rho \cdot v^2 + p) \cdot S \cdot (1 - \cos \alpha) \\ F_y = -(\rho \cdot v^2 + p) \cdot S \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

on en déduit :

$$\overrightarrow{F_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}} \left| \begin{matrix} (\cos \alpha - 1) \cdot S \cdot (\rho \cdot v^2 + p) \\ \sin \alpha \cdot S \cdot (p + \rho \cdot v^2) \end{matrix} \right.$$