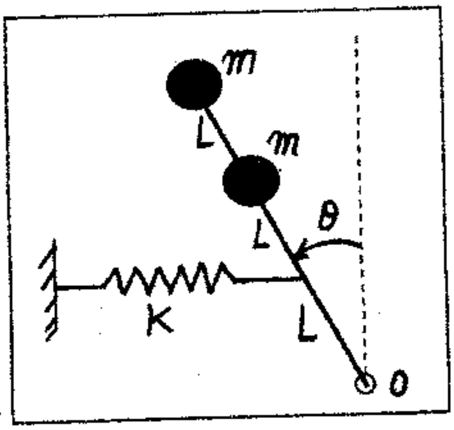
Exercice 1 : Une tige de longueur $3L$ et de masse négligeable, porte deux masse ponctuelles m ; une à l'extrémité supérieure et une autre à une distance L de celle-ci. A une distance L de l'extrémité inferieure est attaché un ressort de raideur k. Le système peut tourner librement autour du point fixe O. A l'équilibre la tige est en position verticale.



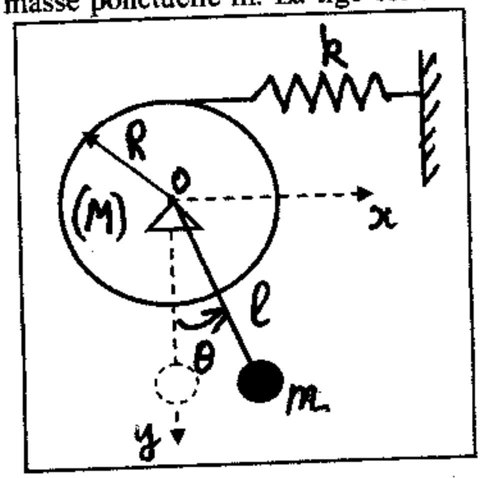
1°/ Calculer le lagrangien en terme de $\theta << 1$.

2°/ En déduire l'équation différentielle du mouvement d système.

3°/ Avec les conditions initiales, à $t=0$ $\theta(0)=0$ et $\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$, trouver la solution de l'équation différentielle donnant l'équation du mouvement de m. On notera ω_0 la pulsation propre.

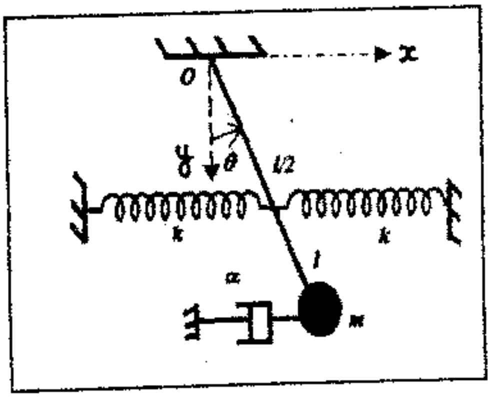
Exercice N°2

On considère un système mécanique oscillant autour d'un axe passant par O. Le système se compose d'une tige métallique de longueur l, de masse négligeable portant à son extrémité une masse ponctuelle m. La tige est solidaire au cylindre de masse M et de rayon R. Un ressort de constante de raideur k relie la génératrice supérieure au bâti. A l'état initial la tige se trouve en position verticale. Faibles oscillations.



1) Ecrire l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle V et le Lagrangien du système.
2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3) Résoudre dans le cas de faible oscillation, l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

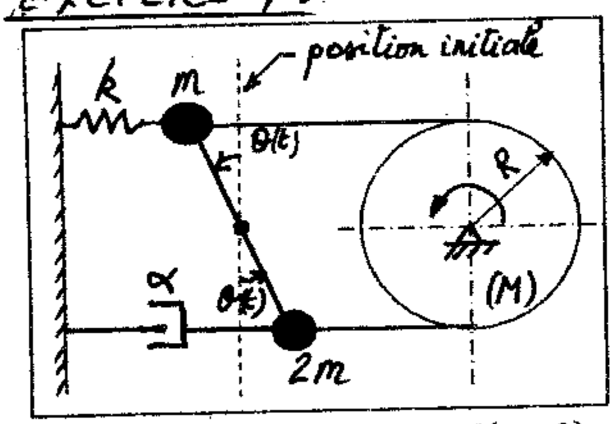
$$\theta(t=0)=0;\ \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0.$$



Exercice 3 : On considère un système mécanique amorti, oscillant autour d'un axe passant par O représenté par une tige métallique de longueur l de masse négligeable reliée par deux ressorts identiques de constante de raideur k au point $l/2$ comme le montre la figure ci-dessous :

1) Etablir le Lagrangien du système.
2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3) En déduire la pulsation propre du système.
4) Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t=0)=0;\ \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$.

Exercice 4 :

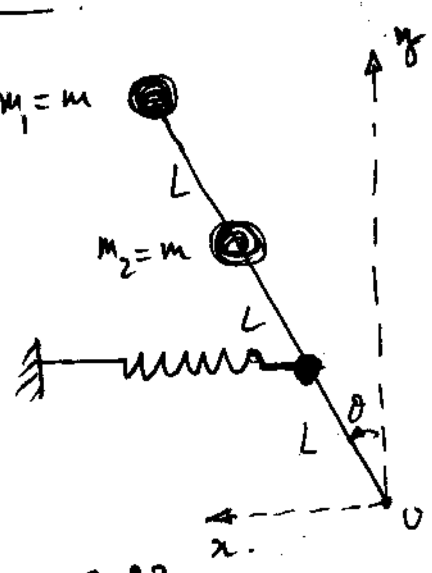


On considère le système mécanique amorti ci-contre. A l'équilibre la tige était verticale et le ressort au repos. Le fil autour du disque est inextensible et non glissant

1) Calculer la fonction de dissipation D.
2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3) En déduire la pulsation propre du système.
4) Résoudre dans le cas de faible oscillation, l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t=0)=0;\ \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$.

solution de la série n°2

Exercice n°1 : *Energie cinétique*



$$m_1 \begin{cases} x_1 = 3L\sin\theta \\ y_1 = 3L\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 3L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1 = -3L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m (3L)^2 \dot{\theta}^2$$

$$m_2 \begin{cases} x_2 = 2L\sin\theta \\ y_2 = 2L\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = 2L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_2 = -2L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m (2L)^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow T_t = \frac{13}{2} m L^2 \dot{\theta}^2.$$

Energie potentielle

$$V_k = \frac{1}{2} k x_k^2 = \frac{1}{2} k (L\sin\theta)^2$$

$$-\frac{\partial V_{m_1}}{\partial y_1} = -mg \Rightarrow V_{m_1} = mg\,3L\cos\theta \;;\; -\frac{\partial V_{m_2}}{\partial y_2} = -mg \Rightarrow V_{m_2} = mg\,2L\cos$$

$$V_t = \frac{1}{2} k (L\sin\theta)^2 + mg\,3L\cos\theta + mg\,2L\cos\theta.$$

Le Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{13}{2} mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kL^2\sin^2\theta - 5mgL\cos\theta$

Equation de mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 13mL^2\ddot{\theta} + kL^2\sin\theta\cos\theta - 5mgL\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta \;,\; \cos\theta \simeq 1.$$

$$13mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 - 5mgL)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{kL - 5mg}{13mL}\right)\theta = 0 \;,\; \omega_0 = \sqrt{\frac{KL - 5mg}{13mL}}$$

Solution de l'équation différentielle : $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

$\theta(0) = A\cos(\omega_0 \cdot 0) = 0 \Rightarrow A = 0 \;;\; \dot{\theta}(t) = \cancel{-A\omega_0\sin\omega_0 t} + B\omega_0\cos\omega_0 t$

$\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = \dot{\theta}_0 \Rightarrow B = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$ d'où $\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$

Exercice N°2

$$m\begin{cases} x_m = l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow T_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$T_M = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2, \quad V_k = \frac{1}{2}k\,x_k^2 = \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta$$

$$-\frac{\partial V_m}{\partial y} = mg \Rightarrow V_m = -mgl\cos\theta$$

$$L = T_t - V_t = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(ml^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -kR^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$

$$\sin\theta \simeq \theta, \ \cos\theta \simeq 1 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\theta} = -(kR^2 + mgl)\,\theta$$

$$\left(ml^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} + \left(kR^2 + mgl\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kR^2 + mgl}{ml^2 + \frac{1}{2}MR^2}\,\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2 + mgl}{ml^2 + \frac{1}{2}MR^2}}$$

$$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad , \quad \theta(0) = A = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = B\omega_0\cos\omega_0 t \Rightarrow \dot{\theta}(0) = B\omega_0 = \dot{\theta}_0 \Rightarrow B = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$$

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Exercice n°3

1) Lagrangien :

$$m\begin{cases} x_m = l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_m = l\dot\theta\cos\theta \\ \dot y_m = -l\dot\theta\sin\theta \end{cases} \text{ d'où } T_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2$$

$$V_k = V_{k_1} + V_{k_2} = \frac{1}{2}k(-x)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2 = k\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2 = k\frac{l^2}{4}\sin^2\theta$$

$$-\frac{\partial V_m}{\partial y} = mg \Rightarrow V_m = -mgy = -mgl\cos\theta.$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - \frac{kl^2}{4}\sin^2\theta + mgl\cos\theta.$$

2) Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha \dot x_m^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot\theta^2 \overset{\simeq 1}{\cos^2\theta}$

3) Equation de mouvement. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = ml^2\ddot\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{kl^2}{2}\theta - mgl\theta = -\left(\frac{kl^2}{2} + mgl\right)\theta$$

$$\sin\theta \simeq \theta, \quad \cos\theta \simeq 1$$

$$-\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = -\alpha l^2\dot\theta \quad \text{d'où : } ml^2\ddot\theta + \alpha l^2\dot\theta + \left(\frac{kl^2}{2} + mgl\right)\theta = 0.$$

$$\ddot\theta + \frac{\alpha}{m}\dot\theta + \left(\frac{\frac{kl^2}{2} + mgl}{ml^2}\right)\theta = 0, \quad \omega_0^2 = \left(\frac{k}{2m} + \frac{g}{l}\right)$$

4) Solution : Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-\alpha}{2m} \pm i\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

d'où $\theta(t) = A\, e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi)$.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

$\theta(0) = 0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ On prend $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\dot\theta(0) = \dot\theta_0 = \frac{-\alpha}{2m}A e^{-\frac{\alpha}{2m}\cdot 0}\cancel{\cos\left(\omega_a\cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right)} - \omega_a A e^{-\frac{\alpha}{2m}\cdot 0}\overset{-1}{\sin\left(\omega_a\cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \dot\theta_0 = \omega_a\cdot A \Rightarrow A = \frac{\dot\theta_0}{\omega_a} \quad \text{d'où } \theta(t) = \frac{\dot\theta_0}{\omega_a}e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\cos\left(\omega_a t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice N°4

$$L = T - V = \frac{1}{4}(6m+M)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(mgR + kR^2)\theta^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{\overline{R\sin\theta}}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2\underbrace{\cos^2\theta}_{\simeq 1} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{-\partial D}{\partial\dot{\theta}} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}(6m+M)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(mgR + kR^2)\theta \ , \quad \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}(6m+M)R^2\ddot{\theta} + (mgR + kR^2)\theta = -\alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{6m+M}\dot{\theta} + \frac{2(mg+kR)}{R(6m+M)}\theta = 0.$$

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

avec $\delta = \dfrac{\alpha}{6m+M}$; $\omega_0^2 = \dfrac{2(mg+kR)}{R(6m+M)}$.

$$\theta(t) = A\,e^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,.t + \phi\right).$$

Conditions initiales:

$$\theta(0) = A\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\delta A\,e^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t + \phi\right) - A\,e^{-\delta t}\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta}(0) = -\delta A\cos\phi - A\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\sin\phi \quad , \text{ on prend } \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\theta}(0) = A\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

d'où $\theta(t) = \dfrac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\,e^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,.t - \dfrac{\pi}{2}\right)$