L'objectif de cette série est de se familiariser avec le calcul du lagrangien. Pour le maximum de systèmes ci-après, calculer les énergies cinétique T et potentielle V et le lagrangien L=T-V.

Exercice 1 : Masse M assujettie à se déplacer sans frottement sur un plan horizontal liée à un ressort de raideur k accroché par son extrémité A un bâti.

Exercice 2 : Un fil inextensible qui porte une masse m s'enroule sans glisser sur une poulie de masse négligeable suspendue au ressort de raideur k.

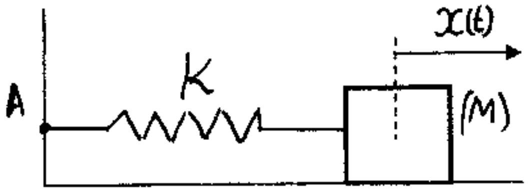


Figure 1

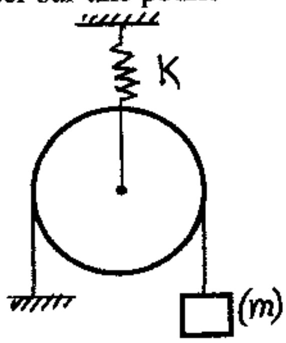


Figure 2

Exercice 3 : Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Le bras GC de longueur *l*, sans masse, solidaire du cylindre porte à son extrémité C, une masse m et se trouve verticale en position d'équilibre. Un ressort de raideur k attaché sur la génératrice supérieure du cylindre lorsqu'il se trouve dans la position d'équilibre, exerce également une action pratiquement horizontale dans le cas de petits mouvements.

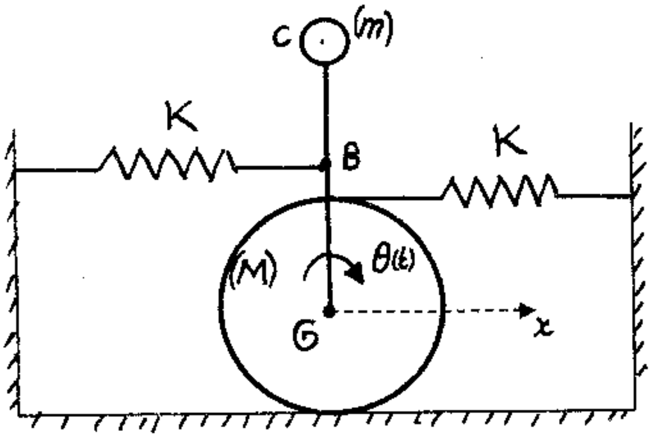


Figure 3

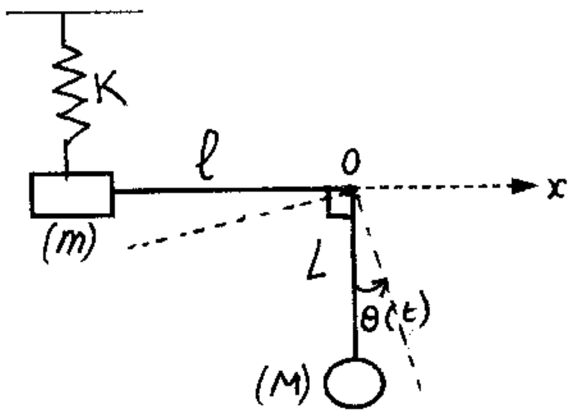
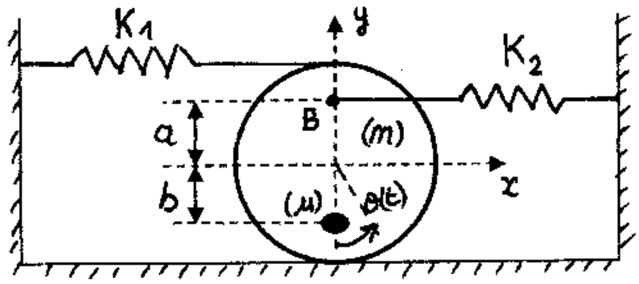


Figure 4

Exercice 4 : Système constitué du bras de longueur L et *l* soudés à angles droit pouvant tourner sans frottement autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure passant par o. la masse m est suspendue au ressort de raideur k. Oscillation de faible amplitude.

Exercice 5 : Un cylindre homogène de masse m, de rayon R sur lequel est fixé à une distance b du centre o une masse ponctuelle μ qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Deux ressorts k_1 et k_2 sont situés en position d'équilibre à la verticale du centre o et à des distances R et a. Trajectoires de A et B assimilables à des trajectoires rectilignes et horizontales (oscillations de faibles amplitude).

Figure 5



Exercice 6 : Un fil inextensible qui s'enroule sans glisser sur la poulie de masse M et R, relie la masse ponctuelle m_2 au ressort k. Une masse m_1 est fixée sur la jante de la poulie. L'axe de la poulie est fixé en o au bâti. Θ désigne la rotation de la poulie. (faibles oscillations).

Exercice 7 : Arbre de torsion de raideur C portant un plateaux (M) avec une masse excentrée m. Rotation du plateau autour de O. A l'équilibre $\varphi=0$.

Exercice 8 : Tige non pesante de longueur L maintenue horizontale dans sa position d'équilibre par les ressorts k_1 et k_2. A son extrémité se trouve une masse m. $x_1=L/3$ et $x_2=2L/3$.

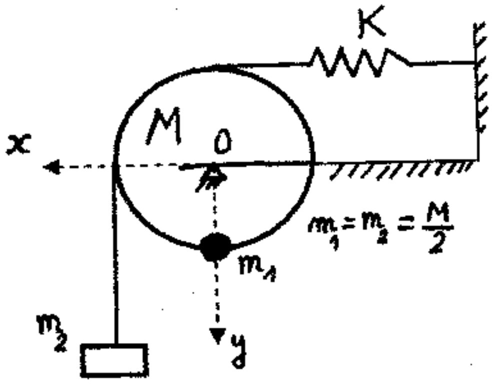


Figure 6

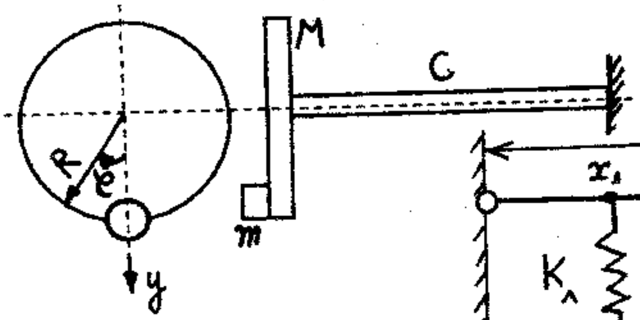


Figure 7

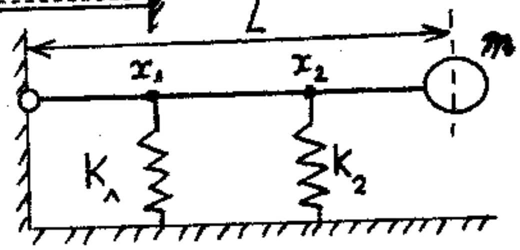


Figure 8

Systèmes à deux degrés de liberté

Exercice 9 : Deux masses mobiles sans frottement sur un plan horizontal reliées par trois ressorts de raideurs k identiques. Les extrémités de l'ensemble sont maintenues fixes. x_1 et x_2 désignent les écarts des deux masses à partir de la position d'équilibre.

Exercice 10 : Petites oscillations verticales sans frottement du système couplé repéré par les déplacements y_1 et y_2 que font les masses m_1 et m_2 autour de leur position d'équilibre.

Exercice 11 : Petits mouvements autour de la position d'équilibre du système constitué d'un pendule de longueur l et de masse m fixé en A et d'un ressort k fixé entre (m) et un support (P) de masse négligeable dont le déplacement horizontal sans frottement y est connu. α désigne l'angle que le pendule avec la verticale.

Exercice 12 : Petites amplitudes du système constitué de 2 pendules simple identiques de longueur l et de masse m mobiles dans un même plan vertical couplés par un ressort k reliant les masses. A l'équilibre, la distance entre les pendules est telle que la tension du ressort est nulle.

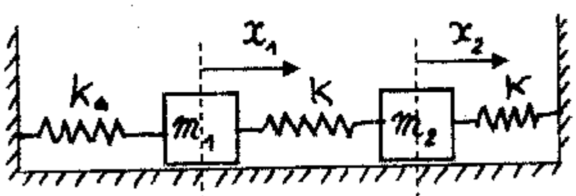


Figure 9

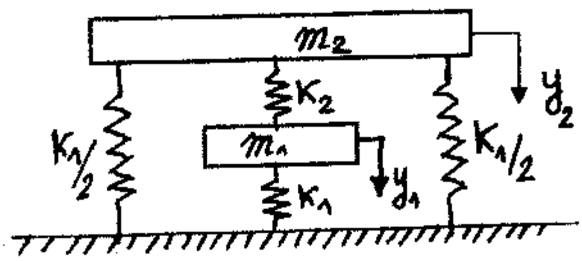


Figure 10

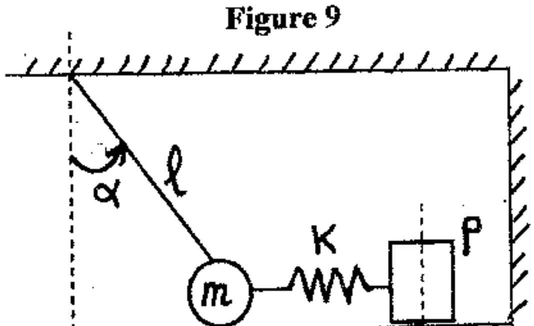


Figure 11

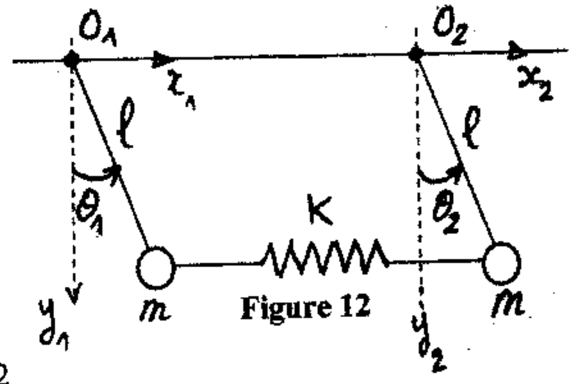


Figure 12

Exercice N°1

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \text{ Force de Rappel } \vec{F}(-kx, 0)$$

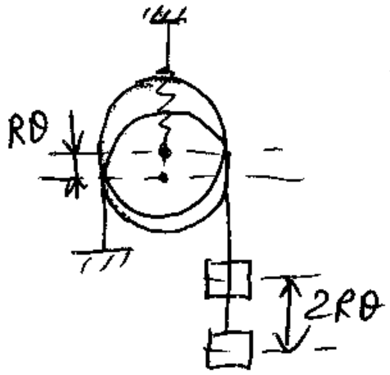
$$\Rightarrow -\frac{dV_k}{dx} = -Kx \Rightarrow V_k = \frac{1}{2} K x^2$$

$$L = T_m - V_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 .$$

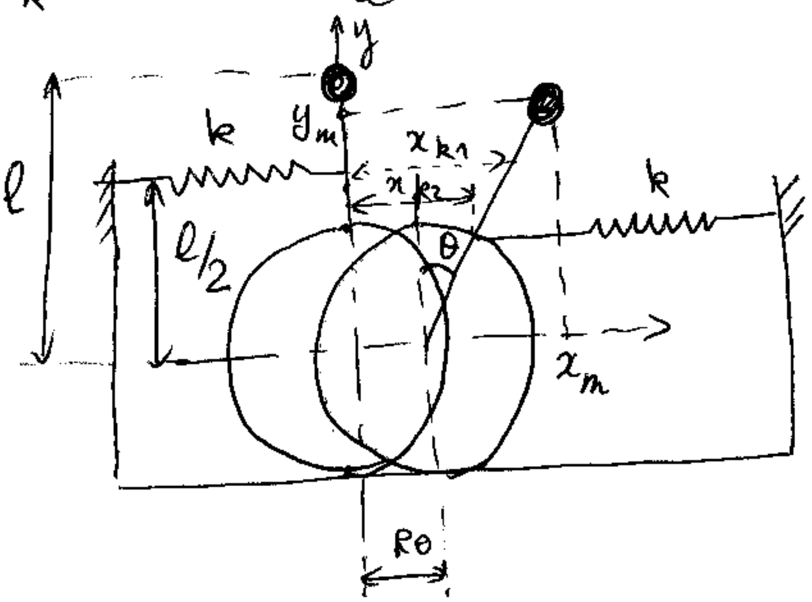
Exercice N°2

Lorsque le cylindre tourne de θ, l'extrémité du ressort se déplace de $R\theta$ et la masse de $(R\theta + R\theta) = 2R\theta$

$$T_M = \frac{1}{2} m \, \dot{\overline{2R\theta}}^{\,2} = 2 m R^2 \dot{\theta}^2 \quad , \quad V_k = \frac{1}{2} k \, x_k^2 = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$



$$L = T_m - V_k = 2 m R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$



Exercice N°3

$$m \begin{cases} x_m = R\theta + l \sin\theta \\ y_m = l \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_m = R\dot{\theta} + l\dot{\theta}\cos\theta . \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

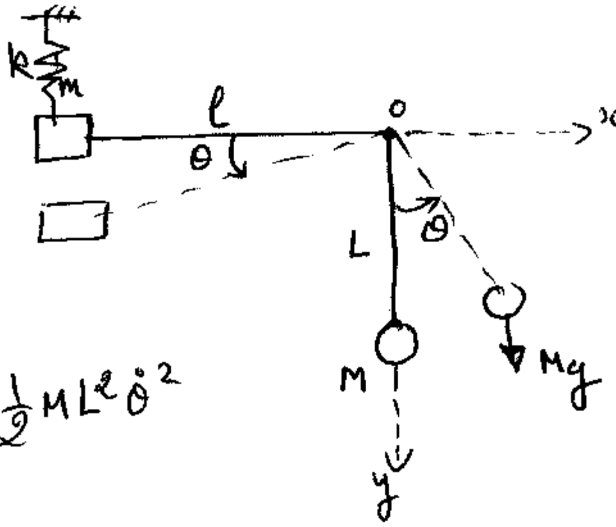
$$T_m = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} m \left[R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2Rl\dot{\theta}^2\cos\theta\right]$$

$$M \begin{cases} R\theta \\ 0 \end{cases} \Rightarrow T_M = \underbrace{\frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2}_{\text{Rotation}} = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$$

$$V_{k_1} = \frac{1}{2} k \left(R\theta + \frac{l}{2}\sin\theta\right)^2 \quad , \quad V_{k_2} = \frac{1}{2} k \left(R\theta + R\sin\theta\right)^2$$

$$L = T_m + T_M - \left(V_{k_1} + V_{k_2}\right) = \left[\frac{1}{2} m \left[R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2Rl\dot{\theta}^2\cos\theta\right] + \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2\right]$$
$$- \left[\frac{1}{2} k \left(R\theta + \frac{l}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(R\theta + R\sin\theta\right)^2\right]$$

Exercice N°4



$$m\begin{cases} x_m = -l\cos\theta \\ y_m = l\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_m = l\dot\theta\sin\theta \\ \dot y_m = l\dot\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot x_m^2 + \dot y_m^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2$$

$$M\begin{cases} x_M = L\sin\theta \\ y_M = L\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_M = L\dot\theta\cos\theta \\ \dot y_M = -L\dot\theta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow T_M = \frac{1}{2}ML^2\dot\theta^2$$

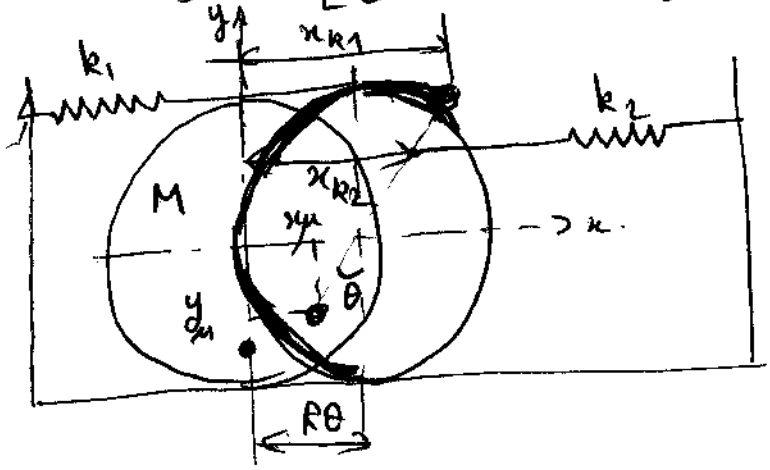
$$T_t = T_m + T_M = \frac{1}{2}\left(ml^2 + ML^2\right)\dot\theta^2$$

$$-\frac{\partial V_M}{\partial y} = Mg \Rightarrow V_M = -Mg\,y_M = -MgL\cos\theta$$

$$V_k = \frac{1}{2}k\,x_k^2 = \frac{1}{2}k\left(l\sin\theta\right)^2 \Rightarrow V_t = \frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta - MgL\cos\theta$$

$$L = T_t - V_t = \frac{1}{2}\left(ml^2 + ML^2\right)\dot\theta^2 - \left[\frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta - MgL\cos\theta\right].$$

Exercice N°5



$$\mu\begin{cases} x_\mu = -R\theta + b\sin\theta \\ y_\mu = -b\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_\mu = -R\dot\theta + b\dot\theta\cos\theta \\ \dot y_\mu = +b\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$T_\mu = \frac{1}{2}\mu\left[R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta\right]\dot\theta^2$$

$$M\begin{cases} x_M = R\theta \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot\theta^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2$$

$$T_t = T_\mu + T_M = \frac{1}{2}\mu\left[R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta\right]\dot\theta^2 + \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2$$

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1\left(R\theta + R\sin\theta\right)^2,\ \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1 4R^2\theta^2$$

$$V_{k_2} = \frac{1}{2}k_2\left(R\theta + a\sin\theta\right)^2,\ \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow V_{k_2} = \frac{1}{2}k_2\left(R+a\right)^2\theta^2$$

$$-\frac{\partial V_\mu}{\partial y} = -\mu g \Rightarrow V_\mu = \mu g\,y_\mu = -\mu g\,b\cos\theta\ ;\ V_t = V_{k_1} + V_{k_2} + V_\mu$$

Exercice N°6

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$$

$$T_t = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$V_T = \frac{1}{2} K R^2 \theta^2 - m_1 g R \cos\theta$$

$$L = T_t - V_t .$$

Exercice N°7.

$$T_M = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2}\right) \dot{\theta}^2 \quad , \quad T_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$-C\theta$: force de rappel pour l'arbre $\Rightarrow V_m = \frac{1}{2} C \theta^2$

$$-\frac{\partial V_m}{\partial y} \Rightarrow V_m = -mg\, y_m = -mg R \cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} \left[MR^2 + \frac{MR^2}{2} \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C\theta^2 + mg R \cos\theta .$$

Exercice n°8

$$T_m = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{L^2}{9} + \frac{4}{9} k_2 L^2 \right) \sin^2\theta .$$

$$L = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (k_1 + 4 k_2) \frac{L^2}{9} \sin^2\theta .$$

Exercice n°9

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left[x_1^2 + x_2^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] .$$

Exercice n°12

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 \quad ; \quad T_{m_2} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 \quad ; \quad T_t = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) .$$

$$V_k = \frac{1}{2} k (l \sin\theta_2 - l \sin\theta_1)^2 = \frac{1}{2} k l^2 (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 .$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} k l^2 (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 .$$