Cours de vibrations, 2ème année ST

Ce cours est extrait d'une façon abrégée du cours présenté à l'USTHB
par
Le Professeur Djelouah

Chapitre I

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

I.1) Oscillation non amorties

I.1.1) Oscillateur linéaire

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

I.1.2) Energie cinétique

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, constitué d'une masse m dont la position est repérée par la coordonnée généralisée q, l'énergie cinétique s'écrit:

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2 \quad (2)$$

a_0 : constante.

I.1.3) Energie potentielle

Les oscillation se font autour de la position d'équilibre stable $q=0$ caractérisée par $\frac{\partial U}{\partial q}(q=0) = 0$

Si on choisit l'origine de l'énergie potentielle à cette position d'équilibre ($U(0)=0$), on démontre que:

$$U(q) \simeq \frac{1}{2} b_0 q^2 \quad (3)$$

avec : $b_0 = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\Big|_{q=0}$

I.1.4) Equation différentielle

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (4)$$

avec L : Lagrangien

$$L = T - U \qquad (5)$$

ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (6)$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k_0}{q_0}$ (7) "pulsation propre"

La résolution de cette équation différentielle ~~écrit~~ est une fonction sinusoïdale du temps.

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (8)$$

où A représente l'amplitude des oscillations, φ est la phase initiale.

Il est important de remarquer que la pulsation propre ω_0 ne dépend que des éléments qui constituent le système physique étudié (masse, ressort, etc...), tandis que l'amplitude A et la phase initiale φ sont calculées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases} \qquad (9)$$

I.2) Oscillation libres des systèmes amortis à un degré de liberté :

Ici on va tenir compte des forces de ~~frottements~~ qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. On considère que ces frottements sont visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse.

I.2.1) Equation de lagrange pour les systèmes dissipatifs.

~~Soit~~ F_q $\frac{d}{dt}$

l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q \quad (10)$$

F_q : représente la composante suivant q de la résultante des forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.

$$F_q = -\beta \dot{q} \quad (11)$$

où β est une constante réelle positive

I.2.2) Cas particulier des oscillateurs de faible amplitude.

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b q^2 \quad (12)$$

on obtient l'équation de mouvement :

$$a\ddot{q} + bq = -\beta\dot{q}$$

c'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (13)$$

où δ est un coefficient positif, appelé facteur (ou coefficient) d'amortissement et défini par :

$$\delta = \frac{\beta}{2a_0} \quad (14)$$

ω_0 est la pulsation propre déjà calculée, $\omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}}$.

I.2.3) Résolution de l'équation différentielle :

la résolution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 :

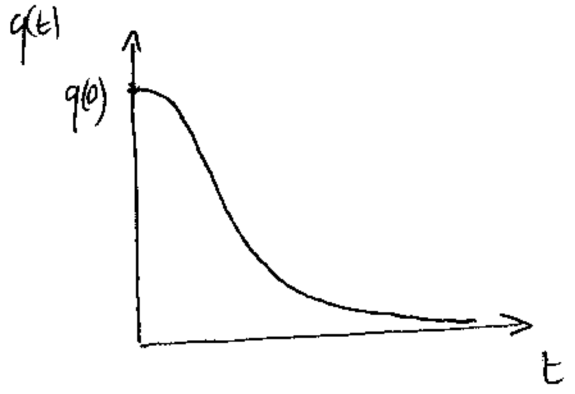
* Si $\delta > \omega_0$, on dit que le système est suramorti ou apériodique
* Si $\delta = \omega_0$, on dit que l'on a un amortissement critique.
* Si $\delta < \omega_0$, on dit que le système est sous-amorti ou ~~pseudopé~~ pseudopériodique

cas où le système est suramorti ($\delta > \omega_0$)

la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$q(t) = A_1 e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} \quad (15)$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro.



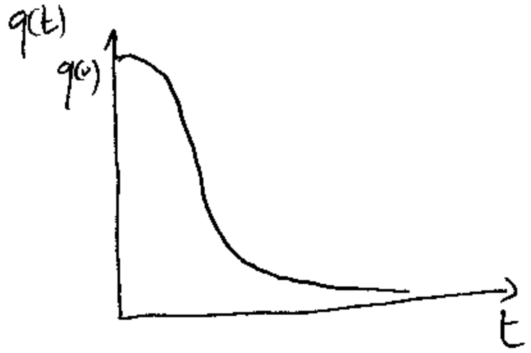
$q(t)$ pour $\delta > \omega_0$.

<u>Cas de l'amortissement critique ($\delta = \omega_0$)</u>

la solution générale de l'équation est de la forme:

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t} \quad (16).$$

$q(t)$ est encore une fonction qui tend vers zéro sans oscillations.



$q(t)$ pour $\delta = \omega_0$.

<u>Cas où le système est sous-amorti ($\delta < \omega_0$)</u>

La solution s'écrit: $q(t) = A\, e^{-\delta t} \cos(\omega_A t + \phi) \quad (17).$

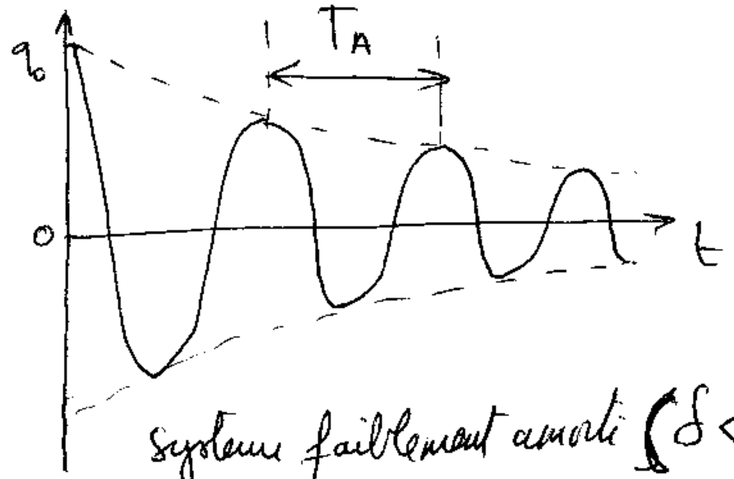
avec $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (18), A et ϕ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$, on obtient:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\omega_0}{\omega_A} q_0 \\ \phi = -\arctg\left(\dfrac{\delta}{\omega_A}\right) \end{cases} \quad (19)$$

⟶

· q(t)



système faiblement amorti ($\delta < \omega_0$)

on remarque que q(t) est enveloppée par deux fonctions exponentielles $\pm \frac{\omega_0}{\omega_A} q_0 e^{-\delta t}$.

Les maxima de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à

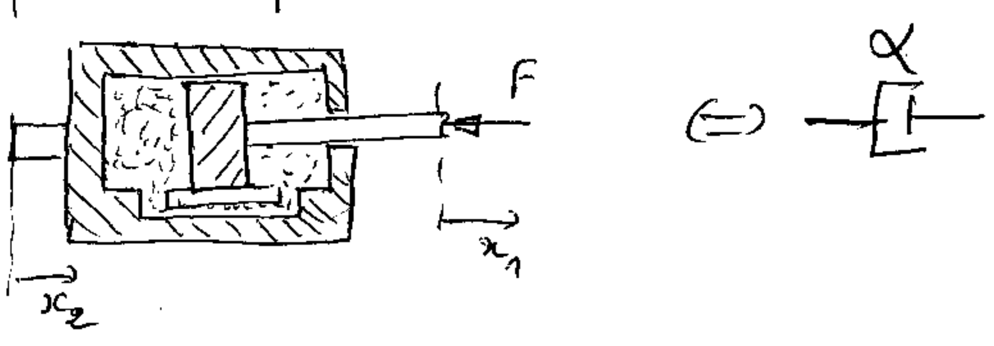
$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} \quad (20).$$

T_A est appelée la pseudo-période.

I.2.4 Exemple

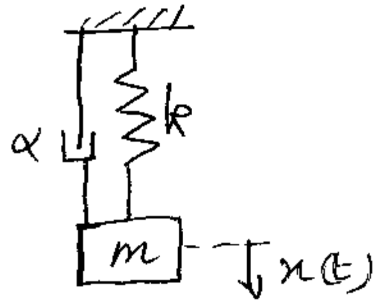
Système mécanique en translation.

Amortisseur mécanique : Un amortisseur mécanique est constitué d'un élément mobile à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide visqueux.



La force de frottement $\vec{F}$ agissant sur la partie repérée par x_1, est donnée par $f_x = -\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$. (21)
où $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ représente la vitesse relative des deux éléments

qui constituent l'amortisseur.



Considérons le cas d'une masse m oscillant verticalement et reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Repérons par x l'écart de la masse m par rapport à la position d'équilibre.

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha \dot{x} \qquad (22)$$

Sachant que : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ et $U = \frac{1}{2} k x^2$, $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

on obtient l'équation différentielle du mouvement.

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + k x = 0 \qquad (23)$$

cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (24)$$

où ω_0 et δ sont des constantes positives appelées respectivement la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (25).$$