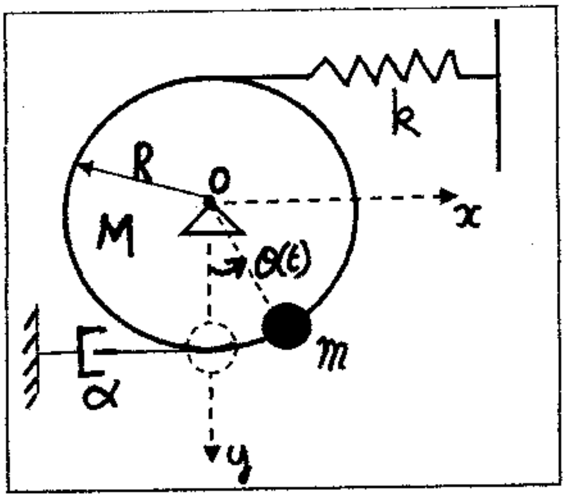
Série de TD N°3

Exercice N°1



On considère le système mécanique amorti, formé par un disque de masse M oscillant autour d'un axe fixe passant par O. A l'équilibre la masse m était à la verticale et le ressort k au repos. L'amortisseur à un coefficient d'amortissement α

1) Montrer que le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{4}\,(2m+M)R^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta - \frac{1}{2}k\,R^2\,\theta^2$$

2) Calculer la fonction de dissipation D.

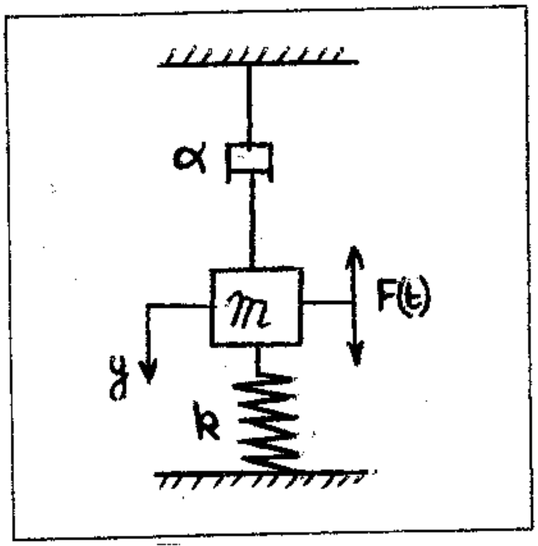
3) Déterminer l'équation différentielle du mouvement sous la forme : $\ddot{\theta}(t) + 2\delta\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\,\theta(t) = 0$

4) Résoudre dans le cas de faible oscillation, l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t=0) = 0$; $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$.

5) Le système devient forcé par l'application d'un couple $\Gamma(t) = \Gamma_0 \sin(\Omega t)$ au centre du disque. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement.

6) Trouver, à l'aide de la representation complexe, la solution permanente de l'équation de mouvement.

Exercice N°



Une masse m, suspendue par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement α, oscille verticalement sous l'effet d'une excitation F de la forme $F(t) = F_0 \cos\Omega t$.

1°) Déterminer l'énergie cinétique du système T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D.

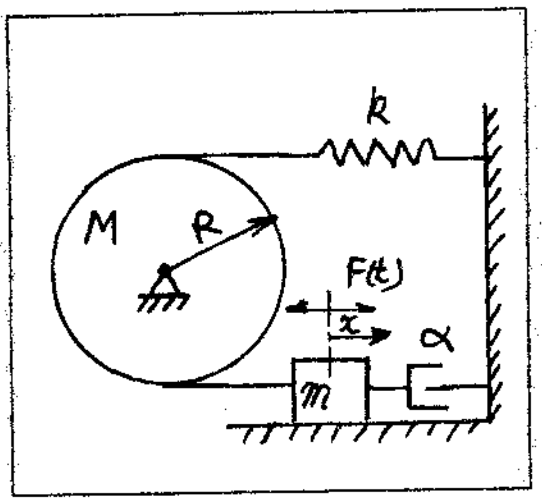
2°) Calculer le Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ du système.

3°) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

4°) Trouver, à l'aide de la representation complexe, la solution permanente de l'equation de mouvement. (Précicer son amplitude A et sa phase φ).

5°) Donner la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.

Exercice N°3



Dans le système ci-contre, le disque de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement α et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé. Une excitation F de la forme $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ est appliquée à la masse m

1°) Déterminer l'énergie cinétique du système T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D.

2°) Calculer le Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ du système.

3°) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

4°) Trouver, à l'aide de la representation complexe, la solution permanente de l'équation de mouvement. (Précicer son amplitude A et sa phase φ).

Solution de la série n°3

Exercice N°1 : $T_M = \frac{1}{4} MR^2\dot\theta^2$, $m \begin{cases} x_m = R\sin\theta \\ y_m = R\cos\theta \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot x_m = R\dot\theta\cos\theta \\ \dot y_m = -R\dot\theta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow T_m = \frac{1}{2} m R^2\dot\theta^2 , \; V_k = \frac{1}{2} k x_k^2 = \frac{1}{2} k R^2 \sin^2\theta .$$

$$-\frac{\partial V_m}{\partial y} = mg \Rightarrow V_m = -mgR\cos\theta$$

$$L = \left(\frac{1}{4} M + \frac{1}{2} m\right) R^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2} k R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot x_m^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot\theta^2\cos^2\theta \simeq \frac{1}{2}\alpha R^2\dot\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} \quad ; \quad -\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = -\alpha R^2\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = \left(\frac{1}{2} M + m\right) R^2\ddot\theta \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -kR^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\sin\theta \simeq \theta, \; \cos\theta \simeq 1 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\theta} = -kR^2\theta - mgR\theta = -(kR^2 + mgR)\theta$$

$$\left(\frac{1}{2} M + m\right) R^2\ddot\theta + \alpha R^2\dot\theta + (kR^2 + mgR)\theta = 0$$

$$\ddot\theta + \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{2} M + m\right)}\dot\theta + \frac{kR^2 + mgR}{\left(\frac{1}{2} M + m\right)R^2}\theta = 0$$

$$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec : } \delta = \frac{\alpha}{M + 2m} \; , \; \omega_0 = \sqrt{\frac{kR + mg}{\left(\frac{1}{2} M + m\right)R}}$$

$$\theta(t) = A e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

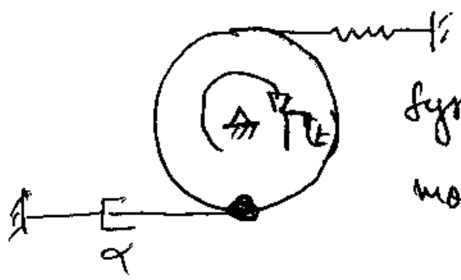
$$\theta(0) = A\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} .$$

$$\dot\theta(0) = -\delta A e^{-\delta.0} \underbrace{\cancel{\cos}\left(\omega_a . 0 - \frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \omega_a A e^{-\delta.0} \underbrace{\cancel{\sin}\left(\omega_a . 0 - \frac{\pi}{2}\right)}_{-1}$$

$$\dot\theta(0) = \omega_a . A \Rightarrow A = \frac{\dot\theta_0}{\omega} \quad \text{d'où} \quad \theta(t) = \frac{\dot\theta_0}{\omega_a} e^{-\delta t}\cos\left(\omega_a t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Suite →

Système forcé



système forcé par un moment de torsion $\Gamma(t) = \Gamma_0 \sin \Omega t$

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\Gamma_0 \sin \Omega t}{(\frac{1}{2}M + m)R^2} = \Delta \sin \Omega t$$

avec : $\Delta = \dfrac{\Gamma_0}{(\frac{1}{2}M + m)R^2}$

En utilisant la notation complexe :

$$\Delta \sin \Omega t \longrightarrow \Delta\, e^{j\Omega t}$$

$$\theta = A \cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}\, e^{j\Omega t}$$

$$\underline{\dot{\theta}} = j\Omega \underline{A}\, e^{j\Omega t} \; ; \; \underline{\ddot{\theta}} = -\Omega^2 \underline{A}\, e^{j\Omega t}$$

$$\underline{\ddot{\theta}} + 2\lambda \underline{\dot{\theta}} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \Delta\, e^{j\Omega t}$$

on obtient : $\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2j\Omega\lambda\right] \underline{A} = \Delta$

d'où $\underline{A} = \dfrac{\Delta}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega} \Rightarrow A = \dfrac{\Delta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$ (module)

et $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Exercice N°2 :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad , \quad U = \frac{1}{2} k y^2 \quad , \quad D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{y}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-\partial D}{\partial \dot{y}} + F \Rightarrow m\ddot{y} + ky = -\alpha \dot{y} + F$$

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

L'equation est de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

avec : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

La solution permanente est $y = A \cos(\Omega t + \phi)$

Notation complexe : $\frac{F_0}{m} \cos \Omega t \longrightarrow \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t}$

$$y = A \cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{y} = \underline{A} e^{j\Omega t}$$

on obtient : $-\Omega^2 \underline{A} e^{j\Omega t} + 2\delta \Omega j \underline{A} e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A} e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t}$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j 2\delta\Omega} \Rightarrow \text{l'amplitude } A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

La phase ϕ : $\quad tg\, \phi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

la condition de résonance est $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

Exercice N°3

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{4} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad , \begin{cases} x = R\theta \\ \dot{x} = R\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2\dot{\theta}^2$$

$$V_k = \frac{1}{2} k\, x_k^2 = \frac{1}{2} k R^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad , D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m + \frac{1}{2}M}\dot{x} + \frac{k}{m + \frac{1}{2}M} x = \frac{F_0}{m + \frac{1}{2}M} \cos \Omega t .$$

l'equation est de la forme : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m + \frac{1}{2}M} \cdot \cos\Omega t$

En utilisant la représentation complexe

$F_0 \cos \Omega t \longrightarrow \underline{F} = F_0 e^{j\Omega t}$; $x = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}\, e^{j\Omega t}$

on obtient : $-\Omega^2 \underline{A}\, e^{j\Omega t} + j2\delta\Omega \underline{A}\, e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A}\, e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m + \frac{1}{2}M} e^{j\Omega t}$

$$\underline{A} = \frac{F_0/(m + \frac{1}{2}M)}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\delta\Omega} \Rightarrow \text{l'amplitude } A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

la phase ϕ : $\quad tg\,\phi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

la pulsation de résonance est Ω_R telle que $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$