**صياغة مسائل النقل**

 تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت. فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.

**1- عرض مسألة النقل:**

 سنقوم بعرض مسألة النقل من خلال المثال أدناه:

**مثال 01-01:** لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية ***O1***، ***O2***، ***O3*** متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع ***D1***، ***D2***، ***D3***، ***D4***، ***D5***، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

 تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: ***a1***، ***a2***، ***a3***، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: ***b1***، ***b2***، ***b3***، ***b4***، ***b5***، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **مركز الإنتاج** | ***O1*** | ***O2*** | ***O3*** |
| **الطاقة الإنتاجية (العرض  *di*)**  | ***a1=240*** | ***a2=160*** | ***a3=260*** |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **مركز التوزيع** | ***D1*** | ***D2*** | ***D3*** | ***D4*** | ***D5*** |
| **الطلب (*bj*)** | ***b1=120*** | ***b2=150*** | ***b3=145*** | ***b4=125*** | ***b5=140*** |

عملية نقل المنتج ***P*** من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل ***Cij***.

***Cij*** تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج ***P*** من مراكز الإنتاج ***i*** إلى مركز التوزيع ***j*** .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***D5*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** | ***Cij*** |
| *C15=*400 | *C14=*500 | *C13=*100 | *C12=*800 | *C11=*100 | ***O1*** |
| *C25=*700 | *C24=*600 | *C23=*300 | *C22=*500 | *C21=*500 | ***O2*** |
| *C35=*800 | *C34=*900 | *C33=*500 | *C32=*900 | *C31=*200 | ***O3*** |

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات ***xij*** الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

**2- نمذجة مسائل النقل:**

**2-1- تشكيل جدول مسائل النقل:**

 إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى **جدول مسألة النقل**، يكون كالتالي:

**الجدول رقم 23: جدول مسألة النقل للمثال 01-01**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D5*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| 240 | ***C15=400******x15*** | ***C14=500******x14*** | ***C13=100******x13*** | ***C12=800******x12*** | ***C11=100******x11*** | ***O1*** |
| 160 | ***C25=700******x25*** | ***C24=600******x24*** | ***C23=300******x23*** | ***C22=500******x22*** | ***C21=500******x21*** | ***O2*** |
| 260 | ***C35=800******x35*** | ***C34=900******x34*** | ***C33=500******x33*** | ***C32=900******x32*** | ***C31=200******x31*** | ***O3*** |
| 660 | 140 | 125 | 145 | 130 | 120 | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

 يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة و هي القيم ***xij*** المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، و كذا كمية الطلب لكل منطقة.

**2-2- الصياغة الرياضية لمسائل النقل:**

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

**أ- تحديد متغيرات القرار:** تمثل القيم ***xij*** متغيرات القرار في مسائل النقل، و عددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

***x11*** : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج ***O1*** إلى مركز التوزيع  ***D1***.

***x43*** : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج ***O4*** إلى مركز التوزيع  ***D3***.

**ب- صياغة دالة الهدف:** دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. و تكون من الشكل التالي:

$$Min Z =∑ C\_{ij} x\_{ij}$$

*Min Z =100 x11+800 x12+100 x13+500 x14+400 x15+500 x21+500 x22+300 x23+600 x24+700 x25+200 x31+900 x32+500 x33+900 x34+800 x35*

**جـ- صياغة القيود:** لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

**قيود العرض:** $\sum\_{j=1}^{m}x\_{ij}= a\_{i} $

*x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = 240*

*x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 160*

*x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 260*

**قيود الطلب:** $\sum\_{j=1}^{n}x\_{ij}= b\_{i}$

*x11 + x21 + x31 = 120*

*x12 + x22 + x23 = 130*

*x13 + x23 + x33 = 145*

*x14 + x24 + x34 = 125*

*x15 + x25 + x35 = 140*

**قيود عدم سلبية المتغيرات:** $x\_{ij}\geq 0$

**المحور الثاني: حل مسائل النقل**

 يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار *xij* المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: **إيجاد الحل الابتدائي الممكن** و التي تتضمن ثلاث طرق و هي: **طريقة الزاوية الشمالية الغربية**، **طريقة التكاليف الدنيا**، **طريقة فوجل التقريبية**، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: **طريقة المسار المتعرج** و **طريقة عوامل الضرب**.

**1- المرحلة الأولى:** **تحديد الحل الابتدائي**

* 1. **1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية *(Méthode du coin nord ouest)*:** يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى و إلى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول،**[[1]](#footnote-2)** و يتم ذلك بإتباع المنهجية التالية و بالتطبيق على المثال السابق:
* أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول و مركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع ***D1*** هو 120 وحدة، بينما حجم العرض ***O1*** هو 240 وحدة، فيحصل ***D1*** على كافة طلبه 120 وحدة من ***D1***، و يتشبع بذلك العمود الأول (***D1***)، و يتبقى لمركز الإنتاج ***O1*** كمية تقدر بــ 120 وحدة.
* بالانتقال إلى الخلية المقابلة و الموافقة لمركز الإنتاج ***O1***، و مركز التوزيع ***D2***، تقدر الكمية المعروضة بـــ 120 وحدة و هي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، و حجم الطلب 130 وحدة، و عليه ستوجه كل الكمية المعروضة من ***O1*** إلى ***D2***، فيتشبع السطر الأول، و يبقى طلب ***D2*** هو 10 وحدات ينبغي على ***O2*** تلبيته، و هكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

**الجدول رقم 24: حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 01-01**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D5*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| 240120 | *400****/*** | *500****/*** | *100****/*** | *800****120*** | *100****120*** | ***O1*** |
| 1601505 | *700****/*** | *600****5*** | *300****145*** | *500****10*** | *500****/*** | ***O2*** |
| 260140 | *800****140*** | *900****120*** | *500****/*** | *900****/*** | *200****/*** | ***O3*** |
| 660 | 140 | 125120 | 145 | 13010 | 120 | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

 و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

***x11=120***: أي أن ***O1*** يقوم بتموين ***D1*** بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 100 وحدة؛

***x12=120***: أي أن ***O1*** يقوم بتموين ***D2*** بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 800 وحدة؛

***x22=10***: أي أن ***O2*** يقوم بتموين ***D2*** بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـــ 500 وحدة؛

***x23=145***: أي أن ***O2*** يقوم بتموين ***D3*** بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 300 وحدة؛

***x24=5***: أي أن ***O2*** يقوم بتموين ***D4*** بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـــ 600 وحدة؛

***x34=120***: أي أن ***O3*** يقوم بتموين ***D4*** بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 900 وحدة؛

***x35=140***: أي أن ***O3*** يقوم بتموين ***D5*** بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 800 وحدة؛

* يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

*Z=(100×120)+(800×120)+(500×10)+(300×145)+(600×5)+(900×120)+ (800×140)=379500*

* عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (***m***)+عدد الأعمدة (***n***) **–** **1**

**1-2- طريقة التكاليف الدنيا *(Méthode du moindre coût)*:**

 تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي (*m+n-1*).**[[2]](#footnote-3)**

 و بالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

* نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول ***O1*** إلى المصب الأول ***D1*** أو من المنبع الأول ***O1*** إلى المصب الثالث ***D3***، و طريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول و الثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛
* أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول ***O1*** إلى المصب الأول ***D1***، حيث يتم تزويده بــ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
* أما التكلفة الموالية فهي 200، و هي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث ***O3*** إلى المصب الأول ***D1***، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـــ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

 **الجدول رقم 25: حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال 01-01**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D5*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| 24095 | *400****/*** | *500****/*** | *100****145*** | *800****/*** | *100****95*** | ***O1*** |
| 16030 | *700****/*** | *600****30*** | *300****/*** | *500****130*** | *500****/*** | ***O2*** |
| *260*23595 | *800****140*** | *900****95*** | *500****/*** | *900****/*** | *200****25*** | ***O3*** |
| 660 | 140 | 12595 | 145 | 130 | 12025 | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

*Z=(100×95)+(100×145)+(500×130)+(600×30)+(200×25)+(900×95)+ (800×140)=309500*

**1-3- طريقة فوجل *(Méthode de Vogel)*:**

 تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:**[[3]](#footnote-4)**

* حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود؛
* تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛
* اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛
* في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
* نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

 و بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

* نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) عــــــلى مستـــــوى الأســـــــطر الثـــــــلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛
* نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
* تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـــ 140 وحدة؛
* و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛
* تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاؤه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـــ 95وحدة؛
* و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

 **الجدول رقم 27: حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال 01-01**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **الفرق** | ***ai*** | ***D5*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| 0300100 | 24095 | *400****95*** | *500****/*** | *100****145*** | *800****/*** | *100****/*** | ***O1*** |
| 200200100 | 16030 | *700****/*** | *600****30*** | *300****/*** | *500****130*** | *500****/*** | ***O2*** |
| 300300100 | 260140 | *800****45*** | *900****95*** | *500****/*** | *900****/*** | *200****120*** | ***O3*** |
| 660 | 14045 | 12595 | 145 | 130 | 120 | ***bi*** |
| 300100 | 100300 | 200 | 300400 | 100 | **الفرق** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

 انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة *Vogel*، و عليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

* **متغيرات الأساس الموجبة:** و عددها 07= (*m+n-1*)

*x13=145, x15=95, x22=130, x24=30, x31=120, x34=95, x35=45*

* **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** و تمثل باقي متغيرات القرار.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية للتحقق منها.

و بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

*Z =100 (0)+800 (0)+100 (145)+500 (0)+400 (95)+500 (0)+500 (130)+300 (0)+600 (30)+700 (0)+200 (120)+900 (0)+500 (0)+900 (95)+800 (45)=281000*

 قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة *Vogel* (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، و أقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

**ملاحظة:** في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض و الطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

**2- المرحلة الثانية:** **تحسين الحل الابتدائي**

 و تتضمن هذه المرحلة طريقتين هما: **طريقة المسار المتعرج** و **طريقة عوامل الضرب.**

**2-1- طريقة المسار المتعرج:** يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، و المقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على *xij = 0*،**[[4]](#footnote-5)** و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

* يتم تحديد و رسم مسارات الخلايا الفارغة؛
* يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة؛
* يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية و تتم دراسة مسارها، و ذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، -، + ...) و يتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (-)؛
* تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

**ملاحظة:** المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة و بخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية.

**مثال 02-01:** ليكن لدينا نموذج النقل التالي:**[[5]](#footnote-6)**

**الجدول رقم 28: مسألة النقل للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1******x14*** | ***3******x13*** | ***5******x12*** | ***2******x11*** | ***O1*** |
| **80** | ***4******x24*** | ***2******x23*** | ***1******x22*** | ***3******x21*** | ***O2*** |
| **70** | ***5******x34*** | ***1******x33*** | ***2******x32*** | ***4******x31*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات افتراضية**

**أولا:** سنقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي و من ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

**الجدول رقم 29: حل مسألة النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90****50****0** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***5*****50** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80****0** | ***4******/*** | ***2*****80** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70****40****0** | ***5*****40** | ***1*****30** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40****0** | **110****30****0** | **50****0** | **40****0** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =2 (40)+5 (50)+2 (80)+1 (30)+5 (40) = 720*

**ثانيا:** سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، و لكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة.

عدد الخلايا المملوءة يساوي 5، و هذا لا يساوي 4+3-1=6= (*m+n-1*)، لهذا نضيف لخلية مملوءة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

**الجدول رقم 30: حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***5*****50** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****80** | ***1*****0** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5*****40** | ***1*****30** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

و بذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

**الجدول رقم 31: حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***5*****50** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****80** | ***1*****0** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5*****40** | ***1*****30** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

***x13 = 3 – 5 + 1 – 2 = - 3***

***x14 = 1 – 5 + 1 – 2 + 1 – 5 = -9***

***x21 = 3 – 2 + 5 – 1 = 5***

***x24 = 4 – 5 + 1 – 2 = -2***

***x31 = 4 – 2 + 5 – 1 + 2 – 1 = 7***

***x32 = 2 – 1 + 2 – 1 = 2***

 بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية ***x14*** هي الأشد سالبية حيث تمكِّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، و بالتالي سندرس مسارها:

0

**50-**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 |
| **40-** | 30+**80-** |

بما أن أقل كمية هي 40=*(min : 40, 80, 50)*، إذا ستأخذ الخلية ***x14*** الفارغة هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

**40**

**10**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **40** |
| **0** | **40****70** |

 و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

**الجدول رقم 32: تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***5*****10** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****80** | ***1*****40** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5*****0** | ***1*****70** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =2 (40)+5 (10)+1 (40)+1 (80)+1 (70) +5 (0) = 360*

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: (*m+n-1*)

***x13 = 3 – 5 + 1 – 2 = - 3***

***x21 = 3 – 2 + 5 – 1 = 5***

***x24 = 4 – 1 + 5 – 1 = 7***

***x31 = 4 – 1 + 2 – 1 + 5 – 2 = 7***

***x32 = 2 – 1 + 2 – 1 = 2***

***x34 = 5 – 1 + 5 – 1+ 2 – 1 = 9***

 نلاحظ أن الخلية ***x13*** ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (3-) لكل وحدة منقولة، و عليه يجب دراسة مسارها.

**10-**

**0**

**40+**

**40-**

 بما أن أقل قيمة هي 10=*(min : 40, 10)*، إذا ستأخذ الخلية الفارغة ***x13*** هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

**0**

**10**

**30**

**50**

 و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

 **الجدول رقم 33: تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1*****40** | ***3*****10** | ***5******/*** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****30** | ***1*****50** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5******/*** | ***1*****70** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =2 (40)+5 (10)+3 (10)+1 (40)+1 (50) +2 (30) +1 (70) = 330*

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: (*m+n-1*)

***x12 = 5 – 3 + 2 – 1 = 3***

***x21 = 3 – 2 + 3 – 2 = 2***

***x24 = 4 – 1 + 3 – 1 = 4***

***x31 = 4 – 1 + 3 – 2 = 4***

***x32 = 2 – 1 + 2 – 1 = 2***

***x34 = 5 – 1 + 3 – 1= 6***

 نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و.ن.

**2-2- طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل):** تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، و هي أكفأ من سابقتها، و التي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية و من ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة،**[[6]](#footnote-7)** و تتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

* نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز *Ui*، و نرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز *Vj*؛
* كل متغيرة أساسية (الخلايا المملوءة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

*Ui=0* مع *Cij = Ui + Vi*

* كل متغيرة غير أساسية (الخلايا الفارغة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

*C′ij = Cij – Vj – Ui*

و المطلوب تحديد قيم المجاهيل*Ui* و *Vi*.

* نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية و تتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في الطريقة السابقة؛
* يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

 بأخذ نفس المثال السابق، و بعد الوصول إلى الحل المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، سنقوم بتحسينه بالاعتماد على طريقة عوامل الضرب، بدءً بتحديد معادلتي الخلايا المملوءة و الخلايا الفارغة.

**أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة:** *Ui=0* مع *Cij = Ui + Vi*

*C11 = U1 + V1* ⇒ 2 = 0 + *V1* ⇒***V1 = 2***

*C12 = U1 + V2* ⇒ 5 = 0 + *V2* ⇒***V2 = 5***

*C22 = U2 + V2* ⇒ 1 = *U2* + *5* ⇒***U2 = - 4***

*C23 = U2 + V3* ⇒ 2 = *- 4* + *V3* ⇒***V3 = 6***

*C33 = U3 + V3* ⇒ 1 = *U3* + *6* ⇒***U3 = -5***

*C34 = U3 + V4* ⇒ 5 = *-5* + *V4* ⇒***V4 = 10***

**ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة:** *C′ij = Cij – Vj – Ui*

*C′13 = C13 – V3 – U1* ⇒ *C′13 =3 – 6 – 0* ⇒ ***C′13 = -******3***

 *C′14 = C14 – V4 – U1* ⇒ *C′14 =1 – 10 – 0* ⇒ ***C′14******=******-******9***

*C′21 = C21 – V1 – U2* ⇒ *C′21 =3 – 2 – (- 4)* ⇒ ***C′21******=******5***

*C′24 = C24 – V4 – U2* ⇒ *C′24 =4 – 10 – (- 4)* ⇒ ***C′24******=******-******2***

 *C′31 = C31 – V1 – U3* ⇒ *C′31 =4 – 2 – (- 5)* ⇒ ***C′31******=******7***

 *C′32 = C32 – V2 – U3* ⇒ *C′32 =2 – 5 – (- 5)* ⇒ ***C′32******=******2***

 يتم اختيار الخلية ***x14*** لأنها تتحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية، لذلك ندرس مسارها بنفس الطريقة السابقة:

**0**

**50**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **0** |
| **40** | **80****30** |

بما أن أقل قيمة هي 40 =*(min : 40, 80, 50)*، إذا ستأخذ الخلية الفارغة ***x14*** هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

**10**

**40**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **40** |
| **0** | **40****70** |

ليصبح جدول النقل كالتالي:

**الجدول رقم 34: تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1******/*** | ***3******/*** | ***5*****10** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****40** | ***1*****40** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5*****0** | ***1*****70** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =2 (40)+5 (10)+ 2 (40)+1 (70) +5 (0) = 360*

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

**أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة:** *Ui=0* مع *Cij = Ui + Vi*

*C11 = U1 + V1* ⇒ 2 = 0 + *V1* ⇒***V1 = 2***

*C12 = U1 + V2* ⇒ 5 = 0 + *V2* ⇒***V2 = 5***

*C22 = U2 + V2* ⇒ 1 = *U2* + *5* ⇒***U2 = - 4***

*C23 = U2 + V3* ⇒ 2 = *- 4* + *V3* ⇒***V3 = 6***

*C33 = U3 + V3* ⇒ 1 = *U3* + *6* ⇒***U3 = - 5***

*C14 = U1 + V4* ⇒ 1 = *0* + *V4* ⇒***V4 = 1***

**ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة:** *C′ij = Cij – Vj – Ui*

*C′13 = C13 – V3 – U1* ⇒ *C′13 =3 – 6 – 0* ⇒ ***C′13 = -******3***

 *C′21 = C21 – V1 – U2* ⇒ *C′21 =3 – 2 – (- 4)* ⇒ ***C′21******=******5***

*C′24 = C24 – V4 – U2* ⇒ *C′24 =4 – 1 – (- 4)* ⇒ ***C′24******=******7***

*C′31 = C31 – V1 – U3* ⇒ *C′31 =4 – 2 – (- 5)* ⇒ ***C′31******=******7***

 *C′32 = C32 – V2 – U3* ⇒ *C′32 =2 – 5 – (- 5)* ⇒ ***C′32******=******2***

 *C′34 = C34 – V4 – U3* ⇒ *C′34 =5 – 1 – (- 5)* ⇒ ***C′34******=******9***

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية ***x13*** و التي تتم دراسة مسارها:

**10-**

**0**

**40+**

**40-**

بما أن أقل قيمة هي 10=*(min : 10, 40)*، إذا ستأخذ الخلية الفارغة ***x13*** هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:

**0**

**10**

**30**

**50**

 و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

 **الجدول رقم 35: تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02-01**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **90** | ***1*****40** | ***3*****10** | ***5******/*** | ***2*****40** | ***O1*** |
| **80** | ***4******/*** | ***2*****30** | ***1*****50** | ***3******/*** | ***O2*** |
| **70** | ***5******/*** | ***1*****70** | ***2******/*** | ***4******/*** | ***O3*** |
| **240** | **40** | **110** | **50** | **40** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =2 (40)+5 (10)+3 (10)+1 (40)+1 (50) +2 (30) +1 (70) = 330*

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

**أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة:** *Ui=0* مع *Cij = Ui + Vi*

*C11 = U1 + V1* ⇒ 2 = 0 + *V1* ⇒***V1 = 2***

*C22 = U2 + V2* ⇒ 1 = - 1 + *V2* ⇒***V2 = 2***

*C23 = U2 + V3* ⇒ 2 = *U2* + *3* ⇒***U2 = - 1***

*C33 = U3 + V3* ⇒ 1 = *U3* + *3* ⇒***U3 = - 2***

*C14 = U1 + V4* ⇒ 1 = *0* + *V4* ⇒***V4 = 1***

*C13 = U1 + V3* ⇒ 3 = *0* + *V3* ⇒***V3 = 3***

**ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة:** *C′ij = Cij – Vj – Ui*

*C′12 = C12 – V2 – U1* ⇒ *C′12 =5 – 2 – 0* ⇒ ***C′12 =*** ***3***

 *C′21 = C21 – V1 – U2* ⇒ *C′21 =3 – 2 – (- 1)* ⇒ ***C′21******=******2***

*C′24 = C24 – V4 – U2* ⇒ *C′24 =4 – 1 – (- 1)* ⇒ ***C′24******=******4***

*C′31 = C31 – V1 – U3* ⇒ *C′31 =4 – 2 – (- 2)* ⇒ ***C′31******=******4***

 *C′32 = C32 – V2 – U3* ⇒ *C′32 =2 – 2 – (- 2)* ⇒ ***C′32******=******2***

 *C′34 = C34 – V4 – U3* ⇒ *C′34 =5 – 1 – (- 2)* ⇒ ***C′34******=******6***

 نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة موجبة، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل المحصل عليها تساوي 330 و.ن.

**3- ملخص خوارزمية حل مسائل النقل:** يمكن تلخيص خوارزمية حل مسائل النقل في الخطوات التالية:**[[7]](#footnote-8)**

**3-1-** بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث:

* تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب؛
* كميات عرض كل منبع، و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب؛

**3-2-** إيجاد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق: الزاوية الشمالية الغربية، التكاليف الدنيا أو طريقة فوجل.

* يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط *m+n-1*.

**3-3-** نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و ذلك إما بطريقة المسار المتعرج أو طريقة التوزيع المعدل؛

* نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل: *C′ij = Cij – Vj – Ui ≥ 0*؛
* إذا كان الحل غير أمثل فنقوم بتحسينه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إن كان أمثلا فنقوم بشرحه.

**4- مسائل النقل في حالة التعظيم:**

 لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، و إنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة. و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:**[[8]](#footnote-9)**

**-** عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛

**-** عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر و عمود و ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر و عمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛

**-** عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛

**-** الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

**مثال 02-02:** لتكن لدينا المعطيات التالية عن مؤسسة إنتاجية، تحتوي على 3 مصانع و 3 مخازن:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| تكلفة النقل | تكلفة الإنتاج | عدد الوحدات | المصانع |
| ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |
| 50 | 80 | 60 | 200 | 2000 | ***O1*** |
| 100 | 30 | 100 | 280 | 2500 | ***O2*** |
| 70 | 120 | 80 | 300 | 1800 | ***O3*** |

 إذا كان عدد الوحدات المطلوبة للمخازن هو على التوالي كالتالي: 1600، 2400 و 2000 وحدة، و إذا كان السعر الوحدوي في المخازن الثلاث هو على التوالي كالتالي: 450 و.ن، 240 و.ن، 400 و.ن.

**المطلوب:** تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تحقيق أعظم ربح.

* 1. **4-1- تشكيل جدول النقل:**

**الجدول رقم 36: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **2000** | *p13* | *p12* | *p11* | ***O1*** |
| **2500** | *p23* | *p22* | *p21* | ***O2*** |
| **1800** | *p33* | *p32* | *p31* | ***O3*** |
| **6300 6000**  | **2000** | **2400** | **1600** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

 ما يلاحظ من الجدول أعلاه أن النموذج غير متوازن، ما يستوجب إضافة عمود آخر وهمي للطلب، فيصبح جدول النقل كالتالي:

**الجدول رقم 37: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **2000** | ***0*** | *p13* | *p12* | *p11* | ***O1*** |
| **2500** | ***0*** | *p23* | *p22* | *p21* | ***O2*** |
| **1800** | ***0*** | *p33* | *p32* | *p31* | ***O3*** |
| **6300 6300**  | **300** | **2000** | **2400** | **1600** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

 بما أننا في هذه الحالة بصدد تعظيم الأرباح فسنقوم بحساب الأرباح الوحدوية و التي نرمز لها بالرمز ***pij*** حيث:

**الربح = سعر البيع الوحدوي – التكاليف الوحدوية الكلية** (و في حالة وجود خسارة تُشطب الخلية)؛

**التكاليف الوحدوية الكلية = تكاليف الإنتاج الوحدوية + تكاليف النقل الوحدوية.**

**التكاليف الوحدوية الكلية:**

$$\begin{matrix}O\_{1}\\O\_{2}\\O\_{3}\end{matrix}\left(\begin{matrix}(200+60)&(200+80)&(200+50)\\(280+100)&(280+30)&(280+100)\\(300+80)&(300+120)&(300+70)\end{matrix}\right)\rightarrow \left(\begin{matrix}260&280&250\\380&310&380\\380&420&370\end{matrix}\right)$$

 **الربح الوحدوي:**

$$\begin{matrix}D\_{1}\\D\_{2}\\D\_{3}\end{matrix}\left(\begin{matrix}(450-260)&(420-280)&(400+250)\\(450-380)&(420-310)&(400+380)\\(450-380)&(420-420)&(400+370)\end{matrix}\right)\rightarrow \left(\begin{matrix}190&140&150\\70&110&20\\70&0&30\end{matrix}\right)$$

و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

**الجدول رقم 38: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **2000** | ***0*** | ***150*** | ***140*** | ***190*** | ***O1*** |
| **2500** | ***0*** | ***20*** | ***110*** | ***70*** | ***O2*** |
| **1800** | ***0*** | ***30*** | ***0*** | ***70*** | ***O3*** |
| **6300 6300**  | **300** | **2000** | **2400** | **1600** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

**4-2- إيجاد الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم:**

**الجدول رقم 39: الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم للمثال 02-02**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***ai*** | ***D4*** | ***D3*** | ***D2*** | ***D1*** |  |
| **2000****400****0** | ***0*****/** | ***150*****400** | ***140*****/** | ***190*****1600** | ***O1*** |
| **2500****100****0** | ***0*****100** | ***20*****/** | ***110*****2400** | ***70*****/** | ***O2*** |
| **1800****200****0** | ***0*****200** | ***30*****1600** | ***0*****/** | ***70*****/** | ***O3*** |
| **6300 6300**  | **300****100****0** | **2000****1600****0** | **2400** | **1600** | ***bi*** |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

*Z =190 (1600)+150 (400)+110 (2400)+0 (100)+30 (1600) +0 (200) = 676000*

عدد الخلايا المملوءة *m+n-1 = 6* .

**4-3- تحسين الحل الابتدائي (استخدام طريقة المسار الحرج):**

تحديد الخلايا الفارغة: *x12 , x14 , x21 , x23 , x31 , x32*

حساب القيم الفارغة للخلايا الفارغة:

*x12 = 140 – 150 + 30 – 0 + 0 – 110 = - 90*

*x14 = 0 – 0 + 30 – 150 = -120*

*x21 =70 – 190 + 150 – 30 + 0 – 0 = 0*

*x23 = 20 – 30 + 0 – 0 = -10*

*x31 = 70 – 190 + 150 – 30 = 0*

*x32 = 0 – 110 + 0 – 0 = -110*

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة سالبة مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل الذي يعظم الأرباح.

1. محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 105. [↑](#footnote-ref-2)
2. محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 125. [↑](#footnote-ref-3)
3. صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره،** ص 98-99. [↑](#footnote-ref-4)
4. محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص 168**.** [↑](#footnote-ref-5)
5. صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره،** ص 104- 110. [↑](#footnote-ref-6)
6. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مرجع سبق ذكره،** ص 307. [↑](#footnote-ref-7)
7. محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 134. [↑](#footnote-ref-8)
8. صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره،** ص 116. [↑](#footnote-ref-9)