**1- تعريف تحليل الحساسية**

**2- أهمية تحليل الحساسية**

**3- حساسية تغير معاملات دالة الهدف**

**تمهيد:**

يبين لنا أن إطار البرمجة الخطية أن الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه من خلال طريقة السمبلاكس ففي كافة نماذج البرمجة الخطية يعتمد على قيم معاملات المتغيرات المختلفة التي يتكون منها نموذج البرمجة الخطية، وذلك أن معاملات دالة الهدف، ومعاملات القيود والثوابت التي تمثل الحدود المتاحة، تعتبر بمثابة مدخلات البيانات ومعلمات نموذج البرمجة الخطية، فالحل العملي لمشكلة البرمجة الخطية لا يعتبر حلاً كاملاً بمجرد التوصل إلى الحل الأمثل، وذلك أن حدوث أي تغيير في قيم المعاملات أو في مدخلات البيانات من شأنه أن يعمل على تغيير مشكلة البرمجة الخطية، ومن ثم فإنه بدون شك سيؤثر على الحل الأمثل للمشكلة.

 **1- تعريف تحليل الحساسية: يقصد بتحليل القيام بعملية تحليل كمي، بهدف البحث عن إجابة سؤال يدور مضمونه حول: " ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي، وهل بذلك يعتبر وسيلة هامة للتأكد من مدى مثالية هذا الحل؟ وهل مازال يعتبر حلاً أمثلاً بعد حدوث التغيرات في قيم المعاملات، أم لا؟ وهل لا يزال يحقق كافة القيود الموضوعة؟ وهل سيظل يمثل الحل الأمثل للفترة المستقبلية؟** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 139)

الواقع أن تحليل الحساسية نموذج البرمجة الخطية، يوفر إجابات محددة ودقيقة عن كل هذه التساؤلات، وذلك من خلال إستخدام قواعد محددة يتم تطبيقها بدون الحاجة إلى إعادة حل النموذج كله، وذلك لكي يمكن الاستفادة من هذا النموذج في مجالات عديدة لاتخاذ القرارات الإدارية.

 **2- أهمية تحليل الحساسية: تتجلي فيما يلي:** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، الصفحات 139-140)

\* تحديد مدى استجابة الحل الأمثل الذي يتم التوصل إليه للتغيرات التي قد يتم إدخالها على قيم المعاملات المتعلقة بهذا الحل؛

\* تحليل ودراسة مدى تأثيرات التغييرات في معاملات النموذج على الحل الأمثل؛ والاستفادة من هذه التغييرات في اتخاذ القرارات؛

\* إمكانية التوصل إلى تقديرات دقيقة لمعاملات (معلمات) نموذج البرمجة الخطية، حيث أن تحديد المعاملات التي تؤثر أكثر من غيرها على قيمة دالة الهدف من شأنها اتاحة إمكانية التوصل إلى أفضل التقديرات لهذه المعلمات، وذلك بشكل يساهم في زيادة درجة الثقة في نموذج البرمجة الخطية، وفي الحل المستخرج منه.

فتحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية، يركز على التغييرات التالية في المدخلات الآتية:

* التغييرات في معاملات دالة الهدف "$c\_{i}$"
* التغييرات في الثوابت التي تمثل الطاقة المتاحة "$b\_{i}$"'
* التغييرات في مصفوفة القيود أو المعاملات "$a\_{ij}$" والتي قد ترجع إلى:

- إضافة متغير جديد؛

- إحداث تغير في الأعمدة الموجودة؛

- إضافة قيود جديدة للموارد المتاحة.

ولفهم أساسيات وكيفية تطبيق تحليل الحساسية وكيفية معالجة التغييرات السابقة من خلال المثال التطبيقي التالي:

تنتج إحدى المؤسسات الصناعية ثلاث منتجات ($,x\_{1},x\_{2},x\_{3}$) ويبلغ هامش مساهمة الوحدة من كل منتوج 2 دج، 3 دج، 1 دج على التوالي، كما تحتاج هذه المنتجات إلى نوعين من الموارد هما: العمل المباشر، والمواد الخام، وقد ظهر نموذج البرمجة الخطية بالشكل التالي:

|  |
| --- |
| $$MaxZ=2x\_{1}+3x\_{2}+x\_{3}$$ |
|  |
| $\frac{1}{3}x\_{1}+\frac{1}{3}x\_{2}+\frac{1}{3}x\_{3}\leq 1$قيد العمل المباشر  |
| $$\frac{1}{3}x\_{1}+\frac{4}{3}x\_{2}+\frac{7}{3}x\_{3}\leq 3قيد مواد الخام $$ |
| $$x\_{1},x\_{2},x\_{3}\geq 0$$ |

ويظهر الجدول المبدئي على النحو التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | 0 | 1 | $$\frac{1}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$s\_{1}$$ | 0 |
| 3 | 1 | 0 | $$\frac{7}{3}$$ | $$\frac{4}{3}$$ | $$\frac{1}{3}$$ | $$s\_{2}$$ | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $$z\_{i}$$ |
|  | 0 | 0 | 1+ | 3+ | 2+ | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

ومن خلال تطبيق القواعد التي بيانها بطريقة السمبلاكس (تعظيم الربحية) فقد ظهر جدول الحل الأمثل على النحو التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | -1 | -5 | -3 | 0 | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بالنظر إلى جدول حل الأمثل السابق يتبين الآتي:

\* الحل يعتبر حلاً أمثلاً لأن كافة متغيرات سطر التقييم $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة؛

\* يتحدد مزيج الانتاج الأمثل على أساس $\left(x\_{1}=1\right)$ وحدة، $\left(x\_{2}=2\right)$ وحدة، $\left(x\_{3}=0\right)$ ؛

\* أقصى ربح ممكن محقق هو 8 دج؛

\* أسعار ظل الموارد تحدد كالآتي:

$s\_{1}=5دج$: هو مورد العمل المباشر وطاقته مستعملة بالكامل.

$s\_{2}=1دج$: مورد مواد الخام وطاقته مستعملة بالكامل.

" وتجدر الإشارة هنا، إلا أننا إذا قمنا بإجراء تحليل الحساسية، فإننا يمكننا الحصول على معلومات هامة وذات قيمة جوهرية، تتعلق بجداول الانتاج البديلة وثيقة الصلة بالحل الأمثل، حيث تعتبر هذه المعلومات ذات الأهمية ونفع كبيرين للإدارة، بما قد يفوق أهميته تحديد الحل الأمثل نفسه، ويمكن القول كحقيقة هامة أن أحد أسباب إنتشار البرمجة الخطية في الحياة العملية، تمثل في قدرتها على إجراء تحليل الحساسية جنبًا، مع التوصل إلى الحل الأمثل" (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 143)

 **أولا: التغيرات في معاملات دالة الهدف**

قد تحدث تغيرات في معاملات دالة الهدف، وذلك لما يؤدي إلى حدوث تغيير في ربح أو تكلفة أحد أو بعض متغيرات النموذج، والذي قد يكون متغيرًا أساسيًا في الحل الأمثل، وقد يكون متغيرًا أساسيًا في الحل الأمثل، وقد يكون متغير غير أساسي في هذا الحل، ويتبين ذلك فيما يلي:

 **1- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي: يتبين من جدول مزيج الإنتاج الأمثل، أن المنتج** $x\_{3}$ **لم يتم إنتاجه بسبب انخفاض ربح الوحدة** $c\_{3}$ **حيث بلغت 1 دج، وقد يكون من الضروري والمهم هنا أن نحاول إيجاد مجال من القيم للربح** $c\_{3}$ **بحيث يظل الحل الأمثل الحالي على ما هو عليه، وهنا نتبين من دراسة جدول الحل الأمثل فأي انخفاض في المعامل** $c\_{3}$ **إلىأقل من 1 دج لن يكون له تأثير على الحل الأمثل الحالي، لأن المنتج** $x\_{3}$ **سوف يظل غير مربح ، ولكن إذا زاد ربحه فوق فيمة معينة فإن المنتج "**$x\_{3}$**" قد يصبح إنتاجه أمرًا مهمًا.**

وعندما تتغير قيمة $c\_{3}$ **والتي تتعلق بالمنتج** $x\_{3}$ **فإن قيمة معامل هذا المتغير في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ **سوف تتغير في الجدول الأمثل، مع ملاحظة أن الجدول الأمثل السابق سيظل أمثلاً طالما يكون معامل** $x\_{3}$ **سالبًا.**

ويتبين من جدول السمبلكس الأمثل الحالي، أن ربح الوحدة من المتغيرين $\left(x\_{2},x\_{1}\right)$ هو $\left(3,2\right)$ على الترتيب وعلى ذلك فإن معامل المتغير $x\_{3}$ **في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ **يحدد كالآتي:**

$$4-c\_{3}=4-=6+2-=\left(2\right) 3+\left(-1\right)×2-c\_{3}=\left[\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right]\left(2×3\right)-c\_{3}=\overline{c\_{3}}$$

وهنا يجب أن نلاحظ أنه لكي يكون الجدول السابق جدولاً فإن معامل المتغير $x\_{3}$ **في سطر التقييم** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$$0\leq 4-c\_{3}=\overline{c\_{3}}$، $4\leq c\_{3}$ فإن إنتاج المنتج $x\_{3}$ **لن يكون إقتصاديًا، وسيظل مزيج الانتاج الحالي بمثابة المزيج الأمثل، ولكن إ‘ذا فرضنا أن ربح الوحدة من المنتج** $x\_{3}$ **قد زاد إلى 6 دج، حينئذ** $+2=4-6=\overline{c\_{3}}$ فمزيج الإنتاج الحالي لن يكون أمثلاً، لأنه يمكن زيادة الأرباح القصوى بإنتاج $x\_{3}$**، ويترتب على ذلك أن جدول السمبلكس السابق يكون الجدول الأمثل، حيث أنه يمكن إدخال** $x\_{3}$ **في الأساس لزيادة قيمة دالة الهدف، وبتطبيق قاعدة أكبر قيمة موجبة فإن المتغير** $x\_{2}$ **يترك الأساس في سطر التقييم النهائي** $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$**، ليحل** $x\_{3}$ **محله.**

**ويمكن القول وكقاعدة عامة: " أن حساسية الحل الأمثل الحالي يمكن التوصل إليها بأفضل طريقة ممكنة من خلال دراسة كيف سيتغير الجدول الأمثل الحالي إذ ما تغيرت مدخلات البيانات"** (عبد المنعم فليح و آخرون، 2018، صفحة 144)،

 **، ويظهر الحل الأمثل الجديد كالآتي:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | -1 | -5 | -3 | 0 | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **6** | 3 | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| **2** | $$-\frac{1}{2}$$ | $$\frac{7}{2}$$ | **0** | $$\frac{1}{2}$$ | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| **1** | $$\frac{1}{2}$$ | $$-\frac{1}{2}$$ | **1** | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | $$x\_{3}$$ | 3 |
|  | 2 | 4 | **6** | 4 | 2 | $z\_{i}$=8 |
|  | 2- | 4- | **0** | 1- | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

وعلى ذلك فإن مزيج الإنتاج الأمثل (الجديد) يتحدد على أساس إنتاج 2 وحدة من $x\_{1}$، ووحدة واحدة من $x\_{3}$ وذلك بأرباح قصوى 10 دج، ويمكن القول بضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج $x\_{3}$ وذلك بأرباح قصوى 10 دج، ويمكن القول في ضوء ما سبق أن ربح الوحدة من المنتج $x\_{3}$ يجب أن لا تزيد من 1 دج إلى أكثر من 4 دج، وذلك لكي يكون مربحًا، ويكون بالإمكان تغيير مزيج الانتاج الأمثل الحالي، لما كان ربحه $دج1=x\_{3} $ واعتبر $x\_{3}$ في ضوء ذلك متغيرًا غير أساسي وغير مربح، ولم يدخل أساسي في الحل الأمثل، لذلك فإنه يجب أن يكون واضحًا أن أي معدل ربح لهذا المتغير تقل عن 1 دج سوف يؤدي أيضًا إلى استبعاده من المزيج الامثل، وعلى ذلك فإن معامل المتغير $x\_{3}$ (غير أساسي) في دالة الهدف، يمكن أن يقع بين $\left(0,4\right)$ ويظل الحل حلاً أمثلاً، ويجب تعديله والتوصل إلى الحل الأمثل الجديد على النحو السابق، وعلى ذلك:

**معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف التقييم النهائي** $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ **تمثل أقصى إضافة موجبة لمعاملات دالة الهدف الأصلية، والتي تسمح للحل أن يظل أمثلاً.**

 **2- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي: لتحديد تأثير التغيير في معدل الربح** $x\_{1}$ من المنتج الأول فإننا نجد أنه من الواضح أنه عندما تنخفض $c\_{1}$ وتصل إلى أقل من مستوى معين، فإنه من غير المربح إدخال المنتج $x\_{1}$ في مزيج الإنتاج الأمثل، وعندما تزيد $c\_{1}$ فإنه من الممكن أن يغير ذلك من مزيج الإنتاج الأمثل عند مستوى معين،ويحدث ذلك عندما يصبح المنتج $x\_{1}$ مربحًا جدًّا، بحيث أن مزيج الإنتاج الأمثل قد يتضمن سواه، وعلى ذلك فإننا نجد هناك حدًّا أعلى، وحدًّا أدنى لتغيير $c\_{1}$ ولا يتأثر الحل الأمثل الحالي السابق بازدياده إذا ما حدث التغيير بين هذه الحدود.

ولمعرفة مقدار التغير في الربح الوحدوي لـ: $x\_{1}$، و$x\_{2}$ لأنهما موجودتان في الحل نتبع ما يلي:

- من جدول السمبلاكس للحل النهائي الأمثل نقوم باستبدال معامل التغيير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز بالرمز "$c\_{i}$" حيث : $\left(i=1,2,3,\cdots \cdots \cdots n\right)$؛

- تغيير حساب السطر $\left(z\_{i}\right)$لسطر $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$؛

- من السطر $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ نقوم باختبار أمثلية الحل حيث يجب أن تكون جميع قيم $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right)$ أقل من أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل "Max" وأن تكون جميع قيم $\left(C\_{j}-Z\_{i}\right) $ أكبر أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل "Min"؛

- يتم حل المتراجحات التي تكوًّنت في الخطوة السابقة ومنه نتيجة هذا الحل تحدد حدود معامل $C\_{j}$ .

**- مجال تغير معامل** $x\_{1}$ **:** باتباع الخطوات السابقة نستبدل معامل المتغير $x\_{1}$ بالرمز $C\_{1}$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | **3** | $$c\_{1}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | 0 | **1** | $$x\_{1}$$ | $$c\_{1}$$ |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | **0** | $$x\_{2}$$ | 3 |
|  | $$-c\_{1}+3$$ | $$4c\_{1}+3$$ | $$-c\_{1}+6$$ | 3 | $$c\_{1}$$ | $$z\_{i}$$ |
|  | $$-c\_{1}-3$$ | $$-4c\_{1}-3$$ | $$c\_{1}-5$$ | 0 | **0** | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

لكي يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون جميع قيم السطر $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة ومنه تكون لدينا المتراجحات التالية:

|  |
| --- |
| $c\_{1}-5\leq 0\rightarrow c\_{1}\leq 5$ |
| $$-4c\_{1}-3\leq 0\rightarrow c\_{1}\geq -\frac{3}{4}$$ |
| $$-c\_{1}-3\leq 0\rightarrow c\_{1}\geq -3$$ |

**ومنه المعامل** $c\_{1}$ **يتغير في المجال** $\left[\frac{-3}{4},5\right]$

**- مجال تغير معامل** $x\_{2}$ **:** باتباع الخطوات السابقة نستبدل معامل المتغير $x\_{2}$ بالرمز $C\_{2}$ ونعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | 1 | $$c\_{2}$$ | 2 | $$c\_{j}$$ |
| $$s\_{2}$$ | $$s\_{1}$$ | $$x\_{3}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$v\_{b}$$ | $$c\_{j}$$ |
| 1 | -1 | 4 | -1 | **0** | 1 | $$x\_{1}$$ | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | **1** | 0 | $$x\_{2}$$ | $$c\_{2}$$ |
|  | $$-2+c\_{2}$$ | $$8+c\_{2}$$ | $$-2+2c\_{2}$$ | $$c\_{2}$$ | **2** | $$z\_{i}$$ |
|  | $$-2-c\_{2}$$ | $$-8-c\_{2}$$ | $$3-2c\_{2}$$ | **0** | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

لكي يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون جميع قيم السطر $\left(c\_{j}-z\_{i}\right)$ سالبة ومعدومة ومنه تكون لدينا المتراجحات التالية:

|  |
| --- |
| $3-2c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq \frac{3}{2}$ |
| $$-8-c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq -8$$ |
| $$-2-c\_{2}\leq 0\rightarrow c\_{2}\geq -2$$ |

**ومنه المعامل** $c\_{1}$ **يتغير في المجال** $\left[\frac{3}{2},-2\right]$

 **ثانيا: حالة تغير الموارد المتاحة**

هي الحالات التي يتغير فيها الطرف الثاني من قيود مسألة البرمجة الخطية، أو بتعبير آخر هي تلك الحالات التي يحتمل أن تتغير فيها الموارد المتاحة للمؤسسة بالزيادة أو النقصان، في مثل هذه الحالات فإن أي تغيير محتمل سوف يؤدي إلى تغيير في عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من النوعين لأن هذه الاخيرة مرتبطة بالإمكانيات المتاحة، كما رأينا عند الحديث عن أسعار الظل بحيث زيادة وحدة واحدة سواء في المادة الأولية أومن ساعات العمل .....الخ سوف يؤدي بالضرورة إلى تغير في عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من النوعين؛ (اليمين، 2006، صفحة 85)، ولكي نبين ذلك سنستعين بالمثال التالي:

مثال: تقوم إحدى المؤسسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من لعب الأطفال ($A,B$) لإنتاج وحدة واحدة من النوع "A" يتطلب استعمال وحدتي قياس (2) من مادة بلاستيك كمادة أولية، كما أنها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل، بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع (B) وحدة قياس واحدة المادة الأولية البلاستيك وتستغرق 6 ساعات عمل بورشة التصنيع، وتتوقع المؤسسة أن تتحصل على 1000 وحدة قياس خلال السنة من المادة الأولية البلاستيك المخصصة لإنتاج هذه المنتجات،كما أنَّ طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هذه الفترة هي 2400 ساعة عمل.

تحقق المؤسسة ربحًا صافيًا قدره 20 دج للوحدة من النوع الأول "A" و30 دج من النوع الثاني "B" ,

المطلوب:

- صياغة نموذج رياضي لمسألة البرمجة الخطية؟

- تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن؟

- ماذا يحدث لو تغيرت طاقة ورشة التصنيع والمادة الأولية بالزيادة والنقصان؟

**صياغة نموذج رياضي للمسألة:**

**من خلال المسألة نلاحظ أن إدارة خدمات المؤسسة ترغب في إنتاج نوعين من المنتجات وتكون بذلك متغيرات القرار كما يلي:**

$x\_{1}$**: عدد وحدات المنتج الأول؛**

$x\_{2}$**: عدد وحدات المنتج الثاني؛**

\* دالة الهدف من نوع تخفيض : تكوين الوجبة بأقل تكلفة إذن دالة الهدف هي تخفيض فتظهر دالة الهدف بالشكل التالي:

$$MaxZ=c\_{1}x\_{1}+c\_{2}x\_{2}+c\_{2}∙x\_{3}=20x\_{1}+30x\_{2}$$

\*القيود: تظهر لنا في المسألة ثلاثة قيود:

قيد المادة الأولية: $3x\_{1}+6x\_{2}\leq 2400$

قيد ساعات العمل: $2x\_{1}+x\_{2}\leq 1000$

شرط عدم السلبية: $x\_{1},x\_{2}\geq 0$

ومنه يظهر النموذج بالشكل التالي:

|  |
| --- |
| $$MaxZ=20x\_{1}+30x\_{2}$$ |
|  |
| $$3x\_{1}+6x\_{2}\leq 2400$$ |
| $$2x\_{1}+x\_{2}\leq 1000$$ |
| $$x\_{1},x\_{2}\geq 0$$ |

**البحث عن الحل الأمثل في حالة تغير الموارد المتاحة:** أن عدد الوحدات سوف تتغير في حدود مجالات معينة لذا سندرس هذه المجالات التي يمكن أن تتغير هذه الموارد دون إعادة حل المسألة من جديد، بل فقط يمكن استنتاجه مباشرة، وهذا على أساس، وهذا على أساس توجد طريقتان لإيجاد الحل الأمثل في ظل الظروف الجديدة تتجلى فيما يلي: (اليمين، 2006، الصفحات 86-94)

**الطريقة الأولى:** في هذه الطريقة نعيد صياغة الجدول من جديد مع إدخال التغيرات المحتملة في الجدول، فإذا افترضنا أن $\left(∆\_{1}\right)$ هي عدد الساعات المحتمل أن تتغير بها طاقة ورشة التصنيع، على أن يكون هذا التغير إما بالزيادة أو النقصان، كما أن $\left(∆\_{2}\right)$ هي عدد وحدات القياس التي تتوقع المؤسسة أن تتغير بها كمية المادة الأولية البلاستيك زيادة أو نقصان أيضًا، وعليه يكون الطرف الأيمن للمتراجحات كما يلي:

|  |
| --- |
|  |
| $$3x\_{1}+6x\_{2}\leq 2400+∆\_{1}$$ |
| $$2x\_{1}+x\_{2}\leq 1000+∆\_{2}$$ |

أما بقية عناصر نموذج البرمجة الخطية تبقى دون أي تغيير، ولتحديد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية في ظل الظروف المحتملة يجب إدخال بعض التعديلات على الجداول، وهذا على النحو التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ |  | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$∆\_{1}$$ | $$∆\_{1}$$ | $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $\frac{2400}{6}=400$ | **2400** | **0** | **1** | **0** | **1** | **6** | **3** | $$S\_{1}$$ | **0****المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة** عمود الدورانسط ر المحورنقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدورانالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$ |
| $$\frac{1000}{1}=1000$$ | 1000 | **1** | **0** | 1 | 0 | **1** | 2 | $$S\_{2}$$ | 0 |
|  | **0** | **0** | 0 | 0 | **0** | 0 | $$z\_{i}=0$$ |
| **0** | **0** | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بإدخال المتغيرة $x\_{2}$ **للحل وخروج** $S\_{1}$ من الحل وبإجراء مختلف التعديلات اللازمة على الجدول فنتحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ |  | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$∆\_{2}$$ | $$∆\_{1}$$ | $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| **400**$×2=800$ | **400** | **0** | $$\frac{1}{6}$$ | **0** | $$\frac{1}{6}$$ | **1** | $\frac{1}{2}$ | $$x\_{2}$$ | **30** |
| $\frac{600×2}{3}=400$ | 600 | **1** | $$-\frac{1}{6}$$ | 1 | $$-\frac{1}{6}$$ | **0** | $\frac{3}{2}$ | $$S\_{2}$$ | 0**المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة** عمود الدورانسط ر المحورنقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدورانالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$ |
|  | **0** | **5** | 0 | 5 | **30** | 15 | $$z\_{i}=12000$$ |
| **0** | $$5∆$$ | 0 | -5 | **0** | 5 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

طالما توجد إمكانية لتحسين الحل، هذا بادخال المتغير $x\_{1}$ **للحل والخروج المتغير** $S\_{2}$ من الحل، وباجراء مختلف التعديلات اللازمة نتحصل على الجدول التالي:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$b\_{i}$$ |  | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$∆\_{2}$$ | $$∆\_{1}$$ | $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| **200** | $$-\frac{1}{3}$$ | $$\frac{2}{9}$$ | $$-\frac{1}{3}$$ | $$\frac{2}{9}$$ | **1** | **0** | $$x\_{2}$$ | **30** |
| **400** | $$\frac{2}{3}$$ | $$-\frac{1}{9}$$ | $$\frac{2}{3}$$ | $$-\frac{1}{9}$$ | **0** | **1** | $$x\_{1}$$ | 20 |
|  | $$\frac{10}{3}∆\_{2}$$ | $$\frac{40}{9}∆\_{1}$$ | $$\frac{10}{3}$$ | $$\frac{40}{9}$$ | **30** | **20** | $$z\_{i}=14000$$ |
|  | $$\frac{10}{3}∆\_{2}$$ | $$\frac{40}{9}∆\_{1}$$ | $$-\frac{10}{3}$$ | $$-\frac{40}{9}$$ | **0** | **0** | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

حتى يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين في ل هذه التغيرات فإنه يجب أن تتحقق الشروط التالية:

|  |
| --- |
|  |
| $$200+\frac{2}{9}∆\_{1}-\frac{1}{3}∆\_{2}\geq 0\cdots \cdots \cdots \cdots (01)$$ |
| $$400-\frac{1}{9}∆\_{1}+\frac{2}{3}∆\_{2}\geq 0\cdots \cdots \cdots \cdots (02)$$ |

**الحالة الأولى:** في هذه الحالة سوف نفترض أن التغيير سوف يحدث في طاقة ورشة التصنيع فقط، أي أن المادة الأولية البلاستيك سوف تبقى الكميات المتاحة منها دون أي تغيير $\left(0=∆\_{2}\right)$ لذلك فإن:

|  |
| --- |
| $$200+\frac{2}{9}∆\_{1}\geq 0\rightarrow 1800+2∆\_{1}\geq 0\rightarrow ∆\_{1}\geq -900$$ |
| $$400-\frac{1}{9}∆\_{1}+\frac{2}{3}∆\_{2}\geq 0\rightarrow 3600-∆\_{1}\geq 0\rightarrow ∆\_{1}\geq -900$$ |

إذن وحتى يمكن للمؤسسة إنتاج نوعين في ظل تغير طاقة الورشة يجب أن لا يكون هذا التغيير خارج المجال التالي:

$$-900\leq ∆\_{1}\leq 3600$$

وبما أن الطاقة المتاحة للورشة هي: $2400+∆\_{1}$ فإن ساعات عمل الورشة يجب أن تتغير في حدود المجال التالي:

$$2400-900\leq ∅\_{1}\leq 2400+3600$$

$$1500^{h}\leq ∅\_{1}\leq 6000^{h}$$

$$∅\_{1}\in \left[1500^{h}-6000^{h}\right]$$

إذن داخل هذا المجال يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين بكميات مختلفة باختلاف تغير طاقة الورشة، أما خارجه فإن قيمة أحد متغيرات النموذج تكون سالبة وهذا غير ممكن.

\* نفرض أنه نتيجة لإدخال تكنولوجيا جديدة تمكنت المؤسسة من زيادة طاقة ورشة التصنيع بنسبة 150% قد أصبحت 6000 ساعة عمل. فما أثر هذا التغير على أمثلية الحل؟

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $\frac{6000}{6}=1000$ | **6000** | **0** | **1** | **6** | **3** | $$S\_{1}$$ | **0****المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة** عمود الدورانسط ر المحورنقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدورانالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$ |
| $$\frac{1000}{1}=1000$$ | 1000 | 1 | 0 | **1** | 2 | $$S\_{2}$$ | 0 |
|  | 0 | 0 | **0** | 0 | $$z\_{i}=0$$ |
| 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بإدخال المتغيرة $x\_{2}$ **للحل بالمقابل خروج أحد متغيرات الفوارق من الحل فيكون الجدول الجديد كما يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $\frac{6000}{6}=1000$ | **1000** | **0** | $$\frac{1}{6}$$ | **1** | $$\frac{1}{2}$$ | $$x\_{2}$$ | **30** |
| $$\frac{1000}{1}=1000$$ | **0** | 1 | $$-\frac{1}{6}$$ | **0** | $\frac{3}{2}$ | $$S\_{2}$$ | 0سط ر المحور |
|  | 0 | 5 | **30** | 15 | $$z\_{i}=30000$$ |
| 0 | -5 | **0** | 5 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

**المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة**

عمود الدوران

نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران

المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$

كما يمكن إدخال المتغير $x\_{1}$ **للحل طالما يوجد حلا بديلاً وهو:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
|  | 1000 | $$-\frac{1}{3}$$ | $$\frac{2}{9}$$ | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | **30** |
|  | 0 | $$\frac{2}{3}$$ | $$-\frac{1}{9}$$ | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 20 |
|  | 0 | 5 | **30** | 20 | $$z\_{i}=30000$$ |
| 0 | -5 | **0** | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بما أنه لا يوجد قيمة موجبة في السطر $\left(z\_{j}\right)$ فإن الحل أمثل بحيث يمكن للمؤسسة إنتاج 1000 وحدة من النوع الثاني فقط دون أن نتمكن من إنتاج النوع الأول، وإذا أرادت أن تنتج من هذا الأخير عليها إضافة وحدات قياس من مادة البلاستيك، فهي غير كافية $\left(s\_{2}\right)$ لإنتاج هذا النوع، لأنها لو إضافة ساعة عمل واحدة لورشة التصنيع فإن ذلك سيؤدي إلى إنتاج كميات سالبة من النوع الأول، وهذا يعتبر حل غير صالح وغير مقبول، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول السابق يتبين أنه تغير وهذا طبيعي نتيجة لتغير في طاقة الورشة، وأنَّ هذا التغير داخل مجال صلاحية الحل، لأن خارج هذا المجال سيكون غير صالح.

**الحالة الثانية: أما** في هذه الحالة سوف نفترض أن التغيير سوف يحدث في الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك فقط دون أي تغيير في طاقة الورشة، أي أن عدد ساعات العمل المتاحة تبقى دون أدنى تغيير ى$\left(∆\_{1}=0\right)$

|  |
| --- |
| $$200-\frac{1}{3}∆\_{2}\geq 0\rightarrow ∆\_{2}\leq 900$$ |
| $$400+\frac{2}{3}∆\_{2}\geq 0\rightarrow ∆\_{2}\geq -600$$ |

إذن حتى يمكن للمؤسسة إنتاج نوعين في ظل تغير الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك يجب أن لا يكون هذا التغيير خارج المجال التالي:

$$-600\leq ∆\_{2}\leq 600$$

وبما أن الكميات المتاحة من مادة البلاستيك هي $∆\_{2}+1000$ فإن عدد وحدات القياس من هذه المادة يجب أن تتغير في حدود المجال التالي:

$$1000-600\leq ∅\_{2}\leq 1000+600$$

$$400^{u}\leq ∅\_{2}\leq 1600^{u}$$

$$∅\_{2}\in \left[400^{u},1600^{u}\right]$$

إذن ضمن هذا المجال يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين بكميات مختلفة باختلاف تغير الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك، أما خارجه فإن قيمة أحد المتغيرات تكون سالبة وهذا غير ممكن.

مثال: نفرض أنه تمكنت المؤسسة من الحصول على كميات إضافية من مادة البلاستيك قدرت هذ الكميات بما يقارب 600 وحدة قياس، ما أثر هذا التغير على أمثلية الحل.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $\frac{2400}{6}=400$ | **2400** | **0** | **1** | **6** | **3** | $$S\_{1}$$ | **0****المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة** عمود الدورانسط ر المحورنقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدورانالمتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$ |
| $$\frac{1600}{1}=1600$$ | 1600 | 1 | 0 | **1** | 2 | $$S\_{2}$$ | 0 |
|  | 0 | 0 | **0** | 0 | $$z\_{i}=0$$ |
| 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بإدخال المتغير $x\_{2}$ **إلى الحل وبالمقابل خروج أحد متغيرات الفوارق من الحل فيكون الجدول الجديد كما يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
| $\frac{400}{0,5}=800$ | **400** | **0** | $$\frac{1}{6}$$ | **1** | $$\frac{1}{2}$$ | $$x\_{2}$$ | **30** |
| $$1200×\frac{2}{3}=800$$ | **1200** | 1 | $$-\frac{1}{6}$$ | **0** | $\frac{3}{2}$ | $$S\_{2}$$ | 0سط ر المحور |
|  | 0 | 5 | **30** | 15 | $$z\_{i}=12000$$ |
| 0 | -5 | **0** | 5 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

**المتغيرة الداخلة: أكبر قيمة موجبة وأقل قيمة سالبة**

عمود الدوران

نقطة الارتكاز: تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران

المتغيرة خارجة تقابل أقل قيمة $\left(\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}\right)$

كما يمكن إدخال المتغير $x\_{1}$ **للحل طالما يوجد حلا بديلاً وهو:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$\frac{b\_{i}}{a\_{ij}}$$ | $$b\_{i}$$ | 0 | 0 | **30** | 20 | $$c\_{j}$$ |
| $$S\_{2}$$ | $$S\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | $$x\_{1}$$ | $$V\_{B}$$ | $$c\_{j}$$ |
|  | **0** | $$-\frac{1}{3}$$ | $$\frac{2}{9}$$ | 1 | 0 | $$x\_{2}$$ | **30** |
|  | **800** | $$\frac{2}{3}$$ | $$-\frac{1}{9}$$ | 0 | 1 | $$x\_{1}$$ | 20 |
|  | 0 | 5 | **30** | 20 | $$z\_{i}=16000$$ |
| 0 | -5 | **0** | 0 | $$c\_{j}-z\_{i}$$ |

بما أنه لا يوجد قيمة موجبة في السطر $\left(z\_{i}\right)$ فإن الحل الأممثل وعنده يمكن للمؤسسة انتاج 800 وحدة من النوع الأول فقط دون أن تتمكن من إنتاج النوع الثاني، وإذا أرادت أن تنتج من هذا الاخير عليها إضافة ساعات عمل لورشة التصنيع فهي غير كافية $\left(s\_{1}\right)$ لإنتاج هذا النوع، لإنها لو إضافة وحدة واحدة من مادة البلاستيك، فإن ذلك سيؤدي إلى إنتاج كميات سالبة من النوع الثاني، وهذا يعتبر غير صالح وغير مقبول، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول السابق يتبين أنه تغير وهذا طبيعي نتيجة لتغير في الكميات المتاحة في مادة البلاستيك، وأن هذا التغير داخل مجال صلاحية الحل، لأن خارج هذا المجال سيكون الحل غير صالح.

**الطريقة الثانية:** أما حسب هذه الطريقة فإنه يمكن الوصول إلى نفس النتيجة انطلاقا من جدول الحل الأمثل وباستخدام أسعا الظل للموارد المتاحة على النحو التالي:

أ- مجال تغير طاقة ورشة التصنيع $\left(∆\_{1}\right)$: المعاملات المقابلة للمتغيرة $s\_{1}$ هي $\left(\frac{2}{9}\right)$، $\left(-\frac{1}{9}\right)$ وعليه يمكن أن نستخلص المجالات المباشرة من الجدول التالي وبالكيفية التالية:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\left(\frac{∅\_{j}}{s\_{i}}\right)\left(-1\right)$$ | $$s\_{1}$$ | $$∅\_{j}$$ |
| $$200\left(\frac{9}{2}\right)\left(-1\right)=-900$$ | $$\frac{2}{9}$$ | 200 |
| $$400\left(-9\right)\left(-1\right)=360à$$ | $-\frac{1}{9}$  | 400 |
| $$-900\leq ∆\_{1}\leq 3600$$ |

أي أن: $∆\_{1}\in \left[-900,3600\right]$

وبما أن: : $∆\_{1}+1000=∅\_{1}$ فإن $1500^{h}\leq ∆\_{1}\leq 6000^{h}$

ب- مجال تغير الكميات المتاحة من مادة البلاستيك $\left(∆\_{2}\right)$: المعاملات المقابلة للمتغيرة $s\_{2}$ هي $\left(-\frac{1}{3}\right)$، $\left(\frac{2}{3}\right)$ وبنفس الكمية يمكن أن نستخلص المجالات المباشرة كما يلي

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\left(\frac{∅\_{j}}{s\_{i}}\right)\left(-1\right)$$ | $$s\_{2}$$ | $$∅\_{j}$$ |
| $$200\left(-3\right)\left(-1\right)=600$$ | $$-\frac{1}{3}$$ | 200 |
| $$400\left(\frac{3}{2}\right)\left(-1\right)=-600$$ | $\frac{2}{3}$  | 400 |
| $$-900\leq ∆\_{1}\leq 3600$$ |

أي أن: $∆\_{2}\in \left[-600,600\right]$

وبما أن: : $∆\_{2}+2400=∅\_{2}$ فإن $400^{h}\leq ∆\_{1}\leq 1600^{h}$ **وهي نفس النتائج المتوصل إليها بالطريقة الأولى.**